20060529mon 16:00-17:00 談話会 楠岡成雄氏 (東大・数理)
ファイナンスと数値解析

・数理ファイナンス：　背景分野によって名称もやっていることも微妙に違う（外から見れば同じようなもの）
1950 年代：　ポートフォリオ理論（数学的発想だけから　ー　2 次計画法
　→　この後工学などで盛んになった）
1970 年代：　Black–Scholes, Merton 理論（最近のほとんどの理論の出発点　→　確率解析）

・実務としての数理ファイナンス：　経済学とファイナンスは大きく違う．経済学は実務では使われない（おおざっぱなことだけしか使わない）．ファイナンスは実際にそれを使うので，細かい値が問題になる．
・モデル（問題を数学的に定式化し，答えを見つける）
・(数理ファイナンスでは，さらに,）その値を求める必要がある
モデルは確率過程モデル，その答えは期待値等で書かれる．10 年前なら値を求めるのは数値解析のプロに任せていた．その後，実務で使えるようになるとモデルが複雑化.
→答えは見つかるが，計算はできない！
→今日では computational finance として研究対象になっている
・モデルは（問題の性格上）確率論だが，値を求める部分は何でもあり．自明と思われることでも自明でない.

・今日の目的：　数理ファイナンスそのものは今日は議論せず,「値を求める」部分に関して 2 つほど例を挙げて議論する.
・積分 $f:\ [0,1]^N \to \mathbb{R}$ （連続）に対して $\displaystyle\int_{[0,1]^N} f(x)\,dx$ を求めよ.
積分の定義で $[0,1]$ を $M = 10$ 分割　→　M^N 回計算して足し算.
一つの数理ファイナンスの問題で $N = 360$．1 秒に 10^{60} 回計算できても 10^{360} の計算は 10^{292} 年かかるので不可.
そこで,「乱数」を用いる.
$\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ $[0,1]^N$ に値をとる列
$\{z_1,\cdots,z_n\}$ の分布がルベーグ測度ならば
$\displaystyle \epsilon_n = \frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n} f(z_k) - \int_{[0,1]^N} f(x)dx \to 0$
「良い乱数」とは何かという問題はさておき，現在使われる中で良いとされるのは松本真氏の乱数．とにかく，良いのを使えば $\epsilon_n \sim n^{-1/2}$.
・MBS (mortgage backed security)：住宅ローンの証券化（USA では昔からやられていた）．3.3 兆ドル.（だから，アメリカだと一所懸命解こう，ということになる.）
$f(x)$ は初等関数，四則演算，max,min,if などで書かかれた関数．数値自体は一瞬で出るが，real analytic でないので，既存の数値積分の方法に乗りにくいケース.
満期 30 年 $= 12$ ヶ月 $\times 30 = 360 = N$．精度 $\epsilon \sim 10^{-5}$ から 10^{-6} （というのは金利が $0.01\% = 10^{-4}$ だから）．これから $n \sim 10^{11}$ 前後．しかしまだ少々大きい.

・そこで，準乱数 (low discrepancy sequence)．f がある範囲にあれば $\epsilon_n \sim \dfrac{1}{n}(\log n)^{N-1}$．log は大きくないので，$n \sim 10^6$ などとなってがぜん使える.
（経験分布をとったとき，乱数なら濃いところや薄いところが出るべきだが，準乱数はより均一に近い．従って，乱数ではなく規則的数列だが，精度は良い．また，累積したとき，乱数ならランダムウォークだから $\sqrt{n}$ で原点から遠ざかるから偏っているように見えるが，準乱数だと偏りが無くなる.）
例．p：素数．　$\displaystyle n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k}p^k$, $a_{n,k} = 0,1,\cdots,p-1$ と展開しておく.

これに対して，$\phi_p(n)=\sum_{k=0}^{\infty}a_{n,k}p^{-k-1}$ とおくと，理論的には $p_1=2,\ p_2=3,\ p_3=5,\cdots,$ を用いると，$(\phi_{p_1}(n),\cdots,\phi_{p_N}(n)),\ n=1,2,\cdots,$ は LDS（中国剰余定理による）（Halton 法）．しかし素数は急速に大きくなるので実用上は $N\leqq 10$ に限られる．(あと弱点となる構造があるため，運の悪い関数に使うと悪くなる．でもそれは滅多にないだろう．また，n を増やして収束を見ればよい．エクセルでもできる．)

LDS は今のところ代数的にのみ構成される（Sobol, ..., IBM）.

Sobol は整数の代わりに多項式を用いた.

・問題点

お金が絡むのでアメリカの企業がやっているはずだが，教えてくれない（数学で特許が絡むと教えなくなる　→　良くない）.

数学でやっている人たちは，少数派（異端児）で数学で評価が高くない.

・拡散過程の期待値.

問題：　SDE $dX(t,x)=\sum_{i=0}^{d}V_i(X(t,x))\circ dB^i(t),\ X(0,x)=x,$ を考える．(SDE: ファイナンスの直感を記述しやすい枠組み)

$V_i:\ \mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^N,\ C_b^{\infty}\ i=0,1,\cdots,d$

$B^0(t)=t,\ (B^1,\cdots,B^d)$: d–dim Brown 運動,

$f:\ \mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$

が given.

問題は，$T_0>0,\ x_0\in\mathbb{R}^N$ に対して $\mathrm{E}[\ f(X(T_0,x_0))\ ]$ を計算すること．

$u(t,x)=\mathrm{E}[\ f(X(t,x))\ ]$ とおくと u は PDE：$\dot{u}=Lu,\ u(0,x)=f(x),$ の解である．

ここで，$V_i=\sum_{j=1}^{N}V_i^j(x)\frac{\partial}{\partial x^j}$，$L=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d}V_i^2+V_0$: 2 階の（楕円型）微分作用素

PDE の数値解法としてたとえば有限要素法などがあるが，問題がある．

・方程式 $\mathbb{R}^N$ 全域で定義されている　→　有界領域にして Dirichlet 条件をつけても（十分広くとれば）誤差は小さいだろう．これは良いが,

・ファイナンスでは特定の T_0,x_0 にのみ興味がある．ここで，x_0: 現時刻の指標，T_0: 契約の満期日.

・「少し違う x_0,T_0」に対する振る舞いには興味がない．というのは,「彼ら」は方程式を全面的に信じてはいないから．翌日になるとモデルを平気で変える（変えたとは絶対言わないが）．モデルが外れた場合（モデルリスク）まで考慮している（と彼らは主張している）.

・金融機関の秘密情報によると有限要素法も使っている．しかし $N\leqq 3$ でしか使えない．$4<N\leqq 8$ では Euler–丸山法（SDE 特有）を使う.

Euler–丸山法の概略説明：　SDE を差分化 $0=t_0<t_1<\cdots<t_n=T_0$：

$$\tilde{X}_n(t_{k+1},x_0)=\tilde{X}_n(t_k,x_0)+\sum_{i=1}^{d}V_i(\tilde{X}_n(t_k,x_0))(B^i(t_{k+1})-B^i(t_k))+V_0(\tilde{X}_n(t_k,x_0))(t_{k+1}-t_k)$$

ブラウン運動←乱数（良い乱数，準乱数)：いずれにせよ積分に帰着

$\mathrm{E}[\ f(\tilde{X}_n(t_n,x_0))\ ]\to\mathrm{E}[\ f(X(T_0,x_0))\ ]$ (丸山 1950)

これがこれまでの標準的方法（PDE では Euler 法に相当）だったが，楠岡が 7,8 年前から Runge–Kutta 法に相当する方法を開発し，その後日本とフランスを中心に，良いという話が進んでいる.

V_i,V_0 を非可換 symbol v_i,v_0 と思えば e^{tL} は非可換代数の世界．非可換代数である性質を満たすものを見つければ，それが近似なる，というのが楠岡の発見．二宮–Victoir 法は実際にそのようなものを見つけた.

精度を固定したとき，分割 n を小さくしたい.

Euler–丸山法 $\epsilon_n\sim n^{-1}$，二宮–Victoir 法 n^{-2}，修正二宮–Victoir 法 n^{-3}，2005 Fujiwara 東大 M は n^{-6} を見つけた（まだテストはしていない）.

Q(高木)．離散化で下手すると ODE ではカオスが起きるかもしれない.
実務では興味がないかもしれないが，そういう研究はあるか？

A. 時間有限でメッシュを細かくするので問題は起きないと思う.
また，分割を細かくしたときの変化を追うので問題はチェックされる.
Q(小薗). Symbol を書いたのは Trotter--Kato などとは関係ある？
A. うまく近似するのが問題. Trotter--Kato はシンボルがどこまで
近似できているかが問題だが，確率的要請が加わる.
ここは operator theoretical な話ではなく，安定性の条件がマルコフ性と，
H\"ormander 条件から来る.
Q(赤間). LD 展開では二宮法はエルゴード性を用いて⋯.
A. 代数的でない方法で LDS を探したが多次元化ができない.
また，万能な sequence は無いことも分かっているので，
実務で使えることがだいじなので，LDS でなくても使ってみて使えることもあり得る.
Halton 法は素数が大きくなることが問題だったがベータ進法などという試み.
ただし難しい. ここでは，ベータ展開ではなく Sobol の方法でやっている.