語ろう数理解析@秋の仙台　2004 年 11 月 20 日 (土)

プログラム：

11:00-12:30，14:00-15:00　竹田 雅好 氏（東北大・理）

題目：　ランダムな時間変更の第一固有値とファインマン-カッツ汎関数

概要：　ランダムな時間変更過程の第一固有値は，測度（または対応する加法的汎関数）の大きさを計る基準としての役割を果たす．実際，ファインマン-カッツ汎関数が可積分であることの必要十分条件，ファインマン-カッツ半群がブラウン運動の半群と同様な超縮小性を持つための必要十分条件，分枝ブラウン運動において閉集合に到達する分枝数の期待値が有限になるための必要十分条件などが，時間変更過程の第一固有値が 1 より大きいことで与えられる．

15:30-18:00　盛田 健彦 氏（広島大・理）

題目：　2 次元散乱開撞球系の熱力学形式

概要：　本講演の 2 次元散乱開撞球は，滑らかな境界をもつ有限個の狭義凸領域からなる障害物の外部領域における測地流である．ただし，障害物は食が起きないように配置されており，境界条件は完全弾性衝突で与えられているものとする．この力学系の周期軌道分布に関するゼータ関数の解析的性質や，自然な不変測度に関する確率論的性質の熱力学形式によるアプローチについて，最近の話題も含め話す予定．

場所：　チサンホテル　会議室
（仙台市青葉区中央 4-8-7　JR 仙台駅西口徒歩 5 分 022-262-3211，FAX -3220）

目 次

2次元散乱開撞球系の熱力学形式

盛田 健彦

服部哲弥 記

1 2次元開撞球系

撞球系＝「billiard」（領域境界で完全弾性衝突し領域内で等速度運動する質点の運動を記述する位置と速度の4次元空間の力学系）

開撞球系「open billiard」＝閉じこめられていない．障害物による散乱だけを考える．研究対象になったのは1990年代直前くらいから．古典カオスの話なのにどういうわけか1970年代には研究上人気がなく，量子カオスの準古典近似の対応の話が難しいとなったときに，やっとこれなら手が着くという感じで開撞球系が出てきた．

cf. Sinaiのbilliardは領域が有界（外界との境界は区分的に滑らかで，折れているところは角度正）．1970年代からあった．BilliardはKelvinの19世紀末の物理の暗雲の話の中で，熱力学がエルゴード性に基づくとされていたのに対する反例として考察されたところから始まっていた．

「散乱体」

個数 $J \geqq 3$,

$Q_1, \cdots, Q_J \subset \mathbb{R}^2$: bdd domains

京大井川が阪大にいた頃 $\mathbb{R}^3$ の外部領域の散乱理論で細かい情報を得るために置いた条件を用いる：

(H.1) (dispersing/scattering condition): 各 j 毎に ∂Q_j は strictly convex, C^3 級（smooth で曲率がいたるところ消えていない）

(H.2) (no eclipse condition): 相異なる index の三つ組 (j_1, j_2, j_3) に対して convex hull $(\bar{Q}_{j_1}, \bar{Q}_{j_2}) \cap Q_{j_3} = \emptyset$

2次元散乱 (dispersing) 開 (open) 撞球 (billiards) 系：$Q = \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{j=1}^{J} \bar{Q}_j$

考える力学系 $(S^t)_t$ は $\bar{Q}$ 上の Euclid 計量に関する geodesic flow で，境界 ∂Q では完全弾性衝突

π : $\mathbb{R}^2 \times S^1 \ni x = (q, v) \mapsto q \in \mathbb{R}^2$：$\mathbb{R}^2$ の unit tangent bundle （geodesic flow だから cotangent bundle を考えるほうが普通だが，いまは位置と速度で考える．）

flow の定義域：「$\pi^{-1}(\bar{Q})$」．詳しく言うと

$$M = \pi^{-1}(Q) \cup (\pi^{-1}(\partial Q)/\sim) =: \pi^{-1}Q \cup M^+$$

ここで右辺第2項は，入射状態と反射状態が同時刻共存するので反射状態で代表させるために $\sim$ で同値類をとった．$(q, v) \sim (p, u)$ とは $q = p$ かつ $u = v - 2\langle v, n(q)\rangle n(q)$; $n(q)$ は q における内向き（Q_j の外に向く）法線ベクトル．

$M^+ = \{x = (q, v) \mid q \in \partial Q,\ \langle n(q), v\rangle \geqq 0\}$,

ほとんどの初期条件では有限回ぶつかっただけで無限遠に去る．問題は**無限に衝突を続ける軌道**：

$\Omega = \{x \in M \mid \pi(S^t x) \in \partial Q \text{ for } t > 0,\ \text{infinitely often, and for } t < 0,\ \text{infinitely often}\}$

力学系 $(\Omega, (S^+))$ の性質に興味：

- 周期軌道は豊富か？
- Ω の大きさ？
- 軌道の統計的性質？

標語：Length spectrum（周期軌道の長さ）に「素数定理」が成り立つか？

- Non-wandering set の初期条件と漸近挙動（無限遠から来て trap される軌道）
- Thermodyanmic formalism（Ruelle 以来の 1 次元の相転移のないモデル）
- Length spectrum に関するゼータ関数

  盛田：「自分にとっては素数に関するゼータ関数よりこれが由緒正しいと思いますが」
- 「素数定理」（Parry, Pollicot）：周期軌道の多さ

阪大助手の頃，下宿から大学へ行くのに，井川さんは蛍池から大学へ歩く．自分は蛍池に住んでいて，大学への道中問題を聞かれたことからこの問題に手を染めた．

2 有界な軌道と記号力学系

見通しの良い力学系に帰着させておく．

$\Omega^+ = M^+ \cap \Omega$ とおく．$x \in \Omega^+$ ならば，the first collision time $t^+(x) = \inf\{t > 0 \mid \pi(S^t x) \in \partial Q\} < \infty$, the last collision time $t^-(x) = \sup\{t < 0 \mid \pi(S^t x) \in \partial Q\} < \infty$，両方とも有限.

$Tx = S^{t^+(x)}x$ で $T : \Omega^+ \to \Omega^+$ を定義する（障害物から出発して次に障害物にぶつかったときの衝突点）.

$((\Omega^+, T), t^+)$: エルゴード理論の人は special flow というがトポロジーの人は suspension という.

(Ω^+, T): 離散力学系を base transformation（横軸）とし t^+ を roof function（縦軸）とした力学系. $x \in \Omega^+$ から縦に進んで，roof function にぶつかったら $Tx \in \Omega^+$ に飛び移る，という map.

これが $(\Omega, (S^t)_t)$ に対応する．この対応で最小周期 t（$S^t x = x$）は $T^n x = x$ に対応し，t に対応するのは $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} t^+(T^k x)$ （経過時間の対応）.

さらにもう一段わかりやすいものに変換する：(r, ϕ)–coordinate.

$x = (q, v)$ が ∂Q_j にあるとき，固定した ∂Q_j 上の点 $q(j)$ から q までの geodesic の長さを r とする：

- $\xi_0(x) = j$,
- $r(x) = q(j)$ から q までの arc length(時計回り),
- $\phi(x)$: q での内法線ベクトル $n(q)$ と v のなす角（$n(q)$ からの角度）.

$x \in \Omega^+$ に対して $\xi(x) := (\xi_n(x))_{n\in\mathbb{Z}}$; $\xi_n(x) = \xi_0(T^n x)$, を x の itenerary（旅程）と呼ぶ.

Shift 不変な記号力学系：

$$\Sigma = \{\xi \in \{1, 2, \cdots, J\}^{\mathbb{Z}} \mid \xi_n \neq \xi_{n+1},\ n \in \mathbb{Z}\} = \Sigma_A = \{\xi \in \{1, 2, \cdots, J\}^{\mathbb{Z}} \mid A(\xi_n, \xi_{n+1}),\ n \in \mathbb{Z}\}.$$

ここで，A は $J \times J$ 行列で対角成分は 0，非対角成分は 1. (Eclipse がないという条件はここで意味が見えてくる！）

1 次元スピン系で隣には同じスピンが乗れないという条件を課したものとみることができるので，shift 不変性を用いた熱力学が可能.

$\theta = \dfrac{1}{1 + t_{min}k_{min}}$; $t_{min} = \min\limits_{i\neq j}(\mathrm{dist.}_{\mathbb{R}^2}(Q_i, Q_j))$ （ここの dist は (r, ϕ) の局所座標ではなく $\mathbb{R}^2$ の距離）, $k_{min} = \min\{k(q) \mid q \in \partial Q\}$（ここで，$k(q)$ は q での curvature）.

$\xi, \eta \in \Sigma$ に対して $d_\theta(\xi, \eta) = \theta^n$, if $\min\{k \mid \xi_k \neq \eta_k \ \text{ or } \ \xi_{-k} \neq \eta_{-k}\} = n$ とおくと，

Theorem （旅程問題，d_θ–Lipschitz well-posedness）. $(\forall \xi \in \Sigma)\ \exists! x \in \Omega^+;\ \xi(x) = \xi$.

この x を $x(\xi)$ と書くとき，

$$(\forall \xi, \eta \in \Sigma) \ \ |r(x(\xi)) - r(x(\eta))| \leqq C d_\theta(\xi, \eta), \ \ \phi(x(\xi)) - \phi(x(\eta))| \leqq C d_\theta(\xi, \eta).$$

ここで，C は Q のみに依存する定数. ◇

これにより，shift （$(\sigma\xi)_n = \xi_{n+1}$ で定義される $\sigma:\ \Sigma \to \Sigma$）との間に可換図式

$$\begin{array}{cccc} T: & \Omega^t & \to & \Omega^+ \\ & \downarrow \xi & \bigcirc & \downarrow \xi \\ \sigma: & \Sigma & \to & \Sigma \end{array}$$

が成り立つ．

服部注：ここで,「両方向に n のびたら，一方向には無限に延びる」と言っていたように思うが，何か $n \geqq 1$ 以外の条件が付かないとおかしい？

3　熱力学定式化と非可逆化

$f(\xi) := t^+(x(\xi))$ とおくと $f \in F_\theta := Lip(\Sigma, d_\theta)$.

ξ については Hölder 連続性しかないが f は cylinder では Lipschitz 連続になる．

$0 < \alpha < 1$ を fix し，$V \in F_\alpha$, real valued とする．

定義． $\{1, \cdots, J\}^n \ni w_0 \cdots w_{n-1}$ が admissible とは

$$\exists \xi \in \Sigma;\ \xi_k = w_k,\ k = 0, \cdots, n-1,$$

が成り立つことを言う．n を word の長さと呼ぶ．

長さ n の admissible word の全体を $\mathcal{W}_n$ とおく．$w_0 \cdots w_{n-1} \in \mathcal{W}_n$ に対して cylinder set：

$$[w_0 \cdots w_{n-1}]_k = \{\xi \in \Sigma \mid \xi_k = w_0, \cdots, \xi_{k+n-1} = w_{n-1}\}.$$

$$P(V) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} \log \sum_{[w_{-n}\cdots w_n]_{-n}} \inf_{\xi \in [w_{-n}\cdots w_n]_{-n}} \exp(\sum_{k=-n}^{n} V(\sigma^k \xi))$$

を potential V に関する topological pressure と言う．$P(V)$ は次の特徴付けを持つ (variational principle)：

$$P(V) = \sup_{\mu:\ \sigma\text{–invariant prob. meas.}} \{\int V(\xi) d\mu + h_\mu(\sigma)\}.$$

ここで $h_\mu(\sigma)$ は σ の μ に関するエントロピー（力学系と不変測度があるとエントロピーが定義される）.

定理． 次を満たす Σ 上の σ–invariant probability measure μ がただ一つ存在する (**Gibbs measure**)：

$$\exists C \geqq 1;\ (\forall \xi \in [w_{-n}, \cdots, w_n]_{-n})(\forall n)(\forall \text{ admissible } w_{-n}, \cdots, w_n)$$
$$C^{-1} \leqq \frac{\mu([w_{-n}, \cdots, w_n])_{-n}}{\exp(-(2n+1)P(V) + \sum_{k=-n}^{n} V(\sigma^k \xi))} \leqq C.$$

◇

log をとって $2n+1$ で割って $n \to \infty$ をとると，シャノン－マクミランの定理から

$$P(V) = \int V(\xi) d\mu + h_\mu(\sigma).$$

つまり分子がエントロピーになるのが定理の要．分母の V の和から来る項はエルゴード定理で平均に収束する．(μ は V に関する equilibrium meaqsure)

次に，可逆だと難しいので過去によらない量を考える．可逆だと $f \mapsto f \circ T$ の逆 $f \mapsto f \circ T^{-1}$ は unitary なので道具がないが，非可逆なら $f \circ T^{-1}$ の compact 性が上がる．さらに real valued bdd function ϕ があって $U = V + \phi \circ \sigma - \phi$ ならば U と V の Gibbs measure は一致する．これを使って U が過去によらないように変形することを考える．

$1 \leqq j \leqq J$ に対して $\alpha_j \in \Sigma$ を $(\alpha_j)_0 = j$ となるように選んで固定しておき，$\Pi\xi$ が α_{ξ_0} の $(-\infty, -1]$ 成分と ξ の $[0, \infty)$ 成分を並べてつないだもの (concatination) とおいて $\Pi: \ \Sigma \to \Sigma$ を定義する．

$\phi(\xi) := \sum_{k=0}^{\infty}(V(\sigma^n\xi) - V(\sigma^n\Pi\xi))$ とおくと $\phi(\xi) \in F_{\sqrt{\alpha}}$ が分かる．(Regularity は損するが 0 と 1 の間なら以下については問題起きない．）この ϕ を用いて $U = V + \phi\circ\sigma - \phi$ とおくと，

$$U(\Pi\xi) = U(\xi), \ \xi \in \Sigma.$$

確率解析のまねをする．$\beta = \sqrt{\alpha}$ とおいて，$\mathcal{L}_U: \ F_\beta \to F_\beta$ を

$$u \mapsto \mathcal{L}_U u(\xi) = \sum_{\eta: \ \sigma\eta=\xi} e^{U(\eta)} f(\eta)$$

で定義すると，

$$\mathcal{L}_U^n f(\xi) = \sum_{\eta: \ \sigma\eta=\xi} e^{\sum_{k=0}^{n-1} U(\sigma^k\eta)} f(\eta).$$

F_β では $\mathcal{L}_U$ は quasi compact になる．

定理． $\exists! h \in F_\beta, \ \exists! \lambda > 0; \ \ h > 0, \ \text{and} \ \mathcal{L}_U h = \lambda h.$

さらに，$\mathcal{L}_U$ を F_β で 考えたときのその他のスペクトルの絶対値は一様に λ より小 ◇

$$\Sigma^+ = \{\xi \in \{1, \cdots, J\}^{\mathbb{Z}_+} \mid \xi_n \neq \xi_{n+1}, \ n \geqq 0\}$$

とおいて，$(\lambda^{-1}\mathcal{L}_U)^*: M(\Sigma^+) \to M(\Sigma^+)$ を考えると，$\lambda^{-1}\mathcal{L}_U^*\nu = \nu$ なる確率測度 ν が存在することが分かる．このとき求める μ は $\mu = h\nu$ で与えられ，$\lambda = e^{P(U)} = e^{P(V)}$ となる．つまり $\mathcal{L}_U$ の第 1 固有値で topological pressure が決まる．

4 周期軌道とゼータ関数

リーマンのゼータ関数 $\zeta_R(s) = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1}$ の類推で，周期軌道のゼータ関数 $\zeta(s) = \prod_\tau (1 - e^{-s\ell(\tau)})^{-1}$ を考える．ここで $\prod_\tau$ は周期軌道全てにわたる積．

$\ell(\tau)$: 周期軌道 τ の最小周期．

（服部注．）ここで私のノートに「解析接続等は分かっていないが，素数定理に対応するものは分かっている．」という記述が残っているが，最後のほうで確認したときは「解析接続は分かっている」と言っていたので，解析接続の分かっている範囲について詳細な問題があるのかもしれない．

この ζ は $(\Omega, (S^t))$ の言葉で書かれているが，前節までで行った力学系の変換 $((\Sigma, \sigma), f) \to ((\Omega^+, T), t^+) \to (\Omega, (S^t))$ によって書き換えると次を得る．

定理． $\Re(s) \gg 1$ ならば

$$\zeta(s) = \exp(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{\sigma^n\xi=\xi} \exp(-\sum_{k=0}^{n-1} f(\sigma^k\xi))). \tag{1}$$

◇

証明．まず，$\exp(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{\sigma^n\xi=\xi} \exp(-\sum_{k=0}^{n-1} f(\sigma^k\xi))) = \exp(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{T^n x=x} \exp(-s\sum_{k=0}^{n-1} t^+(T^k x))).$

次に (S^t) の周期軌道 τ に対応する T の周期軌道 $\{x, \cdots, T^{p(\tau)-1}x\}$ を考える．$\ell(\tau) = t^+(x) + \cdots + t^+(T^{p(\tau)-1}x)$.

$\log\zeta(s)$ の $\log$ を展開して周期軌道の周期 p について τ の和を分類すると，

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p} \sum_{x: \ T^p x=x, \ \text{最小周期}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} e^{-sk\sum_{j=0}^{p-1} t^+(T^j x)}$$

これは (1) の右辺に等しいことが分かる. □

さらに $g(\Pi\xi) = g(\xi)$, $\forall\xi$, と, $\exists\phi$; $f = g + \phi\circ\sigma - \phi$ を満たす g に対して $((\Sigma^+, \sigma), g)$ への対応が可能. このとき, (1) の右辺の括弧内は transfer matrix の trace になる.

$\mathcal{Z}_n = \{[w_0, \cdots, w_{n-1}]_0 \mid w_0\cdots w_{n-1} \in \mathcal{W}_n\}$ とおく. $z, z' \in \mathcal{Z}_n$ に対して $(\sigma^n z)\cap z' \neq \emptyset$ ならば $\sigma^n z \supset z'$ になることに注意.

n を fix. $z \in \mathcal{Z}_n$ に対して $\xi_z \in \Sigma$ を, $\sigma^n\Sigma \supset \Sigma$ のときには Σ 内の唯一の σ^n の fixed point とする.

$L_{-sg}u(\xi) = \displaystyle\sum_{\eta:\ \sigma\eta=\xi} e^{-sg(\eta)}u(\eta)$ とおくと,

$$\sum_{\sigma\xi=\xi} \exp(-s\sum_{k=0}^{n-1} g(\sigma^k\xi)) = \sum_{z\in\mathcal{Z}_n} (L^n_{-sg}\chi_z)(\xi_z)$$

ここで χ_z は z の定義関数. $L^n\chi_z$ の regularity が高いと最初の目的に関して良い結果を得る.

話が佳境に入ったところで残念ながら会議室の時間切れ.

このあとの話：ゼータ関数の解析接続は, L の essential spectrum が 1 より小さければ,（大きいものは多重度 1 の固有値なので pole として単離できるから）可能である. r–ϕ 座標で n を増やすと細かくちぎれていく構造を使う. そのとき f を g に変えると regularity を落とすが, 0 を越えて解析接続することは可能である.（あまり $\Re(s)$ が小さいと発散して右辺は意味を失う.）0 でのゼータの値 $\zeta(0)$ が散乱体の個数を与える.