19991014
服部哲弥，石川洋一，市原洋文，小島康宏，竹田紗苗，松井真也
v19981014;

測度論の練習問題（大学院入学試験問題）解答例

２．可測関数と積分（補遺） [A1]–[A6]

[**A1**] (S63 広島大 6).

(1) $E_0 = \Omega$ とおく．初めに，非負整数 n に対して，E_n の定義から $x \in E_n \setminus E_{n+1}$ ならば $n \le |f(x)| < n+1$ が成り立つことに注意する．
f が可積分とする．

$$\int_\Omega |f|\,d\mu = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{E_k \setminus E_{k+1}} |f|\,d\mu + \int_{E_n} |f|\,d\mu$$
$$\ge \sum_{k=0}^{n-1} k(\mu(E_k) - \mu(E_{k+1})) + n\mu(E_n) = \sum_{k=1}^{n} \mu(E_k)$$

が，任意の正整数 n に対して成り立つので，f が可積分だから，

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \mu(E_k) \le \int_\Omega |f|\,d\mu < \infty$$

である．
逆に $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < \infty$ とする．

$$\int_\Omega |f|\,d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{E_k \setminus E_{k+1}} |f|\,d\mu \le \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(\mu(E_n) - \mu(E_{n+1}))$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} (k+1)(\mu(E_k) - \mu(E_{k+1})) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \mu(E_k) - (n+1)\mu(E_{n+1}) \right)$$
$$\le \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \mu(E_k) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(E_n) < \infty.$$

よって f は可積分である．

(2) f が可積分なので (1) より $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \mu(E_n) < \infty$ だから，

$$\mu\left(\bigcap_{k\ge1} \bigcup_{n\ge k} E_n \right) = \lim_{k\to\infty} \mu\left(\bigcup_{n\ge k} E_n \right) \le \lim_{k\to\infty} \sum_{n\ge k} \mu(E_n) = 0,$$

すなわち，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \chi_{E_n} = 0$, a.e.–$x$.
$E_1 \supset E_2 \supset \cdots$ と f が可積分であることより，

$$\limsup_{n\to\infty} n\mu(E_n) \le \limsup_{n\to\infty} \int_{E_n} |f|\,d\mu = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} \chi_{E_n} |f|\,d\mu$$

となって，右辺は 0 となるから，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\mu(E_n) = 0$.

[**A2**] (S62 金沢大 5).

(1) $\displaystyle\mu\left(\bigcup_{n\ge1} A_n \right) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$ だから，単調な集合列に対する測度の連続性より，

$$\mu\left(\bigcap_{k\ge1} \bigcup_{n\ge k} A_n \right) = \lim_{k\to\infty} \mu\left(\bigcup_{n\ge k} A_n \right) \le \lim_{k\to\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \mu(A_n).$$

右辺は，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)<\infty$ なので， 0 である．

(2) 自然数 $n,\ k$ に対して，$E_{n,k}=\{x\in\Omega\mid |f_n(x)|>k\}$ とおく．f_n が実数値関数だから $\displaystyle\bigcap_{k\geq 1}E_{n,k}=\emptyset$. $\mu(\Omega)<\infty$ だから単調集合列に関する測度の連続性より，

$$\lim_{k\to\infty}\mu(E_{n,k})=\mu(\emptyset)=0\,.$$

よってある $c_n>0$ があって， $\mu(E_{n,c_n})\leq 2^{-n}$. このとき，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu\{x\in\Omega\mid |f_n(x)|>c_n\}=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_{n,c_n})\leq\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}=1<\infty.$$

(3) $a_n=\dfrac{1}{2^nc_n}$, $n=1,2,3,\cdots$, とおく．(1)(2) から

$$\mu\left(\bigcap_{k\geq 1}\bigcup_{n\geq k}E_{n,c_n}\right)=0$$

なので，a.e.–$x\in\Omega$ に対して，$x\in\displaystyle\bigcup_{k\geq 1}\bigcap_{n\geq k}E_{n,c_n}^c$ すなわち，

$$\exists k\geq 1;\ (\forall n\geq k)|a_nf_n(x)|\leq 2^{-n}.$$

よって，

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_nf_n(x)|\leq\sum_{n=1}^{k-1}|a_nf_n(x)|+1<\infty$$

だから $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_nf_n(x)$ は絶対収束，よって収束．これが a.e.–$x\in\Omega$ に対して成り立つから，ほとんど全ての x で収束する．

[A3] (H2 神戸大 3).

(1) $E_1=\{x\in\mathbf{R}\mid |f(x)\leq 1\}$, $E_2=\{x\in\mathbf{R}\mid |f(x)>1\}$, とおく．$f$ は可積分なので $\displaystyle\int_{E_1}|f(x)|\,dx<\infty$, $\displaystyle\int_{E_2}|f(x)|\,dx<\infty$.

$p>1$ だから， $x\in E_1$ ならば $|f(x)|^p\leq|f(x)|$ なので，$\displaystyle\int_{E_1}|f(x)|^p\,dx\leq\int_{E_1}|f(x)|\,dx<\infty$. また，$|f(x)|\leq M$, a.e.–$x$, だから $\displaystyle\int_{E_2}|f(x)|^p\,dx\leq M^{p-1}\int_{E_2}|f(x)|\,dx<\infty$. 故に

$$\int_{\mathbf{R}}|f(x)|^p\,dx=\int_{E_1}|f(x)|^p\,dx+\int_{E_2}|f(x)|^p\,dx<\infty.$$

(2) $\epsilon>0$ を任意に取り，$E=\{x\in\mathbf{R}\mid |f(x)|\geq M+\epsilon\}$ とおく．$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbf{R}}|f_n(x)-f(x)|\,dx=0$ だから $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{E}|f_n(x)-f(x)|\,dx=0\,.$

他方，全ての自然数 n に対して $|f_n(x)|\leq M$, a.e.–x, だから $|f_n(x)-f(x)|\geq|f(x)|-|f_n(x)|\geq\epsilon>0$, $n\in\mathbf{N}$, a.e.–x, となる．

以上を合わせると， $\mu(E)=0$ となる．$\epsilon>0$ は任意だったから $|f(x)|\leq M$, a.e.–x, を得る．

次に，$A_n=\{x\in\mathbf{R}\mid |f_n(x)-f(x)|\leq 1\}$, $B_n=\{x\in\mathbf{R}\mid |f_n(x)-f(x)|>1\}$, とおく．

$p>1$ なので $n \in \mathbf{N}$ に対して

$$\begin{aligned}
&\limsup_{n\to\infty}\int_{A_n}|f_n(x)-f(x)|^p\,dx \le \limsup_{n\to\infty}\int_{A_n}|f_n(x)-f(x)|\,dx \\
&\le \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbf{R}}|f_n(x)-f(x)|\,dx = 0,
\end{aligned}$$

すなわち，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{A_n}|f_n(x)-f(x)|^p\,dx < \infty.$

また，既に証明したことより，$|f_n(x)-f(x)| \le 2M$, a.e.–x, だから，

$$\begin{aligned}
&\limsup_{n\to\infty}\int_{B_n}|f_n(x)-f(x)|^p\,dx \le (2M)^{p-1}\limsup_{n\to\infty}\int_{B_n}|f_n(x)-f(x)|\,dx \\
&\le (2M)^{p-1}\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbf{R}}|f_n(x)-f(x)|\,dx = 0,
\end{aligned}$$

よって，

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbf{R}}|f_n(x)-f(x)|^p\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_{A_n}|f_n(x)-f(x)|^p\,dx + \lim_{n\to\infty}\int_{B_n}|f_n(x)-f(x)|^p\,dx = 0\,.$$

[**A4**] (H2 大阪市大 C1)．$\delta>0$ とすると，

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\{x\in\mathbf{R}\,|\,|f_\alpha(x)|<\delta\}}\frac{f_\alpha(x)}{x^2}\,dx\right| \le \int_{\mathbf{R}}\chi_{\{x\in\mathbf{R}\,|\,|f_\alpha(x)|<\delta\}}\left|\frac{f_\alpha(x)}{x^2}\right|\,dx \\
&\le \int_{x\ge\sqrt{\delta}}\frac{\delta}{x^2}\,dx + \int_{x<\sqrt{\delta}}\chi_{\{x\in\mathbf{R}\,|\,|f_\alpha(x)|<\delta\}}\,dx \\
&\le 2\frac{\delta}{\sqrt{\delta}} + 2\sqrt{\delta} = 4\sqrt{\delta}.
\end{aligned}$$

右辺は α によらないから，

$$\sup_\alpha\int_{\{x\in\mathbf{R}\,|\,|f_\alpha(x)|<\delta\}}\frac{f_\alpha(x)}{x^2}\,dx \le 4\sqrt{\delta}.$$

ここで $\delta\downarrow 0$ とすれば

$$\lim_{\delta\downarrow 0}\sup_\alpha\int_{\{x\in\mathbf{R}\,|\,|f_\alpha(x)|<\delta\}}\frac{f_\alpha(x)}{x^2}\,dx = 0$$

を得る．

[**A5**] (S61 東工大 9)．$\alpha = \operatorname*{ess.sup}_{x\in\Omega}|f(x)|$ とおく．

$\alpha=\infty$ のとき．任意の正数 M に対して $\mu\{x\in\Omega \mid |f(x)|\ge M\}>0$．このとき，

$$\liminf_{p\to\infty}\left\{\int_\Omega|f(x)|^p\,d\mu(x)\right\}^{1/p} \ge M\liminf_{p\to\infty}\mu\{x\in\Omega \mid |f(x)|\ge M\}^{1/p} = M.$$

左辺は M によらないから，左辺は $+\infty$. すなわち，

$$\lim_{p\to\infty}\left\{\int_\Omega|f(x)|^p\,d\mu(x)\right\}^{1/p} = \infty = \alpha.$$

$\alpha<\infty$ のとき．まず α の定義から，

$$\limsup_{p\to\infty}\left\{\int_\Omega|f(x)|^p\,d\mu(x)\right\}^{1/p} \le \alpha\limsup_{p\to\infty}\mu(\Omega)^{1/p} = \alpha.$$

次に，$0<\beta<\alpha$ とし，$E_\beta=\{x\in\Omega \mid |f(x)|\ge\beta\}$ とおくと，$\mu(E_\beta)>0$ であって，

$$\left\{\int_\Omega|f(x)|^p\,d\mu(x)\right\}^{1/p} \ge \beta\mu(E_\beta)^{1/p}.$$

β を固定して $p \to \infty$ とすると

$$\liminf_{p\to\infty} \left\{ \int_\Omega |f(x)|^p \, d\mu(x) \right\}^{1/p} \geq \beta.$$

$0 < \beta < \alpha$ は任意だから

$$\liminf_{p\to\infty} \left\{ \int_\Omega |f(x)|^p \, d\mu(x) \right\}^{1/p} \geq \alpha.$$

以上より

$$\lim_{p\to\infty} \left\{ \int_\Omega |f(x)|^p \, d\mu(x) \right\}^{1/p} = \alpha = \operatorname*{ess.sup}_{x \in \Omega} |f(x)|.$$

[**A6**] (S63 新潟大 12).

(1) $\epsilon > 0$ とする． $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Prob}[\, |X_n| \geq \epsilon \,] < \infty$ ならば,

$$\lim_{k\to\infty} \mathrm{Prob}[\, \bigcup_{n\geq k} \{|X_n| \geq \epsilon\} \,] \leq \lim_{k\to\infty} \sum_{n\geq k} \mathrm{Prob}[\, |X_n| \geq \epsilon \,] = 0\,.$$

よって，単調な集合列に関する確率の連続性から

$$\mathrm{Prob}[\, \bigcap_{k\geq 1} \bigcup_{n\geq k} \{|X_n| \geq \epsilon\} \,] = 0\,.$$

すなわち

$$\mathrm{Prob}[\, \bigcup_{k\geq 1} \bigcap_{n\geq k} \{|X_n| < \epsilon\} \,] = 1\,.$$

これは $X_n \to 0$, $n \to \infty$, a.s. (概収束), を意味する．

(2) $0 < \epsilon < 1$ なる任意の ϵ に対して,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Prob}[\, |X - 3| > \epsilon \,] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Prob}[\, |X - 3| = n \,] + \sum_{n<\epsilon^{-1}} \mathrm{Prob}[\, |X - 3| = n^{-1} \,]$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} + \sum_{n<\epsilon^{-1}} (1 - n^{-2}) < \infty.$$

よって， (1) から $X_n \to 3$, $n \to \infty$, a.s.[1]

[1] 一般には確率収束しても概収束しないが，確率収束のスピードが速ければ概収束する，という問題.