語ろう数理解析@秋の仙台　2004 年 11 月 20 日 (土)

プログラム：

11:00-12:30，14:00-15:00　竹田 雅好 氏（東北大・理）

題目：　ランダムな時間変更の第一固有値とファインマン-カッツ汎関数

概要：　ランダムな時間変更過程の第一固有値は，測度（または対応する加法的汎関数）の大きさを計る基準としての役割を果たす．実際，ファインマン-カッツ汎関数が可積分であることの必要十分条件，ファインマン-カッツ半群がブラウン運動の半群と同様な超縮小性を持つための必要十分条件，分枝ブラウン運動において閉集合に到達する分枝数の期待値が有限になるための必要十分条件などが，時間変更過程の第一固有値が 1 より大きいことで与えられる．

15:30-18:00　盛田 健彦 氏（広島大・理）

題目：　２次元散乱開撞球系の熱力学形式

概要：　本講演の２次元散乱開撞球は，滑らかな境界をもつ有限個の狭義凸領域からなる障害物の外部領域における測地流である．ただし，障害物は食が起きないように配置されており，境界条件は完全弾性衝突で与えられているものとする．この力学系の周期軌道分布に関するゼータ関数の解析的性質や，自然な不変測度に関する確率論的性質の熱力学形式によるアプローチについて，最近の話題も含め話す予定．

場所：　チサンホテル　会議室
（仙台市青葉区中央 4-8-7　JR 仙台駅西口徒歩 5 分 022-262-3211，FAX -3220）

目 次

ランダムな時間変更の第一固有値とファインマン-カッツ汎関数

竹田 雅好

服部哲弥 記

1 Feynman–Kac 公式の可積分性の問題

$D \subset \mathbb{R}^d$：有界な domain； ∂D 滑らか

ラプラス方程式の境界値問題：$f \in C(\partial D)$ に対して，

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\Delta u(x) = 0, & x \in D, \\ u(x) = f(x), & x \in \partial D. \end{cases}$$

解 u をブラウン運動で書くことができることが知られている．

$w \in \Omega = C([0,\infty) \to \mathbb{R}^d)$ をブラウン運動らしく $B_t(w) = w(t)$ と書く．

Wiener 測度を P_x と書く．（P_x は $\mathrm{P}_x[\, B_0(w) = x\,] = 1$, $\mathrm{P}_x[\, B_t(w) \in A\,] = \displaystyle\int_A e^{-|x-y|^2/(2t)} \frac{dy}{(2\pi t)^{d/2}}$ などを満たす関数空間 Ω 上の確率測度.）

このとき u は

$$u(x) = \mathrm{E}_x[\, f(B_{\tau_D})\,]$$

と書けることを 1944 年に角谷が指摘した（E_x は期待値）．ここで，

$$\tau_D(w) = \inf\{t > 0 \mid B_t(w) \neq D\}$$

はブラウン運動が開集合 D の境界を最初に hit する時刻.

B_{τ_D} は詳しく書けば，$B_{\tau_D(w)}(w) = w(\tau_D(w))$ のこと（以下同様）.

x からブラウン運動が動いて境界を点 a（ランダム）で hit したら $f(a)$ を持ってくる．それをブラウン運動（Wiener 測度）で平均すると $u(x)$ になる.

ポテンシャルを導入した場合を考察．以下 $V:\ D \to \mathbb{R}$ は非負値関数とする.

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\Delta u(x) + V(x)u(x) = 0, & x \in D, \\ u(x) = f(x), & x \in \partial D. \end{cases}$$

この解はブラウン運動を使って

$$u(x) = \mathrm{E}_x[\ \exp(\int_0^{\tau_D(w)} V(B_s(w))\,ds)\, f(B_{\tau_D(w)}(w))\,] \tag{1}$$

と書ける.

(1) の導出の説明．伊藤の公式を使うとブラウン運動の generator が $\dfrac{1}{2}\Delta$ ということからマルチンゲール M_t があって

$$u(B_t) - u(B_0) = M_t + \int_0^t \frac{1}{2}\Delta u(B_s)\,ds$$

と書ける（この形をセミマルチンゲールという）[1].

$\exp(\displaystyle\int_0^t V(B_s(w))\,ds$ もセミマルチンゲールでセミマルチンゲールの積はセミマルチンゲールなので，伊藤の公式からマルチンゲール $\tilde{M}_t$ があって[2]

$$\begin{aligned} &\exp(\int_0^t V(B_s(w))\,ds)\,u(B_t(w)) \\ &= u(B_0(w)) + \tilde{M}_t + + \int_0^t \exp(\int_0^s V(B_u(w))\,du)\,(\frac{1}{2}\Delta + V(B_s(w)))\,u(B_s(w))\,ds. \end{aligned}$$

[1] 20050620 服部注：$M_t = \displaystyle\int_0^t \nabla V(B_s) \cdot dB_s$.

[2] 20050620 服部注：$\tilde{M}_t = \displaystyle\int_0^t \exp(\int_0^s V(B_u)\,du)\,\nabla V(B_s) \cdot dB_s$.

マルチンゲールにランダム時間を入れてもマルチンゲールになる (Doob の optimal stopping) こと（つまり $t=\tau_D(w)$ を代入），両辺の期待値を取ったときマルチンゲールの期待値は 0 なこと，u の満たす微分方程式，$B_0=x$，および ∂D で $u=f$ なることから解の表示 (1) を得る． □ ((1) の導出の説明終わり)

ただし，以上の導出は**可積分ならば**，つまり，

$$g^{D,V}(x) := \mathrm{E}_x[\ \exp(\int_0^{\tau_D} V(B_s)\,ds)\ ] < \infty \tag{2}$$

ならば成り立つ．

`Q(石毛). V\le 0 は？`
`A. 可積分なので問題が起きない.`

例． $d=1$, $D=(-1,1)$, V が定数 $c>0$ の場合：

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}u''(x)+c\,u(x)=0, & |x|<1, \\ u(\pm 1)=1. \end{cases}$$

解は容易に $u(x)=\dfrac{\cos(\sqrt{2c}x)}{\cos(\sqrt{2c})}$ と分かる．この表式から $c \geqq \pi^2/8$ では $u \leqq 0$ が起こりうるが，$u(x) \leqq 0$ になると解を正値関数の期待値 (1) で書けるはずがない．実際，そのとき可積分性 (2) が壊れる：$\mathrm{E}_x[\ \exp(c\tau_D)\ ]=\infty$ $(c \geqq \pi^2/8)$.

`Q(石毛). c\ge \pi^2/8 のときは確率論的には書けない？`
`A. 書けない. 他の表現もない.`

そこで，いつ可積分性 (2) が成り立つかを問題にする．表面上は x,D,V のかねあい．(2) の g を gauge function という（幾何の人には怒られる呼称かもしれないが，K. L. Chung がそう呼んだので）．

V は Kato class （線形シュレディンガー方程式の散乱問題などの関数解析で知られている関数の集合．ここでは詳細は略す）に入っている関数とする．

B_t が D の境界を hit したところで止めるために，1点 compact 化を行う．Δ を $\mathbb{R}^d$ と異なる点として

$$B_t^D = \begin{cases} B_t, & t<\tau_D\,, \\ \Delta, & t \geqq \tau_D, \end{cases} \tag{3}$$

とおき，その遷移確率密度を $p_t^D(x,y)$ として $\alpha>0$ に対して

$$G_\alpha^D(x,y)=\int_0^\infty e^{-\alpha t}p_t^D(x,y)\,dt$$

とおく．グリーン関数は $G^D=G_0^D$.

Theorem (Aizenman–Simon).

$$\lim_{\alpha\to\infty}\left\| \int_D G_\alpha^D(x,y)\,V(y)\,dy \right\|_\infty = 0$$

と

$$\lim_{\epsilon\downarrow 0}\sup_{x\in D}\int_{D\cap\{|x-y|\leqq\epsilon\}} G^D(x,y)\,V(y)dy=0$$

は同値.（Local な singularity が少ないということ.） ◇

Theorem (Gauge theorem).

$$\exists x_0 \in D;\ \mathrm{E}_{x_0}[\ \exp(\int_0^{\tau_D} V(B_s))\,ds\ ] < \infty$$

と

$$\sup_{x\in D} \mathrm{E}_x[\ \exp(\int_0^{\tau_D} V(B_s))\,ds\ ] < \infty$$

は同値. ◇

つまり，Kato class では gauge 関数の可積分性は x は関係ない．あとは D, V だけ．[3]

着想．具体的に計算すると，さきほどの例で $c \geqq \pi^2/8$ は次と同値.

$$\inf\{\frac{1}{2}\mathbb{D}(u,u) \mid u \in C_0^\infty,\ \int_D u^2(x)c\,dx = 1\} > 1. \tag{4}$$

ここで $\mathbb{D}(u,u) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^1 (\frac{d\,u}{dx})^2 dx$.

実は，c を $V(x)$ に一般化すると，(4) は (2) と同値になる．これが主結果である．

まず，(4) が固有値という L^2 の量で書かれているのに対して，L^∞ の量で書かれた (2) の十分条件がある.

Khasminskii の Lemma（1960 頃）．（Simon が 1979 に書いた本では最初再発見した人の名前で書かれていて，その後別の論文では Khasminskii（ハシミンスキー）になっていた.）

$$\|G^D V\|_\infty\ (= \sup_{x\in D}\int_D G^D(x,y)V(y)dy = \sup_{x\in D}\mathrm{E}_x[\ \int_0^{\tau_D} V(B_t)\,dt\ ]\ )\ < 1$$

ならば指数可積分性

$$\sup_{x\in D} \mathrm{E}_x[\ \exp(\int_0^{\tau_D} V(B_t)\,dt)\ ] < \infty$$

が成り立つ. ◇

証明概略．指数関数を展開して，n 次が $n!\left(\sup\limits_{x\in D}\mathrm{E}_x[\ \displaystyle\int_0^{\tau_D} V(B_t)\,dt\ ]\right)^n$ 以下であることを言う．つまり Neumann 級数になっていることを言う.（したがって特に，仮定の左辺が λ なら結論の左辺は $(1-\lambda)^{-1}$ で抑えられる.）

証明は機械的だが，Brown 運動の強マルコフ性を用いる．つまり，関数解析的な補題ではなく，強マルコフ性に関する補題. □

2　時間変更過程とその寿命

L^2 と L^∞ をつなぐことをマルコフ過程論の抽象論で一般的にやってしまう．そのために，(2) をランダムな時間変更の言葉で書き直す.

B_t^D を (3) のとおりとし，$w \in \Omega$ 毎に $\displaystyle\int_0^t V(B_s^D(w))\,ds$ の右連続な逆関数を $\tau_t(w)$ とおく[4]：

$$\tau_t(w) = \inf\{s > 0 \mid \int_0^s V(B_u^D(w))\,du > t\}. \tag{5}$$

時間変更過程 $Y_t(w) = B^D_{\tau_t(w)}(w)$.

時間変更過程はマルコフ過程論では古くから知られている技法で，path の上の変換でマルコフ過程を次々作る最有力の手段.

例．$K \subset D$ を compact set として，$V = I_K$ の場合，$\tau_t(w)$ は w が K 内にいるときだけ進む時間が t になった時点での元のブラウン運動にとっての時刻，ということ．Y の状態空間は K になる．また，B が最後に K を出る時刻が Y の life-time. ◇

[3] 20050620 服部注：R. Durrett, *Stochastic processes*, CRC press, §4.6 *The Schrödinger equations*, に，V が定数の場合の具体例と，一般の場合に「(2) が成り立てば (1) によって対応する定常 Schrödinger 方程式の解が与えられる」ことの証明がある (Chapter 4 Theorem (6.3))．また，Gauge theorem の証明もある．他方，可積分性 (2) がいつ成り立つかへの言及は（V が定数の場合のあらわな計算を除いて）一切ない.

可積分性が成り立つ条件を固有値 (L_2) の言葉で書くのが次節以降の本題.

[4] 20050620 服部注： B の local time に V の値で weight をつけたようなもの

一般には $\tau_t(w)$ は w が V の大きいところにいると早く進む時間で，Y は jump もあり得る．Y の support は $F = \mathrm{suppt.}[V\,dx]$.

Brown 運動はルベーグ測度に関して対称，すなわち，semi-group $P_t^D f(x) = \mathrm{E}_x[\, f(B_t^D)\,]$ について $(P_t^D f, g)dx = (f, P_t^D g)dx$ であった．Y は $V dx$–対称である．

Y の semi-group の generator A は self-adjoint on $L^2(F; V dx)$ さらに $\mathcal{D}\mathrm{om}(\mathcal{E})$ を form $(-Au,u)_{V dx}$ の domain とするとき，

$$\inf\{(-Au,u)_{V dx} \mid \int_F u^2\, V\, dx = 1,\ u \in \mathcal{D}\mathrm{om}(\mathcal{E})\} = \inf\{\frac{1}{2}\mathbb{D}(u,u) \mid \int_D u^2\, dx = 1,\ u \in C_0^\infty(D)\}.$$

つまり**Dirichlet form は時間変更しても本質的に変わらない**．（右辺の $C_0^\infty(D)$ は form の domain という意味では $H_0^1(D)$ だが，値は等しい.）

Formal には，過程の時間変更とは generator を $\frac{1}{2}\Delta$ から $\frac{1}{2}\frac{1}{V}\Delta$ に変えたということ．

Y の life-time を ζ と書く（path-wise に決まる量）．元の測度で見たとき $\int_0^{\tau_D} V(B_t)\,dt$ の可積分性を見たかったのだが，これを Y_t で見ると，(5) から，life time の可積分性の問題になる：

$$\mathrm{E}_x[\ \exp(\int_0^{\tau_D} V(B_t)dt)\ ] = \mathrm{E}_{Y;x}[\ \exp(\zeta)\ ].$$

これでマルコフ過程の life time の有限性の一般論で議論する準備ができたので，一般論に移る．

3　マルコフ過程の life time と Donsker–Varadhan の大偏差値原理

ζ を life time とするマルコフ過程 X_t： $M = (P_x, X_t, \zeta)$

Ω は普通は右連続左極限関数の全体．状態空間 X は a locally compact separable metric space.

Semi-group $P_t f(x) = \mathrm{E}_x[\, f(X_t)\,]$ は radon measure m について対称 $(P_t f, g)_m = (f, P_t g)_m$ とする．

P_t は任意の $1 \leqq p \leqq \infty$ について L^p 上の有界作用素になっている．$P_t :\ L^p(X,m) \to L^p(X,m)$ の operator norm を $\|P_t\|_p$ と書くと，$-\lambda_p = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \|P_t\|_p$

Fact. $\sup_{x\in X} \mathrm{E}_x[\ \exp(\zeta)\ ] < \infty$ と $\lambda_\infty > 1$ が同値[5]．（吸収壁ブラウン運動では Freedman.）

M から作られる Dirichlet form

$\mathcal{D}\mathrm{om}(\mathcal{E}) = \{u \in L^2(X,m) \mid \mathcal{E}(u,u) < \infty\}$

$\mathcal{E}(u,u) = \lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t}(u - P_t u, u)_m < \infty.$

$\lambda_2 = \inf\{\mathcal{E}(u,u) \mid u \in \mathcal{D}\mathrm{om}(\mathcal{E}),\ \int_X u^2 dm = 1\}$

$1 \leqq p \leqq \infty$ のとき $\lambda_\infty \leqq \lambda_p \leqq \lambda_2$ は分かる．

Simon は，$\frac{1}{2}\Delta + V$ に対して V が Kato class なら λ_p が p によらないということをやったが，それはブラウン運動の場合．いまは時間変更過程で使える形でやりたい．

着想． Donsker – Varadhan の大偏差原理（大部の論文 I–IV）．

竹田さんが大学院に入った頃池田さんは Varadhan と Malliavin と Sinai がいちばん偉い，彼らが論文を書いたら必ず読めと言っていた．

Donsker–Varadhan は実際の application はブラウン運動などの極めて具体的な対象だったが，なぜか彼らは論文を大部にしてまで高度の一般論を展開した．**それがここで役立つ！**

Life time という観点からは Donsker–Varadhan の理論は life time が無限大の場合（ergodic な場合）の滞在時間の large deviation.

平均滞在時間：$L_t^w(A) = \frac{1}{t}\int_0^t I_A(X_s(w))\,ds,\ A \in \mathcal{B}(X)$, は，$X$ 上の確率測度の全体を $\mathcal{P}$ と書くと，($L_t^w(X) = 1$ なので) $L_t^w(\cdot) \in \mathcal{P}$．$w$ を動かすと，確率測度に値を取る確率過程 $\mathcal{P}$ にはふつうに weak

[5] 20050620 服部注：Khasminskii Lemma とは違って関数解析的な内容とのこと．$\sup_{x\in X} \mathrm{E}_x[\ \exp(\zeta)\ ] \sim \int_0^\infty e^t\, \|P_t\|_{\infty,\infty}\, dt$ において，$\|P_t\|_{\infty,\infty} \sim e^{-\lambda_\infty t}$ なので主張を得る（1985 頃 S. Sato, Kodai Journal）.

topology を入れておく（つまり，測度の収束を有界連続関数の平均の収束で定義，つまり普通の確率測度の弱収束）.

Theorem (Donsker–Varadhan's large deviation principle). M へのある仮定（ここでは省略するが，Feller 性，すなわち， $P_t(C_b(X)) \subset C_b(X)$ という条件を含む仮定）の下で以下が成り立つ.

(i) $G \subset \mathcal{P}$ が open set ならば

$$\varliminf_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \mathrm{P}_x[\, L_t^w \in G \,] \geqq -\inf_{\mu\in G} I(\mu).$$

(ii) $K \subset \mathcal{P}$ が closed set ならば

$$\varlimsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \mathrm{P}_x[\, L_t^w \in K \,] \leqq -\inf_{\mu\in K} I(\mu).$$

ここで Donsker–Varadhan の I 関数 $I\colon\ \mathcal{P} \to [0,\infty]$ は

$$I(\mu) = -\inf_{u\in\mathcal{D}\mathrm{om}^+(A)} \int \frac{Au}{u}(x)\, d\mu(x)$$

で定義される．A は P_t の Feller generator で $\mathcal{D}\mathrm{om}^+(A)$ は $u \in \mathcal{D}\mathrm{om}(A)$ のうちで $\inf_{x\in X} u(x) > 0$ なる条件を満たすもの.

P_x の x は process X_t の出発点．しかるべき（ここでは省略した）Donsker–Varadhan の仮定の下で x によらない評価を得たということ. ◇

さらに対称な場合は良い表示があって,（large deviation principle と無関係に）$I(\mu) = I_{\mathcal{E}}(\mu)$ が成り立つ.
ここで

$$I_{\mathcal{E}}(\mu) = \begin{cases} \mathcal{E}(\sqrt{f}, \sqrt{f}), & \mu = f\cdot m \text{ かつ } \sqrt{f} \in \mathcal{D}\mathrm{om}(\mathcal{E}) \text{ のとき}, \\ \infty, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

つまり I–function は L^2 の量で書けている！だから Donsker–Varadhan が仮定に置いたその仮定こそ,（ここでは省略したが）λ_p の p–independence の十分条件かもしれない！

目標との違い. Donsker–Varadhan は ergodic な場合，つまり，$L_t^w \to \nu$ （不変測度への収束）となっている場合（その接近のスピードが $-\inf I(\mu)$ で分かる，というのが Dosnker–Varadhan のそもそもの話）．やりたいのは,

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{x\in X} \frac{1}{t} \log \mathrm{P}_x[\, t < \zeta \,] = -\inf_{\mu\in\mathcal{P}} I_{\mathcal{E}}(\mu)$$

$t < \zeta$ という条件を入れることと，$x \in X$ に関する一様評価がほしいということ.

これが目標であることは，右辺が $-\lambda_2$ なのは明らかで，他方,

$$\mathrm{P}_x[\, t < \zeta \,] = \mathrm{P}_x[\, X_t \in X \,] = (P_t\mathbf{1})(x)$$

から

$$\sup_{x\in X} \frac{1}{t} \log \mathrm{P}_x[\, t < \zeta \,] = \|P_t\|_\infty$$

となるから．いまは $L_t^w \to 0$ なのでそこからの large deviation をやりたいところがオリジナルと違う．しかし,（やってみると）証明は同じようにできた.

4 主結果

以下の仮定をおく.

I. irreducible（状態空間が subset で閉じていない）

II. $P_t(\mathcal{B}_b(X)) \subset C_b(X)$ (strong Feller)

III. 'tightness' (これがだいじ): $(\forall\epsilon > 0)\ \exists K \subset X$, compact and $G_1 I_{K^c}(x) \leqq \epsilon$

たとえば $m(X)<\infty$ で，$\|G_1\|_{1,m}<\infty$ の場合.（$m(X)<\infty$ の吸収壁ブラウン運動や explosion のある場合，あるいは $G1\in C_\infty(X)$ のとき．後者は

$$\sup_{x\in X} G_1 I_{K^c}(x)=\sup_{x\in K^c} G_1 I_{K^c}(x)\leqq \sup_{x\in K^c} G1(x)\to 0,\quad x\to\infty,$$

だから．1 次元 diffusion で Khasminskii test を満たす場合は explosion を起こすが，$G1\in C_\infty(X)$ が成り立つ．早く爆発するということは滞在分布が 0 に行きやすいので.）

補足：仮定の使いかた．

III：Donsker–Varadhan の結果の 2 つめの「closed set」のところ,「compact set」ならば III は不要. Compact set から closed set に（inf を取る範囲を）拡張するところが，最大の山場.（Compact set でやった場合を LDP，closed で言えたとき full LDP と呼び分ける場合もある.）ここでの話で言うと，level set $\{x\mid \frac{Au}{u}\leqq \ell\}$ が compact になってほしいが，$u=R_\alpha\phi$ と $A(\alpha-R_\alpha)\phi=\phi$ から

$$\frac{Au}{u}=\frac{\alpha R_\alpha\phi-\phi}{R_\alpha\phi}.$$

このとき ergodic ならば ϕ が大きくなりうるけど $R\phi$ は有界になって（遠方で比が発散することから）level set は compact になる．爆発のある場合は，killing があるので $R_\alpha\phi\to 0$, $|\phi|=O(1)$ から同様に level set が compact になる．

II: Feller 性．D. Williams の教科書にもあるが，time change などの path の変換で Feller 性が保たれるかは難しい．しかしひとたび Kato class に限ると，time change を考える上でも Feller 性が保たれる．これまで確率論では Kato class の V に限るということはあまり無かったが，ここでは良いクラスである．

Theorem (Takeda). $\sup_{x\in D}\mathrm{E}_x[\ \exp(\int_0^{\tau_D} V(B_t)\,dt)\ ]<\infty$ と

$$\lambda(V,D)=\inf\{\frac{1}{2}\mathbb{D}(u,u)\mid \int_D u^2V(x)\,dx=1\}>1$$

は同値. ◇

あとの例のために，V を measure に拡張しておく．また D も有界とは限らない domain とする．$G^D(x,y)$ を吸収壁ブラウン運動の Green 関数とする．

$\mu\in S_D^\infty$: positive Radon measure;

(i) $(\forall\epsilon>0)\ \exists K\subset\subset D$, cpt, $\exists\delta>0$; $\displaystyle\sup_{(x,z)\in(D\times D)\setminus d}\int_{K^c}\frac{G_D(x,y)\,G_D(y,z)}{G_D(x,z)}\,d\mu(y)\leqq\epsilon.$

(ii) $(\forall B\subset K;\ \mu(B)<\delta)$ $\displaystyle\sup_{(x,z)\in(D\times D)\setminus d}\int_{B}\frac{G_D(x,y)\,G_D(y,z)}{G_D(x,z)}\,d\mu(y)\leqq\epsilon.$ （Poinchover, Murata）

このとき time change が I–III を満たす．後半の条件が Feller 性 (II)，前半が tightness(III) に対応．D を限ってないので，前半の条件において無限遠点で小さいことが必要になる分，さっきの場合より制限されている．

このとき $\mu\in S_D^\infty$ に 1:1 に対応する additive functional $A_t^\mu(w)$ がある.（特別な場合として $V dx$ に対応するのが $\int_0^t V(B_s)ds$.）Additive functional とは，$\theta_t w(s)=w(t+s)$ とおくとき $A_{t+s}^\mu(w)=A_t^\mu(w)+A_s^\mu(\theta_t w)$) となるもので，$w$ を止める毎に t について連続で増加なものを言う．1:1 対応は具体的には

$$\lim_{t\downarrow 0}\frac{1}{t}\mathrm{E}_m[\ \int_0^t f(B_s(w))\,dA_s^\mu\ ]=\langle f,\mu\rangle=\int_D f(x)\,d\mu(x).$$

拡張したい理由は μ が Dirac のデルタの場合．A に対応するのは local time $\ell_t(a)$．すると球面の surface measure などが応用例に入る．

以上の準備の下で $\tau_t=\inf\{s>0\mid A_s^\mu>t\}$ とおいて，$Y_t=B_{\tau_t}^D$ とおくと次が成り立つ．

Theorem (Takeda). $\mu\in S_D^\infty$ に対して，$\sup_{x\in D}\mathrm{E}_x[\ \exp(A_{\tau_D}^\mu\ ]<\infty$ と $\lambda(\mu,D)=\inf\{\frac{1}{2}\mathbb{D}(u,u)\mid\int_D u^2d\mu=1\}>1$ は同値. ◇

$\mathrm{E}_x[\ \exp(A_t)f(X_t)\ ] = \int_D p_t^\mu(x,y)f(y)dy$ なので PDE でよく知られているようにこの定理の式はさらに次と同値：

$$G^\mu(x,y) = \int_0^\infty p_t^\mu(x,y)dt < \infty, \quad x \neq y.$$

（すなわち，$\frac{1}{2}\Delta + \mu$ が subcritical ということはブラウン運動が transient ということ.）

例．$d > 2$，$D = \mathbb{R}^d$（$d \leqq 2$ ではブラウン運動はグリーン関数がない！）$\mu = I_K dx$, K: compact. このとき，

$$\lim_{\beta\to\infty} \frac{1}{\beta} \log \mathrm{P}_x[\ \int_0^\infty I_K(B_t)dt > \beta\ ] = -\inf\{\frac{1}{2}\mathbb{D}(u,u) \mid u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d),\ \int_K u^2 dx = 1\}.$$

左辺は life time のようなものの指数評価．これは Kac の公式の別証になっている．Kac はこれを固有関数展開でやって Kac 流のポテンシャル論のきっかけとなったが，その背後の確率論的意味を与える.（元々は Erdös の問題．Capacity がゼロの集合は process が hit しない集合というのが普通の流儀だが，Kac 流は penetration time でやる.）

Kac のもう一つ有名な公式：$V \in C(\mathbb{R}^d)$; $\lim_{x\to\infty} V(x) = \infty$, のとき，

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \mathrm{E}_x[\ \exp(-\int_0^t V(B_s)ds)\ ] = -\inf\{\frac{1}{2}\mathbb{D}(u,u) + \int u^2 V dx \mid \int_{\mathbb{R}^d} u^2 dx = 1\}$$

は Donsker–Varadhan が large deviation をやるきっかけになった．左辺は展開すると最小固有値が出てくるので右辺に至る．それが元の Kac の証明だが，Kac 自らがその（固有値を経由しない）確率論的証明を問題として提出し，Donsker–Varadhan が答えた．こちらの公式の，ここでの解釈は以下のようになる．

$V \geqq 0$, $\mathrm{P}_{V,x} := \exp(-\int_0^t V(B_s)ds)\mathrm{P}_x$ とおくと，この全「確率」は 1 より小さくなるが，それを「領域を飛び出している（寿命が尽きた）」と理解すれば，life time ζ について

$$\mathrm{P}_{V,x}[\ \zeta > t\ ] = \mathrm{E}_x[\ \exp(-\int_0^t V(B_s)ds)\ ].$$

そこで $\mathrm{P}_{V,x}$ が I–III を満たせば，ここの立場で証明したことになるが，$G_1 1(x) \in C_\infty(\mathbb{R}^d)$ なので V への最初の条件が III を保証しているので OK.

こうして Kac の二つの公式を統一的に説明した．前者は K が compact だから life time が有限になり，後者は V が遠方で大きいから爆発する，ということになる．

応用 1．

Branching Brownian motion $\bar{P}_x$, $\bar{B}_t$.

ブラウン運動が分裂する法則（点 x で n 個に分裂する確率 $P_n(x)$）：$\{P_n(x)\}_{n=0}^\infty$; $\sum_{n=0}^\infty P_n(x) = 1$. 以下では $P_0 = P_1 = 0$ とする（必ず増える場合）.

k: 測度，対応する additive functional を A_t^k：$\bar{P}_x\{T > t \mid \sigma(B_t)\} = e^{-A_t^k}$

T: 最初に分裂する時刻.

N_K: Branching Brownian motion が closed set K を hit する個数（各 branch の first hit で止まるとして個数を数える）

$D = \mathbb{R}^d \setminus K$, $Q(x) = \sum_{n=2}^\infty nP_n(x)$, $\mu(dx) = (Q(x)-1)k(dx) \in S_D^\infty$ とおく.

Theorem. $\sup_{x\in D} \mathrm{E}_x[\ N_K\ ] < \infty$ と $\lambda(\mu, D) > 1$ は同値. ◇

注．$\mathrm{E}_x[\ N_K\ ] = \mathrm{E}_x[\ \exp(A_{\tau_D}^\mu);\ \tau_D < \infty\ ]$.

$\lambda(\mu, D) > 1$ は $\sup_{x\in D} \mathrm{E}_x[\ \exp(A_{\tau_D}^\mu)\ ] < \infty$ と同値．この結果の面白いところは後者は D が小さいほど成り立つ単調性があるが，$\mathrm{E}_x[\ N_K\ ]$ は単調とは簡単には言えない点.

明らかな単調性：$\mu_1 \leqq \mu_2$ ならば $\lambda(\mu_1, D) \geqq \lambda(\mu_2, D)$，および，$D_1 \subset D_2$ ならば $\lambda(\mu, D_1) \geqq \lambda(\mu, D_2)$.

結局，K が小さい方が K に hit するまでに時間がかかって分裂効果が効いて N_K が増える，と結果を解釈できるだろう.

この応用は Khasminskii が元々やっていた問題である.

応用 2. $P_t^\mu f(x) = \mathrm{E}_x[\ \exp(A_t^\mu) f(B_t)\ ]$. μ がどれくらい大きいところまで $\|P_t\|_{1,\infty} \leqq ct^{-d/2}$ が成り立つか？

結論：$\mu \in S_{\mathbb{R}^d}^\infty$ ならば $\|P_t^\mu\|_{1,\infty} \leqq ct^{-d/2}$ となることと $\lambda(\mu, \mathbb{R}^d) > 1$ が同値である. $\diamond$