20041213mon14:00-15:30 @ 202　解析セミナー　熊谷　隆氏　（京大　数理研）
「測度付き距離空間上の放物型ハルナック不等式の安定性について」
with Barlow--Bass, and with Barlow--Coulhein
http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kumagai/

1　設定と問題.

1.1　設定.

Weighted graph.

G: infinite connected graph.

「抵抗を bond xy に置く」: 各 $(xy) \in G \times G$ に対して $\mu_{xy} = \mu_{yx} \geqq 0$ を満たす $\{\mu_{xy}\}$ 定数 (conductance) が与えられているとする（幾何では向き付けも行うが，ここでは向きは考えない）. $\mu_{xy} > 0 \Leftrightarrow x \sim y$（graph として xy に bond がある）とする. $\mu_x := \sum_y \mu_{xy}$ とおいて，**controlled weight** $\exists p_0 > 0; (\forall x \sim y)\ \dfrac{\mu_{xy}}{\mu_x} \geqq p_0$ を仮定する（特に各 site から出る bond 数は有界；遠くとはつながっていない）.

一般に $\mu(A) = \sum_{x \in A} \mu_x$ と書くことにする.

Weighted graph（抵抗回路網）$(G, \{\mu_{xy}\})$ に対応する**Dirichlet form**

$$\mathcal{E}(f,f) := \frac{1}{2} \sum_{x,y} (f(x) - f(y))^2 \mu_{xy},\ f:\ G \to \mathbb{R},$$

および，Markov chain $\{X_n\}_{n \geqq 1}$; Prob$[\ X_{n+1} = y \mid X_n = x\ ] = \dfrac{\mu_{xy}}{\mu_x}$.

さらに差分作用素 $\mathcal{L}f(x) := \dfrac{1}{\mu_x} \sum_y (f(y) - f(x))\mu_{xy}$ とも 1:1 に対応する.（たとえば harmonic function: $\mathcal{L}f(x) = 0$, $x \in Ball$, が電気回路のキルヒホフの法則.）

Metric measure space（以下，MMS），MMS with Dirichlet form（以下，MMD）. (M, d, μ) で以下を満たすもの：

M: locally compact connected separable complete metric space; $\overline{Ball(x,y)}$ are compact,

d: geodesic metric（$\exists z = z(x,y);\ d(x,y) = d(x,z) + d(z,y)$），

μ: Borel measure; $0 < \mu(Ball(x,r)) < \infty$, $x \in M$, $r > 0$.

$(\mathcal{E}, \mathcal{F})$: strong local regular Dirichlet form on $L^2(M, \mu)$.（説明はしないが，killing のない局所作用素を与える form ということ.）本当は連続時間でやるが細かいことを略すと，一般論（Fukushima – Oshima –Takeda の本を参照）から，おおざっぱに diffusion (symmetric Hunt process with continuous path) および Δ, a non-negative definite self-adjoint operator on L^2 such that $P_t = e^{\Delta t}$ is Markov and local，が 1:1 に対応.

1.2　問題.

以上の設定で Harnack 不等式がどうなるかを見たい.

$PHI(\beta)$: parabolic Harnack ineq of order β ($\beta > 0$)

一部入れ子になった $M \times \mathbb{R}_+$（M の中の拡散現象）の中の 3 つの円筒

Q: $Ball(x_0, 2R) \times [s, s + 4R^\beta]$

Q_+: $Ball(x_0, R) \times [s + 3R^\beta, s + 4R^\beta]$

Q_-: $B(x_0, R) \times [s + R^\beta, s + 2R^\beta]$

からなる図の OHP において

$\exists c_1 > 0$; $(\forall s, R, x_0)(\forall u_0 :\ Q \to \mathbb{R}_+)$ $\dot{u} = \mathcal{L}u$ on Q, $u(\cdot, 0) = u_0$, の解（parabolic function，本当は form を使った weak sense で定義）に対して，$\sup_{Q_-} u \leqq c_1 \inf_{Q_+} u$ が成り立つことを $PHI(\beta)$ が成立すると言う.

Remark. $\beta \geqq 2$ が導かれる (sub diffusive). $\beta = 2$ が classical case（$M = \mathbb{R}^n$）. ◇

rough isometry (Kanai 1985).

$PHI(\beta)$ の，空間変形に対する安定性を議論したいので導入.

(X_i, d_i, μ_i), $i = 1, 2$: MMS or weighted graph が rough isometric とは：(X_i, d_i) の ball を $Ball_i()$ と書くとき，$\exists \phi$: $X_1 \to X_2$ (rough isometry);

(i) $\exists M > 0$; $X_2 = \bigcup_{x \in X_1} Ball_2(\phi(x), M)$
(ii) $\exists c_1 \geqq 1$, $\exists c_2 > 0$; $c_1^{-1}(d_1(x,y) - c_2) \leqq d_2(\phi(x), \phi(y)) \leqq c_1(d_1(x,y) + c_2)$
(iii) $\exists c_1 > 0$; $\mu_2(B_2(\phi(x), c_1)) \asymp \mu_1(Ball_1(x, c_1))$

が成り立つことを言う.

$\asymp$ は比が上下から non-zero に bound の意味とする.

Rough isometry は equivalence relation.

Connectedness などの local property は保存しない.

考えたい問題：$(X_i, d_i, \mu_i, \mathcal{E}_i)$, $i = 1, 2$: MMD or weighted graph，かつ，$\mathcal{E}_i$ が strong local，の場合に

- $X_1 = X_2$, $d_1 = d_2$, $\mu_1 = \mu_2$ で $c_1 \mathcal{E}_2(f,f) \leqq \mathcal{E}_1(f,f) \leqq c_2 \mathcal{E}_2(f,f)$ のときに，$\mathcal{E}_1$ が $PHI(\beta)$ なら $\mathcal{E}_2$ もそうか？
- 2 つの空間が rough isometric で $\mathcal{E}_2$ が ‘good’ local condition を何か満たせば同様のことが成り立つか？

Q(石毛). Harnack 定数の安定性は何か言えるか？
A. 主定理（同値条件）の定数によってある程度コントロールできるが,
証明が長い連鎖になっているのでので best にはほど遠いだろう.

PHI がなぜ重要か？

たとえば以下が結果として出てくる.

- 楕円型 Harnack(EHI) （u が半径 2R の円内で harmonic な非負関数なら $\sup_{B(x,R)} u \leqq c \inf_{B(x,R)} u$）
- 熱核評価 $HK(\beta)$

$$\frac{c_1}{V(x, t^{1/\beta})} \exp\left(-c_2 \left(\frac{d(x,y)^\beta}{t}\right)^{1/(\beta-1)}\right) \leqq p_t(x,y) \leqq \frac{c_3}{V(x, t^{1/\beta})} \exp\left(-c_4 \left(\frac{d(x,y)^\beta}{t}\right)^{1/(\beta-1)}\right)$$

- Liouville property (positive harmonic function on M is constant)
- Hölder continuity of paraboic functions
- Law of iterated logarithm $\quad \overline{\lim}_{t\to\infty} \dfrac{d(X_t, X_0)}{t^{1/\beta} (\log\log t)^{1-1/\beta}} = c$, P^x–a.e.

PHI の安定性が自明でないことの観察.

Liouville property は rough isometry で安定性を持たない (T.Lyons 1987)

EHI の安定性も未解決

2 歴史.

2.1 'Classical' case ($\beta = 2$).

- Nash (1958) Hölder continuity for parabolic function
- De Giorgi (1957) Hölder continuity for elliptic function (simple proof)
- Moser (1961, 1964, 1971) Harnack inequality (elliptic case, parabolic case, refined proof)
- Aronson (1967) (HK(2))：$\mathcal{L} = \sum_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial y})$ on $\mathbb{R}^n$ （$A = (a_{ij})$ は measureable symmetric）が uniform elliptic （$c\,I \leqq A(x) \leqq c'\,I$) ならば ($HK(2)$) が成り立つ. (HK(2) (heat kernel estimate) については次節参照）
- Krylov–Safanov (1980) Harnack inequality の確率論的証明
- Fabes–Stroock (1986) new proof of Moser's PHI using older idea of Nash ($HK(2)$ 経由)（PHI から Hölder 連続性，同値性が得られることを imply）
- Kusuoka –Stroock (1987)
- Carlen–Kusuoka–Stroock (1987) Nash 不等式と Dirichlet form を用いた関数不等式の同値性
- Li–Yau (1986) smooth non-compact complete manifold with non-negative Ricci curvature の上の Δ の幾何的な流れ
- Davies (1989)
- Grigoryan (1992), Saloff–Coste (1992) (VD) +(PI(2)) ⇔ (PHI(2)) (⇔ (HK(2)))

  ここで，VD (volume doubling): $\mu(B(x, 2R)) \leqq c\mu(B(x, R)), \forall x, R$

  PI (Poincare inequality): $\int_{B_R} (f(x) - \bar{f})^2 d\mu \leqq cR^2 \int_{B_R} d\Gamma(f, f)(x)$

  $d\Gamma$ は $\mathcal{E}_B(f, f) = \int_B d\Gamma(f, f)$ となる measure (energy measure) $d\Gamma(f, f) = |\nabla f|^2 d\mu$

  つまり $\beta = 2$ の場合は PHI は変形に対して安定ということ（なぜなら，VD, PI は安定なことが容易に分かるから）
- Sturm (1995,96)：metric measure space with Dirichlet form
- Demotte (1999): graph case

2.2 一般の $\beta \geqq 2$.

一般の β（典型的にはフラクタル）.

- Kusuoka (1987) a Markov process on Sierpiński gasket ('Brownian motion' on SG)
- Kigami (1989) Kigami Laplacian

SG では $\beta = \log 5/\log 2 > 2$
$V(x, t^{1/\beta}) \asymp t^{d/\beta}$
安定性があれば，SG を rough isometry で変形したもの，さらにその bonds を円筒に置き換えた SG 型多様体，への拡張が可能になる．この点からも，安定性の問題に興味がある. (最終的には percolation cluster 等の上の diffusion をやりたい．$\mathbb{Z}^d$ の incipient infinite cluster 上の diffusion では $\beta > 2$ と予想されている.)

3 主定理 I.

SG 型多様体などのために指数の定義を short time と long time で分けておきたい.

$\exists\beta,\bar{\beta} \geqq 2$; $\Psi(s) = \begin{cases} s^{\bar{\beta}}, & s \leqq 1, \\ s^{\beta}, & s \geqq 1, \end{cases}$ のとき，$PHI(\Psi)$ を $PHI(\beta)$ と同様に定義する.

$PI(\Psi)$: $B = Ball(x_0, R)$, $f \in \mathcal{F}$ に対して $\int_B (f(x) - \bar{f}_B)^2 d\mu \leqq \Psi(r) \int_B d\Gamma(f,f)(x)$

$(HK(\Psi))$: $h_\beta(r,t) := \exp(-(r^\beta/t)^{1/(\beta-1)})$ とおくとき，

$$\frac{c_1}{V(x,t^{1/\bar{\beta}})} h_{\bar{\beta}}(c_2 d(x,y),t) \leqq p_t(x,y) \leqq \frac{c_3}{V(x,t^{1/\bar{\beta}})} h_{\bar{\beta}}(c_4 d(x,y),t),\ t \leqq 1 \vee d(x,y)$$

および

$$\frac{c_1}{V(x,t^{1/\bar{\beta}})} h_{\bar{\beta}}(c_2 d(x,y),t) \leqq p_t(x,y) \leqq \frac{c_3}{V(x,t^{1/\bar{\beta}})} h_{\bar{\beta}}(c_4 d(x,y),t),\ t \geqq 1 \vee d(x,y)$$

例：SG 型多様体なら $\beta = 2$, $\bar{\beta} = \dfrac{\log 5}{\log 2}$

Theorem (Barlow–Bass–Kumagai 2004) $(X_1, d, \mu, \mathcal{E})$: MMD or weighted graph のとき，
$(HK(\Psi) \Leftrightarrow)$ $PHI(\Psi) \Leftrightarrow VD + PI(\Psi) + CS(\Psi)$ （CS はややこしいので説明を後回し） ◇

Remark. (i) $f = 1$, $R = s$ とすると $\int_{B_R} d\Gamma(\phi,\phi) \leqq \dfrac{V(x_0, 2R)}{\Psi(\mathrm{R})}$

(ii) 先行結果 (Grigor'yan − Telcs, graph case 2001,02 , measure metric space in preparation)：
$HK(\Psi) \Leftrightarrow VD + EHI + Res(\Psi) \Leftrightarrow VD + EHI + E(\Psi)$.
ここで，
$Res(\Psi)$: $Resistance(B(x_0,R), B(x_0,2R)^c) \asymp \dfrac{\Psi(R)}{V(x_0,R)}$
$E(\Psi)$: $E^{x_0}[\tau_{B(x_0,r)}] \asymp \Psi(R)$ （τ は exit time）

(iii) VD, PI, CS は安定性を持つので PHI は安定 !! $Res(\Psi)$ も安定だが，$E(\Psi)$ や EHI の安定性は分かっていない. ◇

Classical な場合に比べて CS (cut off Sobolev) がよぶん.

CS: $\exists\theta \in (0,1], \exists c_1, c_2 > 0$; $(\forall x_0 \in M, R > 0)$ $\exists\phi = \phi_{x_0,R}$ (cut-off function) ;

(i) $\phi = \begin{cases} \geqq 1 & \text{on } B(x_0, R/2), \\ = 0 & \text{on } B(x_0,R)^c, \end{cases}$

(ii) $(\forall x,y)$ $|\phi(x) - \phi(y)| \leqq c(d(x,y)/R)^\theta$,

(iii) 重み付き Sobolev 不等式：

$$(0 < \forall s \leqq R)(\forall f \in \mathcal{F}) \quad \int_{B(x_0,s)} f^2 d\Gamma(\phi,\phi) \leqq c(s/R)^{2\theta} \left(\int_{B(x_0,2s)} d\Gamma(f,f) + \Psi(s)^{-1} \int_{B(x_0,2s)} d\mu \right)$$

Remark. $CS(2)$ は常に成立. $\beta > 2$ は線形内挿関数より良い cut -off function が必要. ◇

服部注. この後ひょっとしたら証明の方針等について記録し損ねた内容があるかもしれない. 以下も，長い式は記録し切れていない.

EHI についての証明の概略.

Step I. Moser の議論（L. Saloff-Coste 参照)

$PI(\beta) \to$ Sobolev は OK. 次に，簡単のため，assume $V(x,t) = r^\alpha$ and $d\Gamma(f,f) = |\nabla f|^2 d\mu$.

u を B 上の harmonic function とし $v = u^p$ とおく. $B_2 \subset B_1$ に対する ϕ をとる. Sobolev と PI の逆で変形して評価式 $\int_{B_2} \cdots$ を作っておく.

半径を $2R$ から R に縮める列 I_k をとって，Moser iteration を行う.

$\sup_B u(y) \leqq CR^{\beta-2}(\int u^{2p})^{1/2p} = CR^{\beta-2}\Phi(2p,B)$

Step II. $\Phi(2p,B) \leqq c\Phi(-2p,B)$ (John-Nirenberg inequality, 一般化は Bombieri – Giusti) (Step I を u^{-1} についても用意しておけばよい)

4　主定理 II．

$\beta = 2$ では以上でよいが，それ以外は $\beta - 2$ が残るので評価が悪い．Linear cut off は（というより Lipschitz 関数が）classical では best estimate を出すが $\beta > 2$ ではそうはいかない．それで $CS(\beta)$ が必要．

Theorem 2 (Barlow–Bass–Kumagai 2004) X_i, $i = 1, 2$ が rough isometric で，X_2: $PI(\bar{\beta}_2)_{loc} + CS(\bar{\beta}_2)_{loc}$ とする．

このとき X_1: $PHI(\Psi_1)$ ならば X_2: $PHI(\Psi_2)$. ◇

Remark. X_2 へのよぶんの仮定は，rough isometry が local は見ないので local について何か仮定せざるを得ない，という事情．ただし，ここまで強い仮定が必要かは疑問. ◇

```
Q(会田)．X_2 への仮定の意味は？
A．たとえば disconnected だと安定性はありえない．何らかの local な情報が必要.
Q(会田)．十分条件ということ？
A．yes.
Q(小谷)．global なことを見るだけならいらない？
A．そこはよく分かっていない．global だけみればいいかどうかは
classical な場合でも分かっていない．Principle はそうだが,
現在の method では local な情報を使っている.
Q(竹田)．Cut off function を具体的にはどうやって構成するのか？
A．(PHI) があればグリーン関数を使って作れる.
Q(塩谷)．local な仮定はどこで使う？
A．M を標準的なものに写してそこで証明するが，そのときに使う.
X_2 PI  + X_1 PHI(\beta) → X_2 PHI(\beta) くらいが言えてもいいと思うが
全く分かっていない.
```

実際には CS は確認しづらい（いい cut off fcn が必要）．そこで,

Theorem 3 (Barlow–Coulhon–Kumagai 2004) $VG(\beta)$: $\exists\alpha < \beta$; $(\forall x \in \Gamma)(\forall r \geqq s \geqq 1)$ $V(x,r) \leqq C(r/s)^\alpha V(x,s)$ を仮定すれば $RE(\beta)$ と $HK(\beta)$ が同値．ここで，$RE(\beta)$ は

$$(\forall x, y \in \Gamma)\ c_1 \frac{d(x,y)^\beta}{\mu(B(x,d(x,y)))} \leqq R(x,y) \leqq c_2 \frac{d(x,y)^\beta}{\mu(B(x,d(x,y)))}.$$

◇

Remark. (i) VG は point recurrent を意味するので $\mathbb{R}^d$ なら $d = 1$ の状況だが，フラクタル等に応用がある.

(ii) tree なら $VG + HK$ と $\mu(B(x,d(x,y)) \asymp d(x,y)^{\beta-1}$ が同値.

(iii) $VD + PI + RES$ と PHI が同値と期待されているが，一カ所難しいところがある.（確認しづらい CS を回避したいという意味.） ◇

```
Q(土田)．recurrence はどこで？
A．そもそも R(x,y) が意味をなくす．non-recurrent ならば registance の代わりに
capacity を使いたいが，これだと H\"older continuity に近い力を持つ
|f(x)-f(y)|^2 \le R(x,y) {\cal E}(f,f) が出せない.
```