「難問克服　ルベーグ積分」（服部哲弥著，東京図書）
補足と訂正一覧

2024.1.11

以下 p は本書のページ，ℓ は行（負の行番号はページの下からの行数（脚注を除く））．

以下各項目の多くは著者以外の方々からのご指摘による．ご指摘くださった方々のお名前は web ページ「難問克服　ルベーグ積分」東京図書，2020 年 12 月刊行　服部哲弥　の補足と訂正」を参照いただきたい．

p. 5 ℓ. −1 問題 02 の解答.

「$\cdots \operatorname{Im} f = \Omega$」　→　「$\cdots \operatorname{Im} f = \Omega'$」

p. 12 ℓ. −10 問題 06 の解説.

「$\{\omega'\} \subset \Omega$」　→　「$\{\omega'\} \subset \Omega'$」

p. 21 ℓ. −8 問題 10(2) の解答の 0 以上 2 以下の閉区間の記号.

（ピリオド）　→　（コンマ）　　「 $[0.2]$ 」　→　「 $[0, 2]$ 」

p. 21 ℓ. −7– −1 問題 10(2) の解答後半.

補足：この部分は，一般位相空間論で頻用の定理：「コンパクト集合から Hausdorff 空間への全単射連続写像は同相写像」の証明の論法である．

p. 23 ℓ. 2 問題 11 の解答の最後から 4 行目の数式による評価.

補足：ていねいに書くと,「背理法で，もし，有限集合でない $L(n)$ があれば，すなわち $\sharp L(n) = \infty$ となる n があれば，$L(n)$ の定義から $a_{\lambda_k} \geq \dfrac{1}{n}$ を満たす列 λ_k, $k = 1, 2, \cdots$, があるが，任意の自然数 K に対して，M の定義の中で $V = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_K\}$ と選ぶことによって $M \geq \dfrac{1}{n}K$ が成り立つので $M = \infty$ となって問 (2) の仮定に反する.」

p. 28 ℓ. 4– 6 問題 11 の問題文の $\mathcal{C}$ の定義の前後.

「と $\pi \in \Pi$ に対して $\cdots$ と置き，さらに $\omega \in \Omega$ に対して」　→　「に対して $\cdots$ と置き，さらに $\pi \in \Pi$ と $\omega \in \Omega$ に対して」

（π は $\mathcal{C}$ の定義には関係ない）

p. 40 ℓ. 4 問題 19 の問題文 3 行目の数式の末尾.

閉じ中括弧が 1 つ多い：　「$\}\}$」　→　「$\}$」

p. 41 ℓ. 2,7,8 問題 19 の解答 (2) の 3 箇所の $H^1_N(I)$ の括弧内.

「I」　→　「$(0, 1]$」　　（3 箇所）

p. 44 ℓ. −1 問題 21 の解説の最後の行.

「いうこを反映する」　→　「いうことを反映する」

p. 48 ℓ. −5 問題 23 の解答の，等号 3 つつないだ式の，最後から 2 つ目（前から 3 つ目）の式.

閉じ括弧が抜けている　　「$\mu_d(\cdots$」　→　「$\mu_d(\cdots)$」

p. 50 ℓ. −2 問題 24 の解答の最初の行.

補足：「集合の下限」は p. 31 の 2 章冒頭概説の外測度の定義式 (2.1) の右辺最初の $\inf\{\cdots\}$ のことだが，本書当該箇所の集合は直方体（区間）の体積（長さ）の和という実数の集合の下限を「実数の集合の下限」と書いてある．直方体（という集合）を集合と呼んでいるのではないことに注意．

ノルムもそうだが測度は，実数の集合が持つ順序（不等式）という構造を最大限利用するべく，考察したい集合を直接扱わずに「大きさ」に相当する実数値を抽出してその実数値を扱う．

p. 56 ℓ**. −9** 問題 27(1) の解説の最後．

「成り立つ．」 → 「成り立つ（問題 79 の伏線）．」

p. 68 ℓ**. −10** 問題 32 の解説の下から 3 行目の文献番号．

[15] → [16]

p. 68 ℓ**. −2** 問題 32 の解答．

3 つある $\mathcal{I}_A$ のうち後ろ 2 つが小さいが，すべて同じもの

p. 73 ℓ**. 3** 問題 34(2) の解答の最初の行の行末近くの和集合．

補集合の記号が抜けている 「$(\bigcup_{k=1}^{n-1} B_k)$」 → 「$(\bigcup_{k=1}^{n-1} B_k)^c$」

p. 82 ℓ**. 7** 問題 39 式 (3.1)．

（ピリオド） → （コンマ） 「$d(\omega'.\omega)$」 → 「$d(\omega',\omega)$」

p. 85 ℓ**. 12** 問題 40(2) の解答の中央付近の行の文中数式の 1 つ．

括弧の外の補集合の記号が抜けている 「$A\cup B = (A^c\cap B^c) \in \cdots$」 → 「$A\cup B = (A^c\cap B^c)^c \in \cdots$」

p. 96 ℓ**. −4** 問題 45(1) の解答の 8 行目の数式行の行末．

「$\mathcal{A}$」 → 「$\mathcal{I}$」

p. 100– 101 問題 47．

体裁を以下のように変更する：問題文を各文ごとに小問 (1)(2)(3) として，解答も「$\mathcal{I}_1$ の場合」「$\mathcal{I}_2$ の場合」それぞれを段落毎に (1)(2)(3) とする．その体裁の下で，

$\mathcal{I}_1$ の場合の (3) の解答 → 「$\mathcal{I}_2 \subset \mathcal{I}_1$ なので，$\sigma[\mathcal{I}_2] \subset \sigma[\mathcal{I}_1]$ だが，$\mathcal{I}_2$ の場合の (3) の解答から $\sigma[\mathcal{I}_2] = 2^{\mathbb{N}}$ （自然数のあらゆる部分集合たちを要素とする集合族）なので $\sigma[\mathcal{I}_1]$ も $2^{\mathbb{N}}$ に等しい．」

$\mathcal{I}_2$ の場合の (2) の解答 → 「$\mathcal{I}_2 \subset \mathcal{I}_1$ なので，$m\colon \mathcal{I}_2 \to \mathbb{R}$ は $m\colon \mathcal{I}_1 \to \mathbb{R}$ の部分有限加法族への制限なので，有限加法的測度である．」

p. 102 ℓ**. −2– −3** 問題 48 の解答．

「$\mathrm{P}[\ \cdots\ ]$」 → 「$\mu(\cdots)$」 （3 箇所）

p. 131 ℓ**. −3** 問題 61(2) の解答の最後から 3 行目行末近くの被積分関数の添字の中．

「$\bigcup$」 → 「$\bigcap$」 （なお，本書当該箇所の 1 つ上の行との違いは，積分範囲を $\tilde{\Omega}$ からその補集合 $\tilde{\Omega}^c$ の測度が 0 なことを利用して Ω に等号で広げたことだけ．）

p. 137 ℓ**. 3** 問題 64(2) の解答の下から 2 行目．

「$h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$」 → 「$h\colon \Omega \to \mathbb{R}$」

p. 137 ℓ**. 7** 問題 64(1) の解答の中ほど．

「またはと」 → 「または」

p. 142 ℓ**. 1** 問題 67 の冒頭の文の最初の部分．

「Ω の集合族 $\mathcal{I} \subset 2^{\Omega}$ が $\cdots$ 満たすとし,」 → 「Ω の集合族 $\mathcal{I} \subset 2^{\Omega}$ が $\bigcup_{I\in\mathcal{I}} I = \Omega$ と，$I_1,\ I_2 \in \mathcal{I}$ ならば $I_1 = I_2$ または $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ を満たすとし,」

（$\mathcal{I}$ が排反な集合たちの族で，すべての和集合を取ると全体集合に等しい，ということ）

p. 150– 151 問題 71 の解答.

補足：

- (1) の解答の構造は以下である：$g = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} \mathbf{1}_{A_n \cap A_{n+1}^c}$ と置くとき，各点で $|f| \le g$ であることと，p. 151 ℓ. 1– 3（アーベルの総和法）によって $\int_\Omega g\, d\mu \le$（小問 (1) で有限と仮定されている級数）であることから主張が従う.
- (3) の解答の a_n の構造（解答の見つけ方）は以下である：$f = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \mathbf{1}_{A_n \cap A_{n+1}^c}$ という形の答を探す．$\lim_{n\to\infty} b_n \mu(A_{n+1}) = 0$ を仮定すれば，アーベルの総和法によって

$$\int_\Omega |f|\, d\mu \le b_1 \mu(A_1) + \sum_{n=0}^{\infty} (b_n - b_{n-1}) \mu(A_n).$$

  他方，$b_{n+1} > a_{n+1} > b_n$ ならば問題文で有限と要請している級数は $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n-1}) \mu(A_n)$ に等しい．以上をにらんで，$b_n = (n+2)!$，$a_n = b_{n-1} + 1$，$\mu(A_n) = \dfrac{1}{n^3 n!}$ と選ぶことで，$(b_n - b_{n-1})\mu(A_n) = O(\frac{1}{n})$ と $(a_n - a_{n-1})\mu(A_n) = O(\frac{1}{n^2})$ を実現している.

p. 162 問題 76(2).

解説の最後に以下を追記　→　「(2) は稠密な有理数上で定義できないのに，ほとんどの点で収束する.」

（$\dfrac{1}{\sqrt{|x-q|}}$ の代わりに積分が有界な可積分関数列に一般化できるのに，わざわざ無駄な制限を残して出題したのは，稠密な点で定義されていなくてもほとんど至るところ収束するという，(高校や大学の前半では習わない）顕著な特徴への注目という趣旨である．本の後半なこともあるし，既習・未習の水準ではなく数学としてもおもしろい問題があると良いが，著者には見つけられなかった.）

p. 186 問題 87(2).

解説の最後に以下を追記　→　「なお，本書では $\dfrac{|z|}{1+|z|}$ という形の関数を用いたが，$1 \wedge |z|$（大きくないほう）を用いても同値である.」

（測度収束とのつながりは後者の方が明快だが,「大きくないほう」の記号が相対的に狭い分野でしか流通していないためか，世の中では前者が頻出なので，本書は前者を採用した.）

p. 192 ℓ. −2 問題 90(1) の解答の 3 行目.

添字 $1+n$ と $n+1$ が混在しているが意味はなく，両方とも等しく $n+1$

p. 195 ℓ. 14 問題 91(2) の解答の終わり（(3) の解答の 2 行前）.

「$K \ge K_i$ ならば」　→　トル

p. 196 ℓ. 3 問題 92(1) の冒頭.

「$\iota_K :\ \mathbb{R} \to$」　→　「$\iota_K :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$」

p. 197 ℓ. 1– 6 問題 92(2) の解答前半.

別解：(2) の問題文の測度収束の仮定と (1) から $\iota_K f_n$ は $\iota_K f$ に測度収束する．他方，(1) の ι_K の定義と (2) の問題文の有界性の仮定から $\iota_K f_n = f_n$．以上から f_n は $\iota_K f$ に測度収束する．問題文の測度収束の仮定から f_n は f にも測度収束するので $\iota_K f = f$, a.e., だが，これは $|f| \le K$, a.e., を意味する.

p. 197 ℓ. −8 問題 92(3) の解答の中ほどの長い数式行の 1 つ上の行.

左辺の絶対値の閉じが抜けている　「$|\iota_K(f_n(\omega)) - f_n(\omega)$」 → 「$|\iota_K(f_n(\omega)) - f_n(\omega)|$」

p. 197 ℓ. −2 問題 92(3) の解答の最後の長い数式行の 2 つの不等号の間の式.

第 1 項と第 3 項が同じものの繰り返しになっているが一方の 2 箇所は「f」ではなく「f_n」

「$\int_\Omega |f - \iota_K \circ f| d\mu$」 → 「$\int_\Omega |f_n - \iota_K \circ f_n| d\mu$」　(2 箇所のどちらか一方)

p. 206 ℓ. 3 問題 97 の問題文の 2 行目.

同じ積分が無意味に 2 度書いてある　「$\int_{\mathbb{R}} f_n(x)dx = \int_{\mathbb{R}} f_n(x)dx = 1$」 → 「$\int_{\mathbb{R}} f_n(x)dx = 1$」

p. 224 ℓ. −5 問題 105 の解説.

「なお，(3) は」 → 「なお，少し長くなるので設問にはしなかったが，(3) は」

p. 224 ℓ. −5 − p. 225 ℓ. 3 問題 105 の解説.

「かつ $\cdots$ 定義される測度である.」 → 「かつ $A = \{\omega \in \Omega \mid \frac{d\mu}{d\nu}(\omega) \leq z\}$ となる z がある場合には等号が成り立つ.」

(この訂正で削除した本書の当該箇所の文面で言及する等号が任意の可測集合 A に対して成り立つのは υ が特別な場合に限る.)

p. 226 ℓ. −3 問題 106 の解説の下から 3 行目の文献番号.

[15] → [15,16]

p. 229 ℓ. −1 9 章章扉の最後の行の文献番号.

[11] → [12]

p. 234 ℓ. 10 問題 109 の解説の 2 行目.

「それらとを」 → 「それらを」