台有界連続関数のフーリエ変換で L^1 でないものはあるか？

服部哲弥

20000606–10;13;17–19;0713;15;19;20;

1 問題と結果．

実数上の台有界な連続関数は可積分関数のフーリエ変換で一様位相で近似できる，ということはルベーグ積分の初学者向け教科書等に広く書かれている（例えば [伊藤清, §2.6][1]，あるいは [伊藤清三, §29 定理 29.4 系 2]）．しかし，台有界な連続関数が必ず可積分関数 (L^1 関数) のフーリエ変換で表せるかどうかについては記述がない．つまり，(一様位相で)$f \in \overline{\mathcal{F}L^1}$ は教科書に証明されているが， $f \notin \mathcal{F}L^1$ なる例があるかどうかは触れていない．

ところで，台有界な連続関数 $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ に対してはフーリエ変換の普通の話から，f の L^2 の意味でのフーリエ変換 $\hat{f}$ は各点で

$$\hat{f}(t) = \int_{\mathbf{R}} f(x) e^{\sqrt{-1}xt} dx$$

と書ける [伊藤清三, 定理 12.9 補題 2][2]．ここでもしさらに $\hat{f} \in L^1$ ならば，再び同じ理由で，その L^2 の意味でのフーリエ逆変換は f であって，かつ，各点でも

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \hat{f}(t) e^{-\sqrt{-1}xt} dt$$

と書ける．つまり， f は L^1 関数（$2\pi \hat{f}(-t)$）のフーリエ変換で表せる．

そこで次の問題を考える．

> 問１：台有界な連続関数 $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ であって，そのフーリエ変換 $\hat{f}(t) = \int_{\mathbf{R}} e^{\sqrt{-1}xt} f(x)\, dx$ が L^1 に入らない（可積分でない）ものはあるか？

この問が否定されれば，上の考察より，実数上の台有界な連続関数は可積分関数のフーリエ変換で表せるから，最初に引用した，標準的な教科書の記述「一様位相で近似できる」は「真実」より弱いことが分かる．

> 主結論：検討した結果，問１は肯定された．即ち，実例があった (§4.2)．

得られた実例は，Banach–Steinhaus の一様有界性定理を用いて作るが，かなり具体的なものだと思われる．

実は，§E に示すように，

> 問１の性質を持つ関数は可積分関数のフーリエ変換では表せない

ということを [岡田さん (2)] に教わった．主結果の関数は問１の性質を持つ実例である．こうして，冒頭に引用した教科書の記述は「真実」であること，即ち，台有界な連続関数は（必ず可積分関数のフーリエ変換で近似できるけれども）可積分関数のフーリエ変換で表せない実例があること，が分かった．

本文書は，以上の解答に至った経緯の個人的な記録である．

主結果だけに興味がある場合は §4.2 だけ読めばよい．

---

[1] この文献は，[千代延さん] に「特性関数の収束から確率測度の収束を言う方法」を質問した際に教わった．この問の解法の中核が,「台有界な連続関数が可積分関数のフーリエ変換で一様近似できる」ことである．

[2] 教科書では「 $f, \hat{f} \in L^1$ ならば OK」となっているが，そこで引用している定理を使うためには有界連続性も必要だと思う.（教科書はそのあと $\mathcal{S}$ でしか使わないので問題が起きない.）今は f が有界連続なので OK．結果として $\hat{f}$ は連続で可積分だから有界連続なので，以下も OK.

なお， [猪狩惺, §8.3, 定理 8.12] には有界連続性なしに $f, \hat{f} \in L^1$ ならば殆どいたるところ OK と証明されている．そのこころは，[伊藤清三, 定理 12.9 補題 2] と同様に軟化作用素を消す極限を L^1 の意味で証明した後で，このことから概収束部分列がとれるので，その部分列に沿って極限を取り直せば殆どいたるところ OK が分かるということ．

謝辞.

以下の大勢の方々をお騒がせし，お世話になりました．石毛和弘様，岡田靖則様，長田博文様，落合啓之様，高橋陽一郎様，千代延大造様，中西敏浩様，名和範人様，原隆様，松本耕二様.（ひょっとして漏れていたらたいへん申し訳ありません.）

改めて，皆を巻き込んでかってに騒いだなあ，という印象です．せめておもしろおかしく読んでいただけたならば望外の幸せです.

2　見当を付ける.

フーリエ変換の可積分性が壊れる（つまり遠方の decay が悪い）のだから,「不確定性原理」により f の局所的な性質（解析性）が悪い．そこで簡単で極端な例として，連続性の仮定をいったんわざと破って，$f = \chi_{[0,1]}$，即ち閉区間 $[0,1]$ で 1，それ以外で 0，となる関数を選んでみると，直ちに

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{t}(e^{\sqrt{-1}t} - 1)$$

となって，遠方で $O(|t|^{-1})$ だから，たしかに L^1 に入らない.

そこでなるべく解析性の悪いまま連続関数にすべく，$f(x) = (1 - |x|) \vee 0$，即ち，$[-1,1]$ の外側では 0, $[-1,1]$ では $1 - |x|$，という関数を取ってみる．すると，これも直ちに計算できて

$$\hat{f}(t) = \frac{2}{t^2}(1 - \cos t)$$

となる．微分不可能，という程度では解析性が「良過ぎ」て，余裕でに L^1 に入ってしまう.

折れ点から線形の「立ち上がり」(1 次 Hölder 連続）では，フーリエ変換は $O(|t|^{-2})$ の decay だから,「立ち上がり」が $O(|x|^a)$ $(1 > a > 0)$ ならば，フーリエ変換は恐らく $O(|t|^{-1-a})$ の decay だろう．つまり，

予想：非解析的な点が 1 個（有限個）で，そこでの f の振る舞いが $f(x) - f(x_0) = O(|x - x_0|^a)$ ならばフーリエ変換 $\hat{f}$ の遠方での decay は $\hat{f}(t) = O(|t|^{-a-1})$ だろう.

もしこれが本当ならば，どんな小さな $\epsilon > 0$ に対しても $O(|x|^\epsilon)$ $(x \to 0)$ よりきつい「立ち上がり」を持つ（Hölder 連続でない !?）関数を試さないとフーリエ変換が L^1 に入らない例は作れないだろう．例えば,

一つの可能性：

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\log \frac{2}{1-|x|}}, & -1 < x < 1, \\ 0, & |x| \geq 1, \end{cases}$$

など（あるはもっと「立ち上がり」のきつい例）を考えねばなるまい．ここではとりあえずこの可能性は open problem とし[3]，人に suggest された他の可能性をやる.

他の可能性とは，非解析的な点が非常に多い場合，例えばいたるところ微分不可能な関数である.

3　Weierstrass 関数.

3.1　フーリエ変換.

名和さんと松本さんから「高木関数はどうだ？」と suggestion を頂いた.

[猪狩惺, §4.1][4] で確認すると，高木関数はフーリエ変換をあからさまに計算しにくそうである，と，一瞬思ったが，三角形を並べたグラフのフーリエ変換だから，たいしたことはない.

---

[3] 知らない分野であまり一人でがんばりすぎると，知っている人に「そんなの自明だよ」とか「それは良く知られているよ」って言われるとがっくりくるから.

[4] この文献は，[名和さん] に教わって石毛さんにお借りした.

もっとも，高木関数の横に紹介されていた Weierstrass 関数のほうがパラメータを選ぶことで Hölder 連続性を悪くできるような気がするのと，どちらでも議論の進み方が似そうな気がするので，高木関数はここでは省略して Weierstrass 関数を試すことにした．

$0 < a < 1$, b が 2 以上の整数のとき，Weierstrass 関数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos 2\pi b^n x,$$

は周期 1 の連続関数で，特に $ba \geq 1$ ならば，至る所微分不可能なことが知られている，らしい [猪狩惺, §4.1][5]．この関数を $[0,1]$ に制限し，外側は 0 として，かつ $x = 0, 1$ で連続になるように線形変換を行って，

$$f(x) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a^n (1 - \cos 2\pi b^n x), & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{otherwise}, \end{cases}$$

とする ($0 < a < 1$, b は 2 以上の整数)．

この関数は台有界な連続関数 f である．右辺は一様絶対収束級数なので項別積分ができるからフーリエ変換は

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \sum_{n=1}^{\infty} a^n \frac{g(2\pi b^n; t)}{t(t^2 - (2\pi b^n)^2)}$$

となる．ここで

$$g(c; t) = 2\sqrt{-1}t(t^2 - c^2) \int_0^1 e^{\sqrt{-1}xt} (1 - \cos 2\pi b^n x)\, dx$$

は Mathematica を用いると

$$g(c; t) = -2c^2 + 2c^2 e^{\sqrt{-1}t} - 2t^2 e^{\sqrt{-1}t} + cte^{\sqrt{-1}(t-c)} - cte^{\sqrt{-1}(t+c)} + t^2 e^{\sqrt{-1}(t-c)} + t^2 e^{\sqrt{-1}(t+c)}$$

となるが， b が整数なので $c = 2\pi b^n$ として使うには $c/(2\pi)$ が整数としてよく，その場合にはさらに[6]，

$$g(c; t) = 2c^2 (e^{\sqrt{-1}t} - 1)$$

となるので，

$$\hat{f}(t) = \frac{4\pi^2 (e^{\sqrt{-1}t} - 1)}{\sqrt{-1}t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(ab^2)^n}{t^2 - (2\pi b^n)^2}$$

を得る．

注．

(i) $\hat{f}(t)$ の右辺の級数の各項毎には，遠方で $O(|t|^{-3})$ なので L^1 になる．これはこれまでの観察と矛盾しない．

(ii) 一見 $t = 0$, $\pm 2\pi b^n$, に pole があるように見えるが，分子の $e^{\sqrt{-1}t} - 1$ が整数の 2π 倍のところが零点なので，$\hat{f}$ の右辺の各項は t の整関数である．しかも，項別微分した級数も広義一様絶対収束しているから（しているよね？），$\hat{f}$ も整関数．

そこで質問に戻る．「Weierstrass 関数」の場合， $\hat{f} \notin L^1$ か？

---

[5] 同書では a^{-n} となっているが， a のところは正べきでないと収束しない．a^n の誤植らしい．§C の注釈も参照．

[6] Mathematica 3.0.1.1x では`n /: IntegerQ[n]=True; Sin[2*Pi*n]` としても `Sin[2n π]` しか帰ってこないので，この部分の変形は手作業になってしまう．何か手があるだろうか？

3.2 評価を試みる．

[公式集 2, §12 有理関数の級数] で探す限り，$\hat{f}$ の級数に近いものは

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 - n^2} = \frac{\pi}{2x} \cot \pi x - \frac{1}{2x^2}$$

であるが，これを利用するのは難しそうである．

あとは強引にやってみる．

> 結論：「Weierstrass 関数」の場合 $\hat{f} \in L^1$ である．即ち最初の問を肯定する実例とはならない．

証明． $|\hat{f}|(-t) = |\hat{f}|(t)$ なので，$t \geq 0$ だけを考えれば十分．さらに，$\hat{f}$ は連続関数なので有限区間の積分は有限．よって，$t > \dfrac{4\pi b^2}{b+1}$ だけを考えれば十分．$t > \dfrac{4\pi b^2}{b+1}$ で $\hat{f}$ を次のように分解する：

$$\hat{f} = 4\pi^2 (g_1 + g_2 + g_3).$$

ここで，$g_i : \left(\dfrac{4\pi b^2}{b+1}, \infty\right) \to \mathbf{R}$, $i = 1, 2, 3,$ は以下で定義する．まず，

$$\left(\frac{4\pi b^2}{b+1}, \infty\right) = \bigcup_{N=2}^{\infty} I_N; \quad I_N = \left(\frac{4\pi b^N}{b+1}, \frac{4\pi b^{N+1}}{b+1}\right],$$

と分解し，各 $N = 2, 3, 4, \cdots,$ に対して $t \in I_N$ で

$$g_1(t) = \frac{e^{\sqrt{-1}t} - 1}{\sqrt{-1}t} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{(ab^2)^n}{t^2 - (2\pi b^n)^2},$$
$$g_2(t) = \frac{e^{\sqrt{-1}t} - 1}{\sqrt{-1}t} \sum_{n=1}^{N-1} \frac{(ab^2)^n}{t^2 - (2\pi b^n)^2},$$
$$g_3(t) = \frac{e^{\sqrt{-1}t} - 1}{\sqrt{-1}t} \frac{(ab^2)^N}{t^2 - (2\pi b^N)^2},$$

とおく．このとき $g_i \in L_1$, $i = 1, 2, 3,$ となることは §C のようにあからさまに計算すれば得られるので $\hat{f} \in L^1$ を得る． □

というわけで，Weierstrass 関数以外の例を探すか，最初の問を否定的に証明しないといけなくなった．

4 P. du Bois Reymond の定理は関係あるか？

4.1 フーリエ級数におけるアナロジー．

[落合さん] から「フーリエ級数におけるアナロジーは何か」という問を頂き，さらに落合さんを通して岡田靖則さんのコメントを頂いた．その結果，

> フーリエ級数における類題
> $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ が周期 1 の連続関数であって，そのフーリエ級数 $f(x) \sim \sum_{n \in \mathbf{Z}} \hat{f}_n \exp(2\pi n x)$ の係数が $\sum_{n \in \mathbf{Z}} |\hat{f}_n| = \infty$ となる (ℓ^1 に入らない) ものはあるか？
> については，そのような例があることが知られている

ことが分かった[7]．P. du Bois Reymond の定理 [Körner, §18 定理 18.1] が $\overline{\lim}_{N \to \infty} |\sum_{n=-N}^{N} \hat{f}_n| = \infty$ となる例の存在を主張している．

[7] 台有界性の条件は自明なアナロジーがないので，条件からはずした．元の問題に戻るとき気をつけないといけない．

この定理の証明に関して文献をさかのぼると，[Zygmund, VIII 章 §1 定理 (1.1)] は，Banach–Steinhaus の一様有界性定理に帰着させる Lebesgue の証明と，具体的な三角関数の有限和で書ける関数の級数で構成する Fejér の証明を掲載している．[Körner, §18] の証明は，前半は Lebesgue の証明に沿い，後半は Fejér の証明に沿う，という折衷になっている[8]．

周期 2π の連続関数 $f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{C}$ のフーリエ係数 $\hat{f}\colon \mathbf{Z}\to\mathbf{C}$ は $\hat{f}_k = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(y)e^{-\sqrt{-1}ky}dy$ で定義される．

> フーリエ級数の第 n 部分和を
>
> $$S_n(f,x) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}_k e^{\sqrt{-1}kx} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)D_n(x-y)\,dy$$
>
> と書く．

計算すると

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{\sqrt{-1}kx} = \begin{cases} \dfrac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}}, & x\neq 0,\\ 2n+1, & x=0\,. \end{cases}$$

Lebesgue の証明は，各 $n\in\mathbf{N}$ に対して $\sup_{x\in\mathbf{R}}|f_n(x)|\le 1$ を満たす周期 2π の連続関数 $f_n\colon \mathbf{R}\to[-1,1]$ を $\sup_{n\in\mathbf{N}}|S_n(f_n,0)|=\infty$ を満たすように選べることに注意することから始まる (§D 参照)．

ここで

> **Banach–Steinhaus の一様有界性定理 [Zygmund, IV 章 §9 定理 (9.5)]．** Banach 空間 X から線型ノルム空間 Y への有界線型作用素の列 $A_n\colon X\to Y$, $n\in\mathbf{N}$, が $\sup_{n\in\mathbf{N}}\|A_n(f)\|<\infty$, $f\in X$, を満たすならば，$\sup_{n\in\mathbf{N}}\|A_n\|<\infty$ が成り立つ．

において，X を周期 2π の連続関数の全体に sup ノルムを入れた Banach 空間，$Y=\mathbf{C}$, $A_n(f)=S_n(f,0)$, $f\in X$, $n\in\mathbf{N}$, とすると，$\|A_n\|\le\sup_{x\in\mathbf{R}}|D_n(x)|=2n+1$ だから A_n たちは有界線型作用素だが，f_n の選び方から

$$\|A_n\|\ge\frac{|S_n(f_n,0)|}{\|f_n\|}\ge|S_n(f_n,0)|$$

を経て $\sup_{n\in\mathbf{N}}\|A_n\|=\infty$ を得る．よって，一様有界性定理の対偶から $\sup_{n\in\mathbf{N}}|A_n(f)|=\infty$ となる $f\in X$ が存在する．

即ち周期 2π の連続関数 f と部分列 $n(k)$, $k\in\mathbf{N}$, が存在して

$$\lim_{k\to\infty}\Big|\sum_{\ell=-n(k)}^{n(k)}\hat{f}_\ell\Big| = \lim_{k\to\infty}|S_{n(k)}(f,0)|=\infty.$$

従って，特に，f のフーリエ係数 $\{\hat{f}_n\}$ は ℓ^1 に入らない．

4.2 フーリエ変換に翻訳すると？

[Körner, §46] には，可積分な連続関数でそのフーリエ変換が可積分でないものを §4.1 のアイデアを使ってつくることができる，と示唆されている．ただし，台有界という条件には言及していない．

とにかくできるかどうかやってみよう．

結論から言うと，

[8] これは，Fejér の証明の構成の具体性を保ったまま，背後にある Banach–Steinhaus の定理への言及をわずかに試みる，という教育的見地からの判断と推測される．

P. du Bois Reymond の定理のアナロジーで，台有界連続関数のフーリエ変換に関する最初の問は肯定的に解決する．
即ち，台有界な連続関数 $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ であって，そのフーリエ変換 $\hat{f}(t) = \displaystyle\int_{\mathbf{R}} e^{\sqrt{-1}xt} f(x)\,dx$ が可積分でないものがある．

なお，以下の議論は [岡田さん] に見ていただいた．記して感謝したい．

$\Lambda > 0$ に対して，台有界な連続関数 $f\colon\ \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ のフーリエ変換 $\hat{f}(t) = \displaystyle\int_{\mathbf{R}} e^{\sqrt{-1}xt} f(x)\,dx$ の切断付きフーリエ逆変換[9] を

$$S(\Lambda; f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\Lambda}^{\Lambda} \hat{f}(t) e^{-\sqrt{-1}xt} dt = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}} f(y) D(\Lambda; x-y)\,dy$$

と書く．計算すると

$$D(\Lambda; x) = \int_{-\Lambda}^{\Lambda} e^{-\sqrt{-1}xt} dt = \begin{cases} 2\dfrac{\sin \Lambda x}{x}, & x \neq 0, \\ 2\Lambda, & x = 0\,. \end{cases}$$

$g_\Lambda(y) = \mathrm{sgn} D(\Lambda; -y)\chi_{[-1,1]}(y)$ で $g_\Lambda\colon\ \mathbf{R} \to \{-1, 1\}$ を定義すると，

$$S(\Lambda; g_\Lambda)(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} |D(\Lambda; -y)|\,dy = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\Lambda} |\sin x| \frac{dx}{x}$$

を得るが，これは $\Lambda \to \infty$ で発散する．

フーリエ級数のとき (§D) の類推で，g_Λ の各不連続点

$$r_k \in \{-1, 1\} \cup \{\frac{k\pi}{\Lambda} \in [-1, 1] \mid k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}\}$$

の $2^{-k}\Lambda^{-1}\epsilon$ 近傍で傾きをつけることで，増大数列 $\Lambda(n)$ と $\mathrm{suppt.} f_n \subset [-1, 1]$ を満たす連続関数 $f_n\colon\ \mathbf{R} \to [-1, 1]$ の列で $\displaystyle\lim_{n\to\infty} |S(\Lambda(n); f_n)(0)| = \infty$ を満たすものがとれる．

このような連続関数近似ができることは，§D と同様に

$$|S(\Lambda; f)(0) - S(\Lambda; g)(0)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\Lambda}^{\Lambda} |\hat{f}(t) - \hat{g}(t)|\,dt \leq \frac{\Lambda}{\pi}\int_{\mathbf{R}} |f(x) - g(x)|\,dx$$

による．

バナッハ空間 X として，連続関数 $f\colon\ \mathbf{R} \to \mathbf{C}$, で $|x| \geq 1$ ならば $f(x) = 0$ となるもの全体を集合とし，$\|\, f \,\| = \displaystyle\max_{x\in[-1,1]} |f(x)|$ と選ぶ．有界線型作用素の列 $A_n\colon\ X \to \mathbf{C}$, $n \in \mathbf{N}$, として，$A_n(f) = S(\Lambda(n); f)(0)$ をとる．$\|\, A_n \,\| \leq \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\sup_{-1\leq y\leq 1} |D(n; -y)| = \dfrac{2n}{\pi} < \infty$ なので，A_n は有界線型作用素になる．

f_n の選び方から

$$\|\, A_n \,\| \geq \frac{|S(\Lambda(n); f_n)(0)|}{\|\, f_n \,\|} \geq |S(\Lambda(n); f_n)(0)| \to \infty \quad (n \to \infty)$$

となるので，$\displaystyle\sup_{n\in\mathbf{N}} \|\, A_n \,\| = \infty$．一様有界性定理の対偶から $\displaystyle\sup_{n\in\mathbf{N}} \|\, A_n(f) \,\| = \infty$ を満たす f が X の中に存在する．

即ち，f は台が $[-1, 1]$ に含まれる連続関数でフーリエ変換が可積分でない． □

[9] [猪狩惺] では「第 Λ 部分和」と呼んでいたと思う．

4.3 一様有界性定理はどんな「解」を与えたのか？

f はどんな関数か？一様有界性の定理の気持ちを示すべく，「嘘だけど気持ちが出ている」議論をしておく．$n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して

$$2^{-n^2} < |x| \le 2^{-(n-1)^2} \quad \text{のとき} \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \mathrm{sgn}\left(\frac{\sin 2^{n^2} x}{x}\right)$$

とおき，$|x| > 1$ と $x = 0$ のときは $f(x) = 0$ とおいて $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ を定義する．

まず $\mathrm{suppt}.f \subset [-1, 1]$ に注意．不連続点では多少傾きをつけることで連続関数にすることはいままでもやってきたことなので，立ち入らない．f の定義の係数 $1/\sqrt{n}$ のおかげで 0 でも連続になるところが重要．x の範囲の取り方は，以下で見るように，上端と下端の比が n とともに急速に大きくなるほど $\hat{f}$ の可積分性が悪くなるから，そのように選んだ．$\sin 2^{n^2} x$ の「2^{n^2}」は，指定された x の範囲で $2^{n^2} x \approx O(1)$ の「気持ち」であるが，この係数の取り方がいちばん考察が不十分である．

原点付近で急速に「ぎざぎざ」の度合いを増しながら，相対的に極めてゆっくり振幅が 0 に近づくことで $x = 0$ での連続性を保証した関数が解になるという「気持ち」である．

f のフーリエ変換が可積分かどうかが問題だが，

$$\int_{-2^{n^2}}^{2^{n^2}} \hat{f}(t)\, dt = \int f(y) D(2^{n^2}; -y)\, dy = 2 \int f(y) \frac{\sin 2^{n^2} y}{y}\, dy$$

において，f の変化の周期と $\sin 2^{n^2} y$ の変化の周期 $(2^{-n^2+1}\pi)$ が違うと，正の部分と負の部分の積分の寄与がキャンセルしてほとんどきかないだろう．よって，f から積分に寄与するのは $2^{-n^2} < |x| \le 2^{-(n-1)^2}$ の部分で，さらに大ざっぱに $|\sin x| \approx 1$ などの「概算」を行うと，

$$\begin{aligned}
&\int_{-2^{n^2}}^{2^{n^2}} \hat{f}(t)\, dt \approx 4 \int_{2^{-n^2}}^{2^{-(n-1)^2}} \frac{1}{\sqrt{n}} \mathrm{sgn}\left(\frac{\sin 2^{n^2} y}{y}\right) \frac{\sin 2^{n^2} y}{y}\, dy \\
&= 4 \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{2^{-n^2}}^{2^{-(n-1)^2}} |\sin 2^{n^2} y| \frac{dy}{y} = 4 \frac{1}{\sqrt{n}} \int_1^{2^{2n-1}} |\sin x| \frac{dx}{x} \\
&\approx \frac{4}{\sqrt{n}} \int_1^{2^{2n-1}} \frac{dx}{x} = \frac{4}{\sqrt{n}} \log 2^{2n-1} \\
&\approx 8\sqrt{n} \log 2 \to \infty, \quad n \to \infty.
\end{aligned}$$

よって，たしかに $\hat{f}$ は期待通り可積分でない（だろう）．

A おまけ．Paley–Wiener の定理は関係あるか？

この問題をとある席で高橋陽一郎先生におたずねしたところ，「Norbert Wiener の共著にいろいろ調べられている」とのことだった[10]．私が探した限りでは図書室にある N. Wiener の共著は 1 点 [P–W] だけだった．めくっただけなので内容は分からなかったが，たたみ込みの話から始まって，虚軸に解析的な幅を持つ場合を考察しているらしいことは分かった．

既出の「実解析入門」の後ろのほうをめくったところ，「Wiener は L^1 はたたみ込みを積として環をなすことに着目し，Fourier 解析の代数的な側面を引き出すことに成功したのである」とあり，そのあとのほうで Hardy 空間を導入して Paley–Wiener の定理なる定理を紹介しているので，上記の本の内容はこれのようだ．

[10] 実は，高橋先生は続けて「Wiener の共著か，あとはジグムン．」と言われたが，ジグムンとは何であるか知らなかったのと，細かいことを確認できる場ではなかったのでそのままになっていた．

その後，[Körner, §19] に [Zygmund] が引用されていたのを見て，このことだったと分かると同時に，最初に聞き取れなくてよかったことも分かった．というのは，[Zygmund] は辞典みたいな本なのに，最初から読まないと記号の分からない悲惨な構成だから，他の本に読むべき箇所を引用してもらわないと読みきれない！

[名和さん (2)] から頂いたコメントによれば，この定理は台がコンパクトな超関数の Fouier 像は解析関数になり，多項式増大の評価が成立する，という非常に一般的な現象を言っている，とのことらしい．

いまは個別の関数について詳細なことを知りたいので，一般論だと方向が違うかもしれない．

B　おまけ．Brownian bridge と結びつけてみる．

「ぎざぎざ」な連続関数ということで，1 次元ブラウン運動とむりやり結びつけてみる．f は $[0,1]$ の外では恒等的に 0 の関数としたいので，$f(0)=f(1)=0$ としたい．Brownian bridge (pinned Brownian motion) がその例になる（例えば [舟木, §5.1 例 5.6]）らしい．

$$f(x)=\begin{cases}(1-x)\displaystyle\int_0^x\frac{dB_y}{1-y}, & 0\le x\le 1,\\ 0, & \text{otherwise},\end{cases}$$

とおくことになる．ここで B_x, $x\ge 0$, は 1 次元ブラウン運動．

ブラウン運動はたしか 1/2 次 Hölder 連続ではなかったっけ？ということは $\hat f(t)=O(|t|^{-3/2})$ a.s., か？微分不可能な点が無数にあるので decay 評価が変わるかもしれない．しかし，Weierstrass 関数の経験からすると，変わらないかもしれない．

問題：Brownian bridge の場合，$\hat f\in L^1$ か？

もっとも，これが正しいかどうか分かったところで，何か面白いことがあるかどうか，私は知らない．たぶん，もし面白いことと結びついているならば，この問題の答えも既に知られていることでしょう．

C　$g_i\in L^1$ の証明．

g_1 の評価．

$N\ge 2,\, t\in I_N$, とする．$b\ge 2$ なので，$t\le\dfrac{4\pi b^{N+1}}{b+1}<2\pi b^{N+1}$．$|e^{\sqrt{-1}t}-1|=2|\sin t/2|\le 2$ と $b>1$ にも注意して，

$$|g_1(t)|\le\frac{2}{t}\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{a^n}{(2\pi)^2-(t/b^n)^2}\le\frac{2}{t}\frac{\displaystyle\sum_{n=N+1}^{\infty}a^n}{(2\pi)^2-(4\pi/(b+1))^2}\le\frac{2}{t}\frac{(b+1)^2a^{N+1}}{4\pi^2(1-a)((b+1)^2-4)}.$$

$\alpha=\dfrac{\log\frac{1}{a}}{\log b}$ (>0) とおく．$t\le\dfrac{4\pi b^{N+1}}{b+1}$ より，$0<a<1$ に注意して，

$$a^{N+1}\le\left(\frac{(b+1)t}{4\pi}\right)^{-\alpha}$$

となるから

$$|g_1(t)|\le\frac{8(b+1)^{2-\alpha}}{(4\pi)^{2-\alpha}(1-a)((b+1)^2-4)}\,t^{-1-\alpha}.$$

これが任意の N に対して成り立つから，$t>\dfrac{4\pi b^2}{b+1}$ で成り立つ．よって g_1 は可積分．

g_2 の評価．

再び $N\ge 2,\, t\in I_N$, とする．$|e^{\sqrt{-1}t}-1|=2|\sin t/2|\le 2$ を再び用いて

$$|g_2(t)|\le\frac{2}{t}\sum_{n=1}^{N-1}\frac{a^n}{(t/b^n+2\pi)(t/b^n-2\pi)}\le\frac{2}{t}\sum_{n=1}^{N-1}\frac{b^n}{t}\frac{a^n}{(t/b^n-2\pi)}.$$

$t \in I_N$ と $b > 1$ から

$$\frac{t}{b^n} > \frac{4\pi b^{N-n}}{b+1} \geq \frac{4\pi b}{b+1}.$$

よって

$$|g_2(t)| \leq \frac{2}{\frac{4\pi b}{b+1} - 2\pi} t^{-2} \sum_{n=1}^{N-1} (ab)^n.$$

$ab > 1$ とする.（$ab = 1$, $ab < 1$ の場合もそれぞれ同様にやればよく，bound はさらに良くなるので省略.）

$$|g_2(t)| \leq \frac{b+1}{\pi(b-1)} t^{-2} \frac{(ab)^N - ab}{ab-1} \leq \frac{b+1}{\pi(b-1)(ab-1)} t^{-2} (ab)^N.$$

$b^N < \frac{b+1}{4\pi} t$ および，g_1 の評価の時と同様の $a^{N+1} \leq \left(\frac{(b+1)t}{4\pi}\right)^{-\alpha}$ から，

$$|g_2(t)| \leq \frac{b+1}{\pi(b-1)(ab-1)} t^{-2} (ab)^N \leq \frac{4(b+1)^{2-\alpha}}{(4\pi)^{2-\alpha} a(b-1)(ab-1)} t^{-1-\alpha}.$$

これが任意の N に対して成り立つから，g_1 と同様に g_2 も可積分.

g_3 の評価.
再び $N \geq 2, t \in I_N$, として，

$$|g_3(t)| \leq \frac{2|\sin t/2|}{|t - 2\pi b^N|} \frac{(ab^2)^N}{t(t + 2\pi b^N)}.$$

再び，$b^N < \frac{b+1}{4\pi} t$ および $a^{N+1} \leq \left(\frac{(b+1)t}{4\pi}\right)^{-\alpha}$ から，

$$|g_3(t)| \leq \frac{2|\sin t/2|}{|t - 2\pi b^N|} \frac{(b+1)^{2-\alpha}}{(4\pi)^{2-\alpha} a} t^{1-\alpha} \frac{1}{t + 2\pi b^N} \leq \frac{(b+1)^{2-\alpha}}{(4\pi)^{2-\alpha} a} \frac{2|\sin t/2|}{|t - 2\pi b^N|} t^{-\alpha}.$$

以上が任意の $N \geq 2$ で成り立つ．よって，

$$\int_{\frac{4\pi b^2}{b+1}}^{\infty} |g_3(t)|\, dt \leq \frac{(b+1)^{2-\alpha}}{(4\pi)^{2-\alpha} a} \sum_{N=2}^{\infty} \int_{\frac{4\pi b^N}{b+1}}^{\frac{4\pi b^{N+1}}{b+1}} \frac{2|\sin t/2|}{|t - 2\pi b^N|} t^{-\alpha}\, dt.$$

ここで，和の中で添字 N の項について $t = s + 2\pi b^N$ と変数変換すると，

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{4\pi b^N}{b+1}}^{\frac{4\pi b^{N+1}}{b+1}} \frac{2|\sin t/2|}{|t - 2\pi b^N|} t^{-\alpha}\, dt. &= \int_{-2\pi\frac{b-1}{b+1}b^N}^{2\pi\frac{b-1}{b+1}b^N} \frac{|\sin s/2|}{|s/2|} (s + 2\pi b^N)^{-\alpha}\, ds \\
&\leq \int_{-2\pi}^{2\pi} (s + 2\pi b^N)^{-\alpha}\, ds + (\frac{4\pi}{b+1} b^N)^{-\alpha} \int_{2\pi < |s| < 2\pi\frac{b-1}{b+1}b^N} \frac{2}{|s|}\, ds \\
&\leq \frac{4\pi}{(2\pi b^N - 2\pi)^\alpha} + \frac{4(b+1)^\alpha}{(4\pi b^N)^\alpha} (\log \frac{b-1}{b+1} + N \log b) \\
&\leq \frac{2^{1+\alpha}(2\pi)^{1-\alpha}}{b^{N\alpha}} + \frac{4(b+1)^\alpha}{(4\pi b^N)^\alpha} (\log \frac{b-1}{b+1} + N \log b).
\end{aligned}$$

よって，

$$\int_{\frac{4\pi b^2}{b+1}}^{\infty} |g_3(t)|\, dt \leq \frac{(b+1)^{2-\alpha}}{(4\pi)^{2-\alpha} a} \sum_{N=2}^{\infty} \left(\frac{2^{1+\alpha}(2\pi)^{1-\alpha}}{b^{N\alpha}} + \frac{4(b+1)^\alpha}{(4\pi b^N)^\alpha} (\log \frac{b-1}{b+1} + N \log b) \right) < \infty.$$

即ち， g_3 は可積分.

以上で $g_i \in L^1$, $i = 1, 2, 3$, は証明された. □

なお，この証明の評価の内容から $g_i(t) = O(t^{-1-\alpha})$ らしいことが読みとれる．この文書の最初のほうの観察によれば，これは f が α 次 Hölder 連続であることを示唆しているのではないだろうか？

> きっと知られているであろう問題：Weierstrass 関数は $\alpha = \log\frac{1}{a}/\log b$ 次 Hölder 連続か？

実際，Weierstrass 関数の modulus of continuity については [Zygmund, II 章, §3 の定義と §4 の定理 (4.9)] に書かれていることがその後分かった[11]．それによると，$ab > 1$ かつ $0 < a < 1$ らば ($0 < \alpha < 1$ なので)

> $\sup\{|f(x) - f(y)| \mid |x - y| \le \delta\} = O(\delta^\alpha)$ である．この点は肯定的に解決した．

そうすると，フーリエ変換の decay は元の関数の Hölder 連続性の次数で決まり，微分不可能な点が 1 個であろうと稠密にあろうと変わらないかもしれない．さらに夢想を続けると，最初の問のフーリエ変換が L^1 に入らない例は 0 次 Hölder 連続な関数から探さないといけなくなり，探索方向を大きく変えないといけない．(0 次 Hölder 連続なら何でもうまく行くとは思えない．というのは $\sum_n 1/(na_n)$ の収束で a_n が $\log n$ の何次になるかで収束発散が変わるように，marginal なところは安易に単純な関数から作っていくといつまでたっても決着がつかない可能性があるから.)

D $\sup_{n\in\mathbf{N}}|S_n(f_n, 0)| = \infty$ を満たす絶対値 1 以下の周期 2π の連続関数の列の存在．

§4.1 において，$\sup_{x\in\mathbf{R}}|f_n(x)| \le 1$ を満たす周期 2π の連続関数 $f_n\mathbf{R} \to [-1, 1]$ の列で

$$|S_n(f_n, 0)| \ge \frac{4}{\pi^2}\log(n + 1)$$

を満たすものの存在の証明を [Körner, §18] から引用する．

先ず，

> $g_n(x) = \mathrm{sgn}D_n(-x)$ で $g_n\colon\ \mathbf{R} \to \{-1, 1\}$ を定義すると，
>
> $$S_n(g_n, 0) \ge \frac{4}{\pi^2}\log(2n + 2)$$

が成り立つ．なぜなら

$$\begin{aligned}
S_n(g_n, 0) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|D_n(-y)|\,dy \ge \frac{2}{\pi}\int_0^\pi\left|\sin(n + \frac{1}{2})s\right|\frac{ds}{s}\\
&\ge \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{2n}\frac{2n+1}{(k+1)\pi}\int_{k\pi/(2n+1)}^{(k+1)\pi/(2n+1)}\left|\sin(n + \frac{1}{2})s\right|\,ds = \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{2n}\frac{2n+1}{(k+1)\pi}\int_0^{\pi/(2n+1)}\sin(n + \frac{1}{2})s\,ds\\
&= \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=0}^{2n}\frac{1}{r+1} \ge \frac{4}{\pi^2}\int_1^{2n+2}\frac{1}{x}\,dx = \frac{4}{\pi^2}\log(2n + 2).
\end{aligned}$$

g_n の不連続点 $\frac{k\pi}{2n+1}$ $(k \in \mathbf{Z}\setminus\{0\})$ 各々の $n^{-1}2^{-k}\epsilon$ 近傍で傾きをつけることで，周期 2π の連続関数 $f_n\colon\ \mathbf{R} \to [-1, 1]$ を

$$|S_n(f_n, 0)| \ge \frac{4}{\pi^2}\log(n + 1)$$

を満たすように選ぶことができる．なぜなら，一般に

$$|S_n(f, 0) - S_n(g, 0)| \le \sum_{k=-n}^{n}|\hat{f}(k) - \hat{g}(k)| \le \frac{2n+1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x) - g(x)|\,dx$$

だから． □

[11] 遊びの注釈：前の注釈で [猪狩惺, §4.1] では三角関数の前の係数が a^{-n} となっていて a^n の誤植らしい，と指摘した．[Zygmund, II 章 §4 の定義 (4.8)] ではこの係数を $b^{-n\alpha}$ と書いている．この書き方は modulus of continuity α が見えるが，そこへの言及をしない [猪狩惺] が $b^{-\alpha}$ を a に置き換えたときに，原典の符号に引きずられた，と思えなくもない．

E　「問１」の性質を持つ関数が可積分関数のフーリエ変換にならないこと．

主結果から，台有界な連続関数 f であって，そのフーリエ変換 $\hat{f}(t) = \int_{\mathbf{R}} e^{\sqrt{-1}xt} f(x)\,dx$ が可積分でないものがあることが分かる．このとき，そのような f は可積分関数 g のフーリエ変換で書けないことを証明する[12]．

対偶を取って，次を証明すればよい．

主張．可積分関数 $g \in L^1(\mathbf{R})$ のフーリエ変換 $f(t) = \int_{\mathbf{R}} e^{\sqrt{-1}xt} g(x)\,dx$ が台有界な連続関数ならば，そのフーリエ変換 $\hat{f}(t) = \int_{\mathbf{R}} e^{\sqrt{-1}xt} f(x)\,dx = \hat{g}(t)$ はほとんどいたるところ

$$\hat{\hat{g}}(t) = 2\pi g(-t) \tag{1}$$

を満たす.（従って， $\hat{f}$ は可積分になるので，証明したい事実が対偶として得られる.）

証明．まず，f が可積分なので， $\hat{f}$ は有界連続，よって特に局所可積分．$\hat{f}(t) - 2\pi g(-t) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R})$ が殆ど至る所 0 に等しいことを言いたいが，それは任意の台有界無限階微分可能関数 $\phi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ に対して

$$\int \hat{f}(t)\phi(t)\,dt = 2\pi \int g(-t)\phi(t)\,dt$$

を言えば十分（例えば [伊藤清三, §25, 問 4]．そこでは $\mathcal{S}$ で formulate されているが，[伊藤清三, §24, 例 2] の f_δ が C_0^∞ に入っているので，$\mathcal{S}$ を C_0^∞ としても同書の必要な定理は全て成り立つ）．

自明に $C_0^\infty \subset \mathcal{S}$ で，例えば [伊藤清三, §29, 定理 29.1] によれば $\mathcal{S}$ はフーリエ変換について閉じているので， $\phi \in \mathcal{S}$ に何度フーリエ変換を施しても $\mathcal{S}$ に入る．よって Fubini の定理から

$$\int \hat{f}(t)\phi(t)\,dt = \int\int e^{\sqrt{-1}yt} f(y)\phi(t)\,dt\,dy = \int f(y)\hat{\phi}(y)\,dy = \int \hat{g}(y)\hat{\phi}(y)\,dy = \int g(t)\hat{\hat{\phi}}(t)\,dt$$

となるが，さらに [伊藤清三, §29, 定理 29.4] から

$$\hat{\hat{\phi}}(t) = 2\pi\phi(-t)$$

となるので， (1) を得る．証明終わり．

参考文献

[猪狩惺]　猪狩惺,「実解析入門」，岩波書店，1996.

[伊藤清]　伊藤清,「確率論」，岩波基礎数学選書，1991.

[伊藤清三]　伊藤清三,「ルベーグ積分入門」，裳華房数学選書４，1996.

[落合さん]　(九州大学)，メール，`Date: Tue, 13 Jun 2000 12:00:59 +0900`,
および `Date: Tue, 13 Jun 2000 22:14:28 +0900`.

[岡田さん]　(千葉大学)，落合さんに取り次いで頂いたメール,
`Date: Sat, 08 Jul 2000 12:52:09 +0900`.

[岡田さん (2)]　(千葉大学)，メール,
`Date: Tue, 18 Jul 2000 15:03:18 +0200`.

[Körner]　T. W. Körner, *Fourier analysis,* Cambridge University Press, 1988.
高橋陽一郎訳,「フーリエ解析大全」上下，朝倉書店，1996.

[12] 以下の証明は [岡田さん (2)] に教わった．$\mathcal{S}'$ におけるフーリエ逆変換公式という一般論から結果を得るが，それをさらに「普通の関数」の言葉に翻訳したものが以下の証明とのこと．

[千代延さん] (名古屋大学)，メール，`Date: Thu, 18 May 2000 15:19:48 +0900.`

[名和さん] (名古屋大学)，メール，`Date: Tue, 6 Jun 2000 16:39:25 +0900.`

[名和さん (2)] (名古屋大学)，メール，`Date: Tue, 6 Jun 2000 18:30:14 +0900.`

[舟木] 舟木直久，確率微分方程式，岩波講座現代数学の基礎，岩波書店，1997.

[P–W] R. E. A. C. Paley, N. Wiener, *Fourier transforms in the complex domain,* AMS Colloqium Publ. **XIX**, 1934.

[公式集 2] 森口繁一，宇田川　久，一松信，数学公式 II(級数，フーリエ解析)，岩波全書，1976.

宇田川先生のお名前の１字目はかねへんに圭だが，dvipsk でエラーを起こす.

[Zygmund] A. Zygmund, *Trigonometric series,* vol. I, II, Cambridge University Press, 1968.

Tetsuya HATTORI
URL: `http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~hattori`