19980414–1209;19991014;
服部哲弥，津田稔朗
v19991014;

測度論の練習問題（大学院入学試験問題）
２．可測関数と積分（補遺）

第 2 章への補遺.

[A1] (S63 広島大 6). $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ は有限測度空間, $f: \Omega \to \mathbf{R}$ は可測関数とする. 正整数 n に対して $E_n = \{x \in \Omega \mid |f(x)| \geq n\}$ とおくとき，次を示せ.

(1) f が Ω 上で可積分であるための必要十分条件は $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < \infty$ である.

(2) f が Ω 上で可積分ならば $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\mu(E_n) = 0$.

[A2] (S62 金沢大 5). $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ を有限測度空間, $\{A_n\}$ を $\mathcal{F}$–可測な集合列, $\{f_n\}$ を Ω で定義された実数値 $\mathcal{F}$–可測関数の列とする. 次のことを示せ.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$ ならば $\displaystyle\mu\left(\bigcap_{k\geq 1} \bigcup_{n\geq k} A_n\right) = 0$.

(2) 正数列 $\{c_n\}$ があって $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mu\{x \in \Omega \mid |f_n(x)| > c_n\} < \infty$.

(3) 正数列 $\{a_n\}$ があって $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x)$ はほとんど全ての x で収束する.

[A3] (H2 神戸大 3). $f, f_1, f_2, \cdots$ は全て $\mathbf{R}$ から $\mathbf{R}$ への可測関数とするとき次の 2 つを証明せよ.

(1) f が可積分，かつ，ある $M > 0$ に対して $|f(x)| \leq M$, a.e.–x, を満たすならば，任意の $p > 1$ に対して $|f|^p$ も可積分である.

(2) $f_n, n \geq 1$, が全て可積分で，かつ，ある $M > 0$ があって $|f_n(x)| \leq M$, a.e.–x, $\forall n \geq 1$, が成り立っているものとする. いま, f が可積分で $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbf{R}} |f_n(x) - f(x)|\,dx = 0$ が成り立っているとすると，上の M に対して $|f(x)| \leq M$, a.e.–x が成り立ち，さらに，任意の $p > 1$ に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbf{R}} |f_n(x) - f(x)|^p\,dx = 0$ が成り立つことを証明せよ.

[A4] (H2 大阪市大 C1). $\{f_\alpha(x)\}$ は $|f_\alpha(x)| \leq x^2$ を満たす $\mathbf{R}$ 上の可測関数の族とする.

$$\lim_{\delta\downarrow 0} \sup_{\alpha} \int_{\{x\in\mathbf{R} \mid |f_\alpha(x)|<\delta\}} \frac{f_\alpha(x)}{x^2}\,dx = 0$$

であることを示せ.

[A5] (S61 東工大 9). $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ を測度空間で $\mu(\Omega) < \infty$ とする. このとき

$$\lim_{p\to\infty} \left\{\int_{\Omega} |f(x)|^p\,d\mu(x)\right\}^{1/p} = \operatorname*{ess.sup}_{x\in\Omega} |f(x)|$$

を示せ[1].

[A6] (S63 新潟大 12). $\{X_n\}_{n\geq 1}$ を確率変数列とするとき，次の問に答えよ.

[1] 右辺は, $|f(x)| \leq M$, a.e.–x, なる M （本質的上界）の下限を表す

(1) 各 $\epsilon > 0$ に対して $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Prob}[\, |X_n| \geq \epsilon \,] < \infty$ を満たすとき $X_n \to 0$, $n \to \infty$, a.s. (概収束), が成り立つことを示せ.

(2) 全ての $n \in \mathbf{N}$ に対して $\mathrm{Prob}[\, X_n = 3 + n \,] = \dfrac{1}{n^2} = 1 - \mathrm{Prob}[\, X_n = 3 - \dfrac{1}{n} \,]$ を満たすとき，(1) の結果を用いるとどのような結論が得られるか.