2007.11.16–19,12.04 服部 哲弥

# ランダム・ウォークとくりこみ群
# 正誤表

行数の**マイナス記号は下から数えた行数**の意味です．

| ・ | 頁 | 行 | 誤 | 正 | ・ |
|---|---|---|---|---|---|
| ・ | 3 | 16 | 折れ曲がりうるのが | 折れ曲がりうるが | ・ |
| ・ | 4 | 7 | 大きなスケール | 種々のスケール | ・ |
| ・ | 5 | 15 | 実現である | 数学的実現である | ・ |
| ・ | 27 | 8 | 左辺で | (1.18) で $M \to \infty$ とした式の左辺で, | ・ |
| ・ | 49 | $-10$ | 実数の集合 | 実数の集合 $\mathbb{R}$ や無限長 path の集合 $\Omega$ | ・ |
| ・ | 94 | $-3$ | $d-4$ **【$k$ の指数の min の中】** | $n-4$ | ・ |
| ・ | 137 | $-11$ | によって定まる． | によって定まる．また，同じ $C$ を用いて $\displaystyle\sup_{n\geqq 1}\int_{\mathbb{R}_+} e^{C\xi}\tilde{\mathrm{P}}_n[\,d\xi\,] < \infty$ も成り立つ． | ・ |
| ・ | 149 | 1 | マルコフ性に類似の性質がある． | マルコフ性（独立増分性）がある． | ・ |
| ・ | 149 | 5 | 重複対数の法則…書いておく． | **【トル】** | ・ |
| ・ | 149 | 7 | **【151 頁 −5 行まで，命題 5.15，注，証明】** | **【全面入替（別項）】** | ・ |
| ・ | 150 | 2 | **【行末ピリオド】** | **【トル】** | ・ |
| ・ | 150 | 3 | $b_n(\tilde{w}_1)$ | $b_n(\tilde{w})$ | ・ |
| ・ | 150 | 4 | **【行末ピリオド】** | **【トル】** | ・ |
| ・ | 155 | 12 | **【157 頁 7 行まで，下からの評価の証明】** | **【全面入替（別項）】** | ・ |
| ・ | 197 | $-6$ | $s^{\nu}$ **【数式の右辺】** | $s\nu$ | ・ |
| ・ | 199 | 図 6.15 | $\gamma$ **【キャプション中，2 カ所とも】** | $\nu$ | ・ |
| ・ | 245 | 6 | 最小値をとる | 最小値をとる． | ・ |
| ・ | 277 | $-8$ | 得る． | 得る．$G_n$ についても一様に同様の評価があるので $\displaystyle\sup_{n\geqq 1}\int_{\mathbb{R}} e^{C\xi}\tilde{\mathrm{P}}_n[\,d\xi\,] < \infty$ も成り立つ． | ・ |
| ・ | 282 | $-4$ | **【「定理 5.11 の証明を行う．」の直後】** | **【§C の概要を追加挿入（別項）】** | ・ |
| ・ | 286 | $-4$ | **【和の記号下部条件式 2 行目冒頭の縦棒線】** | **【トル】** | ・ |
| ・ | 321 | 19 | 非可算無限集合では | 非可算無限集合では (F.1) で議論したように | ・ |
| ・ | 321 | 19 | 役に立たない（(F.1) 参照）． | 役に立たない． | ・ |
| ・ | 325 | 16 | $C \in \Omega$ | $C \subset \Omega$ | ・ |
| ・ | 332 | 12 | **【「他方，」から 333 頁 −1 行まで】** | **【意味ある記述で正しいが，155–157 頁入替後は不要】** | ・ |
| ・ | 334 | 5 | §5.4.2 では…紹介する． | **【トル】** | ・ |
| ・ | 334 | $-9$ | **【「定理 F.10 は」から 335 頁 −4 行まで】** | **【正しい定理だが，155–157 頁入替後は不要】** | ・ |
| ・ | 335 | 8 | $\mathrm{P}[\,A_{k+1}\,]^c$ **【等号の右辺の和の中の分母】** | $\mathrm{P}[\,{A_{k+1}}^c\,]$ | ・ |
| ・ | 338 | 4 | $t$ **【右辺被積分関数分母】** | $\xi$ | ・ |
| ・ | 341 | 2 | **【冒頭】** | **【更新情報用 URL の追加（別項）】** | ・ |
| ・ | 346 | 12 | preprint (2003) **【文献 [22] の出典更新】** | Journal of Mathematical Science University of Tokyo **12** (2005) 417–443 | ・ |
| ・ | 347 | $-8$ | , to appear **【文献 [37] の出典更新】** | **32** (2004) 989–995 | ・ |
| ・ | 347 | $-5$ | **【文献 [39] の出典更新】** | **【（別項）】** | ・ |
| ・ | 347 | $-2$ | **【文献 [40] の出典更新】** | Probability Surveys **2** (2005) 145–190 | ・ |
| ・ | 347 | 最後 | **【最後】** | **【2004 年以降の論文の追記（別項）】** | ・ |

## 命題 5.15 とその証明（149 頁 7 行から 151 頁 $-5$ 行まで）の改訂版

**命題 5.15**　(5.55) の到達時刻 $T_n$ について，$T_{n+1}-T_n,\ n=0,1,2,\cdots,$ は独立である（歩数はスケール方向に（定常一様ではないが）ランダムウォークである）．すなわち，任意の自然数 $N$ と任意の非負整数列 $\ell_n,\ n=0,1,\cdots,N-1,$ に対して

$$\mathrm{P}[\,T_N-T_{N-1}\leqq \ell_{N-1},\ \cdots,\ T_1-T_0\leqq \ell_0\,]=\prod_{n=0}^{N-1}\mathrm{P}[\,T_{n+1}-T_n\leqq \ell_n\,].$$

◇

**証明**　系 5.13 と (5.18)，および系 5.5 を順次用いると，$m<n$ のとき $T_m<T_{m+1}\leqq T_n$ に注意して

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}[\,T_{m+1}-T_m\leqq c, T_{n+1}-T_n\leqq d\,]=\sum_{\substack{w\in\tilde{\Omega}_{n+1};\\ T_{m+1,1}(w)-T_{m,1}\leqq c, L(w)-T_{n,1}(w)\leqq d}} b_{n+1}(w){x_c}^{L(w)-1}\\
&=\sum_{w'\in\tilde{\Omega}_1} b_1(w'){x_c}^{L(w')-1}\\
&\quad\times\sum_{\substack{\tilde{w}_1\in\tilde{\Omega}_n;\\ T_{m+1,1}(\tilde{w}_1)-T_{m,1}(\tilde{w}_1)\leqq c}} b_n(\tilde{w}_1){x_c}^{L(\tilde{w}_1)-1}\sum_{\substack{\tilde{w}_2,\cdots,\tilde{w}_{L(w')}\in\tilde{\Omega}_n;\\ L(\tilde{w}_2)+\cdots+L(\tilde{w}_{L(w')})\leqq d}}\prod_{j=2}^{L(w')} b_n(\tilde{w}_j){x_c}^{L(\tilde{w}_j)-1}\\
&=\sum_{\substack{\tilde{w}\in\tilde{\Omega}_n;\\ T_{m+1,1}(\tilde{w})-T_{m,1}(\tilde{w})\leqq c}} b_n(\tilde{w}){x_c}^{L(\tilde{w})-1}\\
&\quad\times\sum_{w'\in\tilde{\Omega}_1} b_1(w'){x_c}^{L(w')-1}\sum_{\substack{\tilde{w}_2,\cdots,\tilde{w}_{L(w')}\in\tilde{\Omega}_n;\\ L(\tilde{w}_2)+\cdots+L(\tilde{w}_{L(w')})\leqq d}}\prod_{j=2}^{L(w')} b_n(\tilde{w}_j){x_c}^{L(\tilde{w}_j)-1}\\
&=\mathrm{P}[\,T_{m+1}-T_m\leqq c\,]\mathrm{P}[\,T_{n+1}-T_n\leqq d\,].
\end{aligned}$$

最後のほうの変形で，$w'\in\tilde{\Omega}_1$ の歩数は 2 歩以上あるので，path の断片からくる因子は一つ以上存在すること，および，その因子は $w'\in\tilde{\Omega}_1$ によらないことから，因子を一つ $w'$ に関する和の前にくくりだした．3 個以上の変数の結合分布については以上の議論を繰り返せば 1 つの変数ごとの積に分解できることは明らかである．□

## 一般化された重複対数の下からの評価の証明（155 頁 12 行から 157 頁 7 行まで）の改訂版

一般化された重複対数の法則の下からの評価を証明する．これまでのくりこみ群分析から次の 3 つが分かっている．

**Scale 方向の独立増分性：**　改訂後の命題 5.15 から，$T_{n+1}-T_n,\ n=0,1,2,\cdots,$ は独立である．

**長時間評価：**　定理 5.9(i) から，$D>0$ と $M>0$ が存在して

$$(\forall n\geqq 1)(\forall t\geqq 0)\ \ \mathrm{P}[\,T_n\geqq t\,]\leqq Me^{-D\lambda^{-n}t}. \tag{1}$$

**短時間評価：**　定理 5.9(ii) と系 5.14 から，$C,C'>0$ が存在して，任意の $x>0$ に対して，$\alpha_n=x\,(\log n)^{-(1-\nu)/\nu}$, $n=2,3,4,\cdots,$ とおくとき

$$-C\leqq\varliminf_{n\to\infty}{\alpha_n}^{\nu/(1-\nu)}\log\mathrm{P}[\,T_n\leqq\lambda^n\alpha_n\,]\leqq\varlimsup_{n\to\infty}{\alpha_n}^{\nu/(1-\nu)}\log\mathrm{P}[\,T_n\leqq\lambda^n\alpha_n\,]\leqq -C'.$$

これから特に，$C_0>C$ なる任意の $C_0$ を選んで固定すると，

$$(\forall x>0)\ \exists n_0;\ (\forall n\geqq n_0)\quad \mathrm{P}[\,T_n\leqq x\lambda^n(\log n)^{-(1-\nu)/\nu}\,]\geqq n^{-C_0\,x^{-\nu/(1-\nu)}}. \tag{2}$$

一般化した重複対数の法則の下からの評価を言うには，命題 5.18 から，(5.60) を証明すればよい．

以下 $t_n=2C_0^{(1-\nu)/\nu}\lambda^n(\log n)^{-(1-\nu)/\nu}$ とおく．命題 5.18 から，$T_n\leqq t_n$ が無限個の $n$ に対して成り立てば，($C_0>C$ が任意であることから）$c^{-\nu}=2^{-\nu}C^{-(1-\nu)}$ で一般化した重複対数の法則の下からの評価を得る．これを言うために，(通

常のランダムウォークの重複対数の法則の証明でも用いられるが）$n$ の部分列 $m_n$, $n=1,2,\cdots,$ をうまく選んで，その中で無限個の $m_n$ について $T_{m_n}\leqq t_{m_n}$ を示す．次のように選ぶ：

$$m_n=\left[\frac{1}{\log\lambda}(1+2\frac{1-\nu}{\nu})\,(n+1)\log\log(n+1)+(\eta+1)n\right].$$

ここで $[\cdot]$ はガウスの記号で $\eta=\dfrac{1}{\log\lambda}\log\dfrac{2}{DC_0^{(1-\nu)/\nu}}$.

**補題 1** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{P}[\,T_{m_{n-1}}>\frac12 t_{m_n}\,]<\infty.$ ◇

**証明．** (1) から機械的計算によって得る．

実際，(1) から

$$\mathrm{P}[\,T_{m_{n-1}}>\frac12 t_{m_n}\,]\leqq Me^{-D\lambda^{-m_{n-1}}t_{m_n}/2},\quad n\in\mathbb{N},$$

だが，

$$D\lambda^{-m_{n-1}}t_{m_n}/2=DC_0^{(1-\nu)/\nu}\lambda^{m_n-m_{n-1}}(\log m_n)^{-(1-\nu)/\nu}$$

において，

$$\begin{aligned}&m_n-m_{n-1}\\&\geqq\frac{1}{\log\lambda}(1+2\frac{1-\nu}{\nu})\,(n+1)\log\log(n+1)+(\eta+1)n\\&\quad-\left(\frac{1}{\log\lambda}(1+2\frac{1-\nu}{\nu})\,n\log\log n+(\eta+1)(n-1)+1\right)\\&\geqq\frac{1}{\log\lambda}(1+2\frac{1-\nu}{\nu})\,\log\log n+\eta.\end{aligned}$$

よって

$$D\lambda^{-m_{n-1}}t_{m_n}/2=DC_0^{(1-\nu)/\nu}\lambda^{m_n-m_{n-1}}(\log m_n)^{-(1-\nu)/\nu}\geqq 2\log n\left(\frac{(\log n)^2}{\log m_n}\right)^{(1-\nu)/\nu}$$

だが，$m_n=O(n\log\log n)$ なので，十分大きい $n$ に対して，$D\lambda^{-m_{n-1}}t_{m_n}/2\geqq 2\log n$ となるから

$$\mathrm{P}[\,T_{m_{n-1}}>\frac12 t_{m_n}\,]\leqq Me^{-2\log n}=\frac{M}{n^2}$$

なのでその和は収束する． □

**補題 2** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{P}[\,T_{m_n}-T_{m_{n-1}}\leqq\frac12 t_{m_n}\,]=\infty.$ ◇

**証明．** (2) から機械的計算によって $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{P}[\,T_{m_n}-T_{m_{n-1}}\leqq\frac12 t_{m_n}\,]=\infty$ を得る．

実際 (2) で $x=C_0^{(1-\nu)/\nu}$ とおくと，

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{P}[\,T_{m_n}-T_{m_{n-1}}\leqq\frac12 t_{m_n}\,]\geqq\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{P}[\,T_{m_n}\leqq\frac12 t_{m_n}\,]\geqq\sum_{n=n_0}^{\infty}m_n^{-1}\\&\geqq\frac{1}{\eta+2+\frac{1}{\log\lambda}(1+2\frac{1-\nu}{\nu})}\sum_{n'=n_0+1}^{\infty}\frac{1}{n'\log\log n'}\geqq\sum_{n'=n_0+1}^{\infty}\frac{const.}{n'\log n'}=\infty.\end{aligned}$$

□

評価したい量は

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}[\,\bigcup_{\ell=k}^{L}\{T_{m_\ell}\leqq t_{m_\ell}\}\,]\geqq\mathrm{P}[\,\bigcup_{\ell=k}^{L}\{T_{m_\ell}-T_{m_{\ell-1}}\leqq\frac12 t_{m_\ell},\ T_{m_{\ell-1}}\leqq\frac12 t_{m_\ell}\}\,]\\&=1-\mathrm{P}[\,\bigcap_{\ell=k}^{L}(\{T_{m_\ell}-T_{m_{\ell-1}}>\frac12 t_{m_\ell}\}\cup\{T_{m_{\ell-1}}>\frac12 t_{m_\ell}\})\,]\\&\geqq 1-\mathrm{P}[\,\bigcap_{\ell=k}^{L}\{T_{m_\ell}-T_{m_{\ell-1}}>\frac12 t_{m_\ell}\}\,]-\sum_{\ell=k}^{L}\mathrm{P}[\,\{T_{m_{\ell-1}}>\frac12 t_{m_\ell}\}\,]\end{aligned}$$

であった．この右辺に $T_{n+1}-T_n$ の独立性を用いると，

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}[\ \bigcup_{\ell=k}^{L}\{T_{m_\ell}\leqq t_{m_\ell}\}\ ]\geqq 1-\prod_{\ell=k}^{L}\mathrm{P}[\ \{T_{m_\ell}-T_{m_{\ell-1}}>\frac{1}{2}t_{m_\ell}\}\ ]-\sum_{\ell=k}^{\infty}\mathrm{P}[\ \{T_{m_{\ell-1}}>\frac{1}{2}t_{m_\ell}\}\ ]\\
&=1-\prod_{\ell=k}^{L}(1-\mathrm{P}[\ \{T_{m_\ell}-T_{m_{\ell-1}}\leqq\frac{1}{2}t_{m_\ell}\}\ ]-\sum_{\ell=k}^{\infty}\mathrm{P}[\ \{T_{m_{\ell-1}}>\frac{1}{2}t_{m_\ell}\}\ ]\\
&\geqq 1-\exp(-\sum_{\ell=k}^{L}\mathrm{P}[\ \{T_{m_\ell}-T_{m_{\ell-1}}\leqq\frac{1}{2}t_{m_\ell}\}\ ])-\sum_{\ell=k}^{\infty}\mathrm{P}[\ \{T_{m_{\ell-1}}>\frac{1}{2}t_{m_\ell}\}\ ]
\end{aligned}$$

を得るが，右辺第 2 項は補題 2 から $L\to\infty$ のとき 0 に収束し，第 3 項は補題 1 から $k\to\infty$ のとき 0 に収束するので，

$$\mathrm{P}[\ \bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{\ell=k}^{\infty}\{T_{m_\ell}\leqq t_{m_\ell}\}\ ]=\lim_{k\to\infty}\lim_{L\to\infty}\mathrm{P}[\ \bigcup_{\ell=k}^{L}\{T_{m_\ell}\leqq t_{m_\ell}\}\ ]=1.$$

$C_0>C$ は任意だったことを思い出すと，一般化された重複対数の法則の下からの評価

$$\varlimsup_{k\to\infty}\frac{|W_k|}{\psi(k)}\geqq C^{\nu-1},\ a.e.,$$

を得る．

## §C の概要（282 頁 $-4$ 行）

この節で定理 5.11 の証明を行う．証明は大きく二つの部分に分けられる．

**第 1 段階（補題 C.1，スケール $n$ に関する整合性）．** $m>n$ のとき，$2^nG_n\setminus\{0\}$ の点に初めて達するまでの通り方を指定した $2^m\tilde{\Omega}_m\cup 2^m\tilde{\Omega}_m^r$ の path の集合の確率が $m$ によらないことを言う．ここでの $n$ と $m$ の対応が decimation の粗い path と細かい構造を加えた path の対応**ではなく**，$2^mG_m$ まで届く path とその最初の数歩，初めて $2^nG_n$ に届くまでの path，との対応である点で非自明かつ証明全体の中の本質をしめる．

**第 2 段階（定理 5.11 の証明，歩数 $k$ に関する整合性）．** 最初の $k$ 歩を決めた path 集合の確率が $k+1$ 歩まで決めた path 集合の確率のしかるべき和に等しいことを言う．確率連鎖の構成とは $k$ 歩目の位置を表す確率変数 $W_k$ が全ての $k$ について同時に存在することの証明だから，$k$ に関する整合性が必要になる．この第 2 段階は標準的な拡張定理の整合性条件であって，第 1 段階があれば機械的にできる．

## 更新情報用 URL（341 頁 2 行）

本書に関する情報や訂正は web page で随時更新している．URL は
`http://www.math.tohoku.ac.jp/~hattori/kyoritu.htm` .

## 文献 [39]（347 頁 $-5$ 行から $-3$ 行）

W. Werner, *Random planar curves and Schramm-Loewner evolutions,* in J. Picard (ed.), *Lectures on probability theory and statistics, Lectures from the 32nd Probability Summer School held in Saint-Flour, July 7–24, 2002,* Lecture Notes in Mathematics **1840** (2004) 107–195, Springer.

## 2004 年以降の論文（347 頁最後）

[41] T. Hattori, *The fixed point of a generalization of the renormalization group maps for self-avoiding paths on gaskets,* Journal of Statistical Physics **127** (2007) 609–627.
[42] M. Denker, K. Hattori, *Recurrence of self-repelling and self-attracting walks on the pre-Sierpiński gasket and $\mathbb{Z}$,* preprint (2007).