数理物理学 III（数学 ４年・大学院 前期選択） mp.tex
服部哲弥
20001011–17;22;25–27;1107;12–14;22–30;1201–05;08;09;11–14;25–31;
20010101;06–08;11–25;27;28;0203–10;13;
0224;25;
0405–30; 0502–03;05;08–11;17;0614–20;24;0723;26;

数理物理学 ー Random walk と self-avoiding walk

Contents

0 イントロ.

講義の目標. 数理物理学の一分野として，ミクロな法則からマクロな性質を導く統計力学がある（統計学とは，名前は似ているが，無関係である）.

理論物理学の一分野である統計力学の中に，無限自由度系の臨界現象という研究分野がある．無限自由度に由来する非解析性と臨界指数の普遍性を出発点の問題意識として，くりこみ群という描像に至った，分野である．また，理論物理学の別の一分野である場の量子論の中に，格子場の理論の連続極限というアプローチがある．統計力学系の連続極限を取ることでユークリッド場の量子論を得て，その測度のモーメントを再解釈することで素粒子の反応を記述する場の量子論を数学的に得ることができるという定式化である.

数理物理学としての統計力学は，これらの理論物理学の研究で得られた描像の数学的内容を深めていき，最終的には新しい数学の解析手段を手に入れ，また，それを理論物理学にフィードバックすることで，数学上の限界から行き詰まっていた統計力学と場の量子論の非摂動論的な側面の研究を進展させることを目標とする.

本講義ではその中から，格子上の確率連鎖（または，同じことだが，格子上に値を取る関数の集合上の確率モデル），特に simple random walk と self-avoiding walk に即して説明する．確率論でいう確率連鎖 (chain，離散時刻確率過程) の簡単な場合なので，確率論を含む既存の数学科の講義とのつながりがよい点で，数学系の学科ないし研究科，もしくは，確率論に関する同様のカリキュラムを持つ学科ないし研究科，の基礎講義として適当であると考える.

仮定する知識. ルベーグ積分論および確率論の講義を受講済みであることを仮定して，そういう受講者にとって過去の講義との話がつながりやすいように講義を組み立てる．しかし，いくつかの確率論の基礎用語を断りなく使うことを除けば，殆どの部分は初等的な微積分学以上の知識は必要ないはずである.

講義の構成． 前半は初等確率論の基礎教養 (d 次元格子上の walk)，後半は自分の関わった研究 (Sierpiński gasket 上の walk とくりこみ群) である．各節の目標は以下の通り．

１次元 random walk (2)． 標準的な初等確率論の話題との共通点．確率論を思い出しつつ,「独立確率変数の和」という抽象的な概念が，図形の確率論としてみると，種々の興味深い性質を内蔵していることを説明する．

取り上げる題材のいくつかは講義全体の流れと関係なく，確率論の基礎教養として取り上げる．Random walk の連続極限（確率過程論で invariance principle と呼ばれる定理の一つ）のブラウン運動でも成り立つという意味で重要な性質 (arcsine law など) がこの範疇に入る．但し，ブラウン運動そのものは扱わない．この講義全体にわたって離散時間（確率連鎖）の解析に限る．(もちろん漸近形を見るという意味で非常に近いところまで話があるが，path measure の構成に踏み込まないという意味である.)

講義全体の流れに関連する walk の漸近的性質の例として高次元の場合との対比のために再帰性 (recurrence) を，また，講義全体の方向（stochastic geometry におけるくりこみ群の描像）への導入のために mean square displacement の exponent を，それぞれ紹介する．

参考文献．[17, 補遺]，[2, §6.1]，[8, §3.3]，[10, vol. 1 III 章, XIII 章]．[18] も参照．

高次元 random walk (2)． Walk の，図形としての，漸近的性質が空間次元によって定性的にも定量的にも大きく変わることを，再帰性について示す．

Self-avoiding walk との対比に向けて，mean square displacement の exponent は次元によらず定数であることを示す．

種々の性質が，マルコフ性という self-avoiding walk にはない著しい性質によることを強調するために，準備としてマルコフ連鎖について若干の一般論を講義する．

最後に，universality の簡単な例として，三角格子でも mean square displacement の exponent が不変なことや，中心極限定理との関連で X_1 の分布を少し変えても変わらないことに触れて，低次元 self-avoiding walk への興味の動機とする．[1]

参考文献．[3, 6 章]，[8, §3.1, 3.2]，[10, vol. 1 §XIV.7]．[12].

d 次元 self-avoiding walk (2)． Simple random walk に簡単な制限をつけるだけで極めて難しい（未解決の）問題になることを示し，興味の在処を明らかにする．

知られている結果を述べて，基礎教養の紹介とする．特に，高次元については Hara–Slade によって exponents が (ほぼ) 決着して，random walk のそれに一致することを紹介する．但し，証明は複雑で講義ではとても紹介できない．低次元では何も解決していないが，simple random walk と異なると予想されることなどを紹介し，くりこみ群の描像への期待の導入とする．

参考文献．[13]，[12, 6 章].

1 次元 self-repelling walk (2)． １次元 simple random walk の decimation くりこみ群を説明し，その応用として， law of iterated logarithm の lower bound の別証明を与える．くりこみ群を用いて，simple random walk と self-avoiding walk を「連続的に」つなぐモデルを説明する．これは私が関わった仕事の簡単な場合の紹介である．

以上によって，この講義の隠れた主題であるくりこみ群への導入とする．

参考文献． [30]

Sierpiński gasket 上の random walk (2)． くりこみ群の描像が容易に数学的手段として定式化可能な空間として Sierpiński gasket を取り上げる．くりこみ群が容易であることとは裏腹に，Sierpiński gasket では simple random walk といえども exponent が自明ではなくなることを紹介し，また，自明でないくりこみ群の軌道とその図形的意味の解説として，私の関わった研究から等方性の回復の話を紹介する．

参考文献． [33], [34], [21], [22]

Sierpiński gasket 上の self-avoiding walk (2)． Self-avoiding walk の解析におけるくりこみ群の視点を Sierpiński gasket 上で解説して本講義の到達点とする．

参考文献． [31], [29], [35], [32]

Sierpiński gasket はくりこみ群が簡単になるように作ったおもちゃであり，仮に Sierpiński gasket で成功しても本来の問題である d 次元格子空間上の self-avoiding walk の問題には答えられないだろう，という批判は当然ある．しかしこの批判にこの講義で答えるつもりはない[2]

[1] (上) 臨界次元に関しては交差確率が最も重要な題材といっても良いが，少し準備に手間取りそうなので [12] に任せて，割愛する．
[2] もしどうしても批判したいならば，d 次元 pre-Sierpiński gasket 上の self-avoiding walk の漸近的性質を一般的に解いてごらん！私の周囲にいる人には誰にも１年やそこらではできないね．

一つには，高次元 Sierpiński gasket の self-avoiding walk のくりこみ群が一般的に解決して初めて低次元格子上の self-avoiding walk のくりこみ群が可能になると思っているからである．

もう一つには，self-avoiding walk の問題を超えて，くりこみ群の描像は 21 世紀の解析学の中心課題になると信じており，Sierpiński gasket の上の self-avoiding walk はそのための (22 世紀には消えてしまうかもしれない) 踏み台の一つとして意味があると思っているからでもある．

講義の限界． この講義録は，内容的に新しい試みであり，従って，数年間繰り返すまでは，入れるべき題材を落としたり，Appendix に回すべき内容を本文に入れたり，冗長や逆に説明不足など，いろいろなレベルの不備があるはずである．そのことをふまえた上で利用していただきたい．

文献表もいかなる意味での完全性も意図していない．収録した文献の収録意図が文献によって異なる点で一貫性もない．

この講義録を初めて用意した年度に，この講義を行った名古屋大学大学院多元数理科学研究科において，関連する各方面の第一人者による他の講義があった．この講義に含み得た重要な題材のうち，これらの講義との関連・住み分けを考えて省いたものがある．

(i) くりこみ群の数学の中心課題であるスピン系の統計力学および block spin transformation くりこみ群の話題（原隆先生）．

(ii) 確率連鎖の漸近的性質のうち，連続極限としての連続な確率過程（連続関数上の確率測度）の性質としてとらえた方が自然な内容（長田博文先生）．

しかし，関連する全てを一つの講義に詰め込めば，講義は破綻する．従って，以上は，限界というよりはこの講義を特徴づけるのに役立っているというべきであろう．

講義を行ってみた結果，望ましいと考える改訂をいくつか見つけた（が，まだ着手していない）．

Notation． [12, Notation] に従って，$A_n \sim B_n$ を $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{B_n}=1$ の意味，$A_n \asymp B_n$ を $c_1 B_n \leqq A_n \leqq c_2 B_n$ なる $0<c_1\leqq c_2$ が存在すること，$A_n \approx B_n$ を $\log A_n \sim \log B_n$，の意味にそれぞれ使う．

このほか，通常の記号法として，$x\in\mathbb{R}$ に対して $[x]$ は x を越えない最大の整数，$x,y\in\mathbb{R}$ に対して $x\vee y=\max\{x,y\}$, $x\wedge y=\min\{x,y\}$ を使う．

1　１次元 random walk．

1.1　Mean square displacement，recurrence．

1.1.1　n 次元 simple random walk の定義．

$d\in\mathbb{N}$ として $\mathbb{Z}^d$ を考える．実 d 次元空間 $\mathbb{R}^d$ に埋め込んだときの姿から，以後 $\mathbb{Z}^d$ を d 次元格子空間という．

原点 0 の隣の格子点の集合を $S=\{x\in\mathbb{Z}^d \mid |x|=1\}$ とおくとき，S に値をとる i.i.d. [3] 確率変数列 $X_n:\Omega\to S$, $n\in\mathbb{Z}_+$, が S の $2d$ 個の要素全てを等しい確率 $\mathrm{P}[\,X_1=x\,]=(2d)^{-1}$, $x\in S$, でとるとする．これらと $x_0\in\mathbb{Z}^d$ の和で定義される確率変数列 $W_n=x_0+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}X_k$, $n\in\mathbb{Z}_+$, を d 次元 simple random walk という．[4] 一般に，

> 非負整数の添字で番号づけられた可算個の確率変数列 W_n, $n\in\mathbb{N}$, を確率連鎖と言い，n を時刻と言う．

d 次元 simple random walk は $\mathbb{Z}^d$ に値を取る（$\mathbb{Z}^d$ を状態空間とする）確率連鎖である．

さいころをふって格子点上を動くすごろく（あるいはでたらめに歩く酔っぱらい）という描像から random walk という名前が由来する．

$d=1$ の場合は実数値独立確率変数列の和の議論（で，$\{\pm1\}$ に値をとるもっとも単純な場合）に他ならない．Simple random walk という言葉を使うときは，特に，W_n という実数値の漸近的性質も見るが，さらに，path の性質，即ち $\{W_1,\cdots,W_n\}$ 全体に依存する性質「図形の確率論 (stochastic geometry)」に視点がある．背景には拡散現象の物理学や，より遠い背景には，臨界現象の統計力学からの刺激があり，更にその遠くには場の量子論からの興味も控えている．

[3] 以後，確率変数が独立同分布であることを i.i.d. と略記する．Independent identically distributed の略．

[4] これがきちんとした数学になるためには，そのような i.i.d. の列がどこかの確率空間上の確率変数列として存在する（つまり定義に矛盾がない）ことを言うべきであるが，直積測度空間の構成という測度論の議論によって，S の要素からなる数列ならぬ S 列の集合上に定義できることがわかる．以後，この種の注意に拘泥することをやめるが，気になる人は各自補充されたい．

'Simple' という形容詞のない random walk というとき何を指すかは，人によって多少の違いがあるように感じるが，もっとも広く言えば，Markov chain のことを指す.（Markov chain とは W_{n+1} が $W_n = a$ で条件付ければ W_k, $k = 1, \cdots, n-1$, と独立になることをいう.）いちばん広く使われる呼び方としては $\{W_n\}$ が独立確率変数列の部分和の列になっているときに random walk と呼ぶようである．この講義では simple random walk しか出てこないので，以下では簡単のため simple random walk のことを random walk と言うこともある．

次の性質は定義から直ちに出るが，非常に大事である (マルコフ性)：$\{W_n\}$ を SRW，m を非負整数とするとき，$\tilde{W}_n = W_{m+n} - W_m$, $n = 0, 1, 2, \cdots$, は原点を出発する SRW であって，$X_1, \cdots, X_m$ と独立である．この性質は暗黙のうちにいろんなところで使う．

1.1.2 大数の法則，中心極限定理，stopping time（復習）．

いったん random walk から離れて確率論の復習．確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ 上の確率変数列 X_n, $n \in \mathbb{N}$, に対して，$\{X_n\}$ が i.i.d. で $\mathrm{E}[\, X_1^2 \,] < \infty$ （従って，Schwarz の不等式から $\mathrm{E}[\, |X_1| \,] < \infty$，また，分散 $\mathrm{V}[\, X_1 \,] = \mathrm{E}[\, (X_1 - \mathrm{E}[\, X_1 \,])^2 \,] < \infty$）のときに，和 $W_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ について成り立つ性質を復習する．

W_n は分散有限な i.i.d. の和だから，大数の強法則と中心極限定理が成り立つ[5]．

命題 1 (大数の強法則，中心極限定理) $\{X_n\}$ が *i.i.d.* で $\mathrm{E}[\, X_1^2 \,] < \infty$ ならば，$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} W_n = \mathrm{E}[\, X_1 \,]$, *a.e.*, が成り立つ．また，$\frac{1}{\sqrt{n}}(W_n - n\mathrm{E}[\, X_1 \,])$ の分布は $n \to \infty$ のとき平均 0，分散 $v = \mathrm{V}[\, X_1 \,]$ の正規分布 $N(0, v)$ に弱収束する．

$N(0, v)$ は連続分布なので，このことから任意のボレル集合 A に対して

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}[\, \frac{1}{\sqrt{n}}(W_n - n\mathrm{E}[\, X_1 \,]) \in A \,] = N(0, v)(A) = \int_A e^{-x^2/(2v)} \frac{dx}{\sqrt{2\pi v}}$$

となる．

確率変数 $\tau : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ が stopping time であるとは，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $\{\tau \leqq n\}$ が $X_1, \cdots, X_n$ が生成する σ 加法族 $\mathcal{F}_n = \sigma[X_1, \cdots, X_n]$ の要素になっていることをいう．ここで $\sigma[X_1, \cdots, X_n]$ は $X_1, \cdots, X_n$ が生成する σ 加法族，即ち $X_i^{-1}(\mathcal{B}_1)$, $i = 1, \cdots, n$, たちを含む最小の σ 加法族.

即ち，τ が stopping time であるとは，時刻（無限大を許す）に値をとる確率変数であって，τ がある時刻になることがその時刻までの path によって決まることをいう．

$\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_3 \subset \cdots$ だから，τ が stopping time になることは

$$\{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

と同値である．

例 1 *(i)* 1次元 *simple random walk* W_n と $A \subset \mathbb{Z}$ に対して

$$\tau = \inf\{n \in \mathbb{Z}_+ \mid W_n \in A\} \tag{1}$$

なる τ を A の *hitting time* という（条件不成立なら $\tau = \infty$ の約束）．*Hitting time* は *stopping time* である．

(ii) 定数関数は *stopping time* である．

S, T が *stopping time* ならば $S \wedge T$, $S \vee T$ も *stopping time*. 特に，n を定数とするとき $T \wedge n$, $T \wedge n$ も *stopping time*. しかし，$S + T$ は *stopping time* とは限らない．

◇

注 1 情報は σ 加法族で決まるので，一般に，以上の定義を次のように拡張する．可測空間 $(\Omega, \mathcal{F})$ と $\mathcal{F}$ の部分 σ 加法族の列で増大するもの $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_3 \subset \cdots$ が与えられたとき，$\tau : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ が *stopping time* であるとは，

$$\{\tau \leqq n\} \in \mathcal{F}_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

が成り立つことをいう．

Stopping time は σ 加法族の増大列によって定まるので，σ 加法族列が複数出てくるときは $\{\mathcal{F}_n\}$–*stopping time* とも書く． ◇

[5] 4 次のモーメントも有限ならば，大数の強法則はやさしい証明が成り立つことも思い出しておくとよい．

問 1 定数関数が *stopping time* であることを確認せよ． ◇

Stopping time の一つの興味深い使い方は W_τ という確率変数の期待値を考えるときである．ここで W_τ は $W_\tau(\omega) = W(\omega)_{\tau(\omega)}$, $\omega \in \Omega$, なる，確率変数 $W_\tau:\ \Omega \to \mathbb{Z}$.

問 2 W_τ が確率変数（即ち可測関数）であることを確認せよ．
（*Stopping time* の定義は，W_τ が可測関数になるようにできている！） ◇

定理 2 (Wald) $\{X_n\}$ が *i.i.d.* で $\mathrm{E}[\,|X_1|\,] < \infty$ とし，$\mathcal{F}_n = \sigma[X_1, \cdots, X_n]$, $W_n = X_1 + \cdots + X_n$, $n \in \mathbb{N}$ とおく．τ は $\mathrm{E}[\,\tau\,] < \infty$ を満たす $\{\mathcal{F}_n\}$–*stopping time* とする．このとき

$$\mathrm{E}[\,W_\tau\,] = \mathrm{E}[\,X_1\,]\mathrm{E}[\,\tau\,].$$

証明．$\mathrm{E}[\,\tau\,] < \infty$ だから $\tau \neq \infty$, a.s. に注意．即ち，最初から $\tau \in \mathbb{N}$ としてよいので，$\chi_\Omega = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{\tau=n}$, a.s.

[8, §3.1 Theorem (1.6)] に従う．まず $X_k \geqq 0$, $k = 1, \cdots, n$, の場合を扱う．和の順序交換が自由になるので

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[\,W_\tau\,] &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{E}[\,W_n \chi_{\tau=n}\,] = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}[\,X_k \chi_{\tau=n}\,] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty} \mathrm{E}[\,X_k \chi_{\tau=n}\,] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{E}[\,X_k \chi_{\tau \geqq k}\,].\end{aligned}$$

ここで，$\{\tau \geqq k\} = \{\tau < k-1\}^c \in \mathcal{F}_{k-1}$ だから，特に X_k と独立であることに注意し，また $\mathrm{E}[\,X_k\,] = \mathrm{E}[\,X_1\,]$ だから，

$$\mathrm{E}[\,W_\tau\,] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{E}[\,X_k\,]\mathrm{P}[\,\tau \geqq k\,] = \mathrm{E}[\,X_1\,]\mathrm{E}[\,\tau\,].$$

一般の場合，この結果，特に $|X_k|$ に対して以上の証明が成り立つので，

$$\infty > \mathrm{E}[\,|X_1|\,]\mathrm{E}[\,\tau\,] = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty} \mathrm{E}[\,|X_k|\chi_{\tau=n}\,].$$

従って，元の級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{E}[\,W_n \chi_{\tau=n}\,]$ は絶対収束するので，和の順序交換がやはり自由になり，よって $\mathrm{E}[\,W_\tau\,] = \mathrm{E}[\,X_1\,]\mathrm{E}[\,\tau\,]$ を得る． □

1.1.3 Mean square displacement．

以下この節 §1 では $d = 1$ の場合（１次元 simple random walk）を扱う．

即ち，確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ が与えられたとして，その上で，$\{X_n\}$ を i.i.d. で ± 1 を確率 1/2 でとる確率変数列とし，$W = (W_1, W_2, \cdots)$ を $W_n = x_0 + \sum_{k=1}^{n} X_k$, $n \in \mathbb{Z}_+$, 即ち，$x_0 \in \mathbb{Z}$ から出発する simple random walk，とする．x_0 は特に断らなければ 0 にとることが多い．

見本 $\omega \in \Omega$ に対する $W(\omega)$ や $(W_1, \cdots, W_n)(\omega)$ を平面内の折れ線に翻訳することができる．

平面内の連続した折れ線グラフで $(0, x_0)$ から出発して傾き $\pm 45°$ で長さ $\sqrt{2}$ の線分を x 軸正方向につないでつくったものを walk または path と言う．Random walk のイメージから各要素線分を 1 歩という．Path の全体を $\mathcal{W}$ とおく．そのうち最初の n 歩の部分を n 歩の path と呼んで，その全体を $\mathcal{W}_n$ とおく．$\sharp\mathcal{W}_n = 2^n$ は明らか．

$\omega \in \Omega$ を１つとる．$k = 1, 2, \cdots$ に対して $(k-1, W_{k-1}(\omega))$ と $(k, W_k(\omega))$ を結んで折れ線グラフをつくることで $W:\ \Omega \to \mathcal{W}$ なる対応を得る．また，各 $n \in \mathbb{Z}_+$ 毎に $(W_1, \cdots, W_n):\ \Omega \to \mathcal{W}_n$ なる対応がある．定義から全ての n 歩の path がそれぞれ確率 2^{-n} で現れる．

簡単のため出発点 $x_0=0$ とする．W_n の漸近的性質でもっとも基本的なものは mean square displacement $\mathrm{E}[\,W_n^2\,]$ であろう（ $\mathrm{E}[\,W_n\,]=0$ だから 2 次のモーメントが最初の自明でない量）．定義を用いて，$\{X_n\}$ の独立性と $\mathrm{E}[\,X_n\,]=0$ と $X_n^2=1$ に注意すると，

$$\mathrm{E}[\,W_n^2\,]=\sum_{i\neq j}\mathrm{E}[\,X_iX_j\,]+\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}[\,X_i^2\,]=n,\quad n\in\mathbb{N},$$

を得る．

> 一般に，実数値確率変数列 W_n に対して（random walk に対して），n,p によらない正数 C_1,C_2, ν が存在して $C_1n^{p\nu}\leqq\mathrm{E}[\,W_n^p\,]\leqq C_2n^{p\nu}$ が全ての $n\in\mathbb{N}$ と $p>0$ に対して成り立つとき， W_n の mean square displacement の exponent (the end-to-end distance exponent) は ν である，という．

（このことを $\mathrm{E}[\,W_n^p\,]\asymp n^{p\nu}$ と書くことにする．）Simple random walk の mean square displacement の exponent は $\dfrac{1}{2}$ である．大ざっぱに言えば mean square displacement の exponent が ν ということは $|W_n|$ が n^ν 程度の範囲に分布していることを意味すると考えられるだろう．まっすぐ進めば $W_n=n$ で exponent は 1 だが，全く動かないならば $\nu=0$ である．正方形の格子点を埋め尽くすように進めば $\nu=1/2$ である．つまり，simple random walk は 2 次元的な path と見ることができそうである．

逆に本当に「 $|W_n|$ が $n^{1/2}$ 程度」ならば，単に $\mathrm{E}[\,W_n^2\,]\sim n$ だけでなく，

$$\mathrm{E}[\,|W_n|^{2p}\,]\sim C_pn^p \tag{2}$$

が全ての $p>0$ で成り立つはずである (C_p は p のみできまる定数).

まず， ℓ が自然数のときの $\mathrm{E}[\,W_n^{2\ell}\,]$ の漸近形は初等的にできる．実際， $\ell=1$ は既にやったが， $\ell=2$ のときも同様にやると，

$$\mathrm{E}[\,W_n^4\,]=3\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{\substack{1\leqq k_2\leqq n\\ k_2\neq k_1}}\mathrm{E}[\,X_{k_1}^2\,]\mathrm{E}[\,X_{k_2}^2\,]+\sum_{k=1}^{n}\mathrm{E}[\,X_k^4\,]=3n^2-2n.$$

一般に， $\ell=1,2,\cdots$ に対して

$$\mathrm{E}[\,W_n^{2\ell}\,]=(2\ell-1)!!\,n^\ell\,(1+O(n^{-1})),\quad n\to\infty. \tag{3}$$

よって， (2) が自然数に対しては成り立つ．p が自然数でないときは初等的にはできない．

中心極限定理 命題 1 から， $\dfrac{1}{\sqrt{n}}W_n$ の分布は $n\to\infty$ のとき標準正規分布 $N(0,1)$ に弱収束するので，Z が $N(0,1)$ を分布に持つ確率変数， f が有界連続関数のとき，

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{E}[\,f(n^{-1/2}W_n)\,]=\mathrm{E}[\,f(Z)\,].$$

[6] $M>0$ に対して $f_M(x)=(|x|\wedge M)^{2p}$ とおく[7] と

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{E}[\,(n^{-1/2}|W_n|)^{2p}\wedge M^{2p}\,]=\mathrm{E}[\,|Z|^{2p}\wedge M^{2p}\,]. \tag{4}$$

$M\to\infty$ とすればよいが，そのためには大きいところからのモーメントへの寄与が小さいことを言う必要がある．以下それを示す．

> Hölder の不等式：$p^{-1}+q^{-1}=1$, $1<p<\infty$, のとき $\|X\|_p<\infty$, $\|Y\|_q<\infty$ ならば $\mathrm{E}[\,|XY|\,]\leqq\|X\|_p\,\|Y\|_q$．ここで $\|X\|_p=\mathrm{E}[\,|X|^p\,]^{1/p}$.

注 2 *Hölder* の不等式の自明な使い方の一つに $Y=1$ とおく方法がある．これは発散する X_n に対しては指数を損するが，$n^{-a}X_n$ が有界に近いならば，これを X として使うことにより，指数に関して損のない不等式を得る．これがここでの使い方． ◇

[6] 特に特性関数の各点収束 (tightness argument から実際は広義一様収束) を得る：

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{E}[\,e^{\sqrt{-1}t\sqrt{n}^{-1}W_n}\,]=e^{-t^2/2},\quad t\in\mathbb{R}.$$

しかし，これの微分 (モーメント) の収束は得られるか？L^1 収束よりは弱いが，弱収束から期待値の収束は自明ではない．

[7] $a\wedge b=\min\{a,b\}$.

$\ell > 2p$ なる自然数 ℓ をとると，Hölder の不等式 ($Y = 1$，p を $\ell/(2p)$ として適用) と (3) から

$$\mathrm{E}[\,(n^{-1/2}|W_n|)^{4p}\,] \leqq \Big(\mathrm{E}[\,(n^{-1/2}|W_n|)^{2\ell}\,]\Big)^{2p/\ell} = ((2\ell-1)!!)^{2p/\ell}\,(1+O(n^{-1}))$$

だから

$$C = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{E}[\,(n^{-1/2}|W_n|)^{4p}\,] < \infty.$$

よって Schwarz の不等式から，任意の $\epsilon > 0$ に対して $\mathrm{P}[\,|n^{-1/2}W_n| \geqq M\,] \leqq \epsilon^2/C$ ならば

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}[\,|n^{-1/2}W_n|^{2p};\ |n^{-1/2}W_n| \geqq M\,] = \mathrm{E}[\,|n^{-1/2}W_n|^{2p}\,\chi_{|n^{-1/2}W_n|\geqq M}\,]\\ &\leqq \sqrt{\mathrm{E}[\,|n^{-1/2}W_n|^{4p}\,]\,\mathrm{P}[\,|n^{-1/2}W_n| \geqq M\,]} \leqq \epsilon.\end{aligned}$$

また，チェビシェフの不等式から

$$M^{4p}\,\mathrm{P}[\,|n^{-1/2}W_n| \geqq M\,] \leqq \mathrm{E}[\,|n^{-1/2}W_n|^{4p}\,] \leqq C$$

なので， $M > (C/\epsilon)^{1/2p}$ にとれば $\mathrm{P}[\,|n^{-1/2}W_n| \geqq M\,] \leqq \epsilon^2/C$ となる．このとき，

$$0 \leqq \mathrm{E}[\,|n^{-1/2}W_n|^{2p}\,] - \mathrm{E}[\,|n^{-1/2}W_n|^{2p} \wedge M^{2p}\,] \leqq \mathrm{E}[\,|n^{-1/2}W_n|^{2p};\ |n^{-1/2}W_n| \geqq M\,] \leqq \epsilon.$$

$\mathrm{E}[\,|Z|^{2p}\,] - \mathrm{E}[\,|Z|^{2p} \wedge M^{2p}\,]$ についても同様にできる．これらを (4) と合わせれば

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}[\,|n^{-1/2}W_n|^{2p}\,] = \mathrm{E}[\,|Z|^{2p}\,] < \infty \tag{5}$$

を得る．よって (2) が成り立つ.

1.1.4 区間からの脱出 (classical ruin problem)，再帰性．

[10, vol. 1 XIV 章] では classical ruin problem と呼んでいる．

定理 2 を simple random walk に適用する．0 をはさんで 2 つの整数 $-a < 0 < b$ をとる．0 から出発する simple random walk が（行ったり来たりしながらやがて） $-a$ または b にたどり着いたらそこで止まる，という状況を考える．硬貨を投げて表なら右裏なら左に行くすごろくで，$-a$ に着いたら A の勝ち，b に着いたら B の勝ち，というゲームを想像すればよい．問題は，A, B それぞれの勝つ確率である．

言い換えると，simple random walk を stopping time $\tau = \inf\{n \in \mathbb{N} \mid W_n \in \{-a, b\}\}$ までの時間で見ることになる．定理 2 が使えるには $\mathrm{E}[\,\tau\,] < \infty$ が必要だが，その証明を後回しにして， 定理 2 を使うと，$\mathrm{E}[\,X_1\,] = 0$ なので，

$$b\mathrm{P}[\,W_\tau = b\,] - a\mathrm{P}[\,W_\tau = -a\,] = \mathrm{E}[\,W_\tau\,] = \mathrm{E}[\,X_1\,]\mathrm{E}[\,\tau\,] = 0\,.$$

($\mathrm{E}[\,\tau\,] < \infty$ なので $\tau \in \mathbb{N}$, a.e., に注意．) $\mathrm{P}[\,W_\tau = b\,] + \mathrm{P}[\,W_\tau = -a\,] = 1$ と合わせると，

$$\mathrm{P}[\,W_\tau = -a\,] = \frac{b}{a+b},\quad \mathrm{P}[\,W_\tau = b\,] = \frac{a}{a+b}\,. \tag{6}$$

こうやってこのすごろくの勝敗確率が計算できる！ちょうど内分点をベクトル表示するときの係数と等しくなっていて，覚えやすい.

問 3 電気抵抗回路網 *§5.3* で理解するのが簡単だろうと思うが未確認．確認していただきたい． ◇

残っていた $\mathrm{E}[\,\tau\,] < \infty$ の証明.

$-a < x < b$ ならば $a+b$ 歩まっすぐ進めば必ず開区間 $(-a, b)$ から出るので，$\mathrm{P}[\,(x+W_{a+b}) \in (-a,b)\,] \leqq 1 - 2^{-(a+b)}$．このまっすぐ進行評価を n 回繰り返すと，$\{X_n\}$ の独立性（ $\{W_n\}$ のマルコフ性）を使って，$\mathrm{P}[\,\tau > n(a+b)\,] \leqq (1-2^{-(a+b)})^n$．特に，

$$\mathrm{P}[\,\tau = \infty\,] = \mathrm{P}[\,\bigcap_{n=1}^{\infty} \tau > n(a+b)\,] = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}[\,\tau > n(a+b)\,] = 0\,.$$

よって

$$\mathrm{E}[\,\tau\,] = \sum_{m=1}^{\infty} m\,\mathrm{P}[\,\tau = m\,] = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{(a+b)(n-1)<m\leqq(a+b)n} m\,\mathrm{P}[\,\tau = m\,] \leqq \sum_{n=1}^{\infty} (a+b)^2 n (1-2^{-(a+b)})^{n-1} < \infty.$$

特に，このことから，1 次元 simple random walk が各点にいつかは到達するか？という問に答えられる．

$T_a = \inf\{n \in \mathbb{N} \mid W_n = -a\}$, $T_b = \inf\{n \in \mathbb{N} \mid W_n = b\}$ とおくと (6) は $\mathrm{P}[\, T_a < T_b \,] = \dfrac{b}{a+b}$ を意味する．ここで $b \to \infty$ とすると，

$$\mathrm{P}[\, T_a < \infty \,] \geqq \sup_{b>0} \mathrm{P}[\, T_a < T_b \,] = 1, \quad a < 0\,.$$

対称性と $T_0 = 0$ から全ての $x \in \mathbb{Z}$ に対して，$T_x < \infty$, a.e., 即ち，

> 1 次元 simple random walk はどの点も殆ど必ず hit する．このことを「1 次元 simple random walk は再帰的 (recurrent) である」と言う．[8]

高次元 random walk の場合にどうなるかが §2 の一つの興味である．

一方，hit するまでの平均時間は（最初から hit している原点以外は）∞ であることも分かる．なぜなら，もし $\mathrm{E}[\, T_x \,] < \infty$ ならば定理 2 から $x = \mathrm{E}[\, W_{T_x} \,] = \mathrm{E}[\, X_1 \,]\mathrm{E}[\, T_x \,] = 0$ となって，$x \neq 0$ では矛盾するから．

1.2 Reflection principle, arcsine law．

簡単のためここでは random walk の出発点 $W_0 = x_0 = 0$ とおく．この §1.2 では，

> $n \in \mathbb{N}$ に対して，$2n$ 歩で出発点 $W_0 = 0$ に戻る確率
>
> $$u_{2n} = \mathrm{P}[\, W_{2n} = 0 \,], \tag{7}$$
>
> および，$2n$ 歩で出発点へ初めて戻る確率
>
> $$f_{2n} = \mathrm{P}[\, W_1 \neq 0, \cdots, W_{2n-1} \neq 0, W_{2n} = 0 \,], \tag{8}$$

について調べる．arcsine 法則とは，ある期間内に出発点に最後に戻ってくる時刻と滞在時間の分布の漸近形に関する主張である．

以下の詳細な話は random walk の連続極限であるブラウン運動で成り立つため，確率過程論の初等的な話題として興味がある．1 次元のみ初等的に証明できるので以下に紹介する．高次元では対応する議論は試みないが，最初の reflection principle は random walk を越えて随所で使われる普遍的方法である．

§1.1.1 に説明したように， simple random walk $\{W_n\}$ の sample を平面内の折れ線 (path) に対応させることができて，n 歩目までの各 path は 2^{-n} の確率で現れる．

1.2.1 Path の本数．

$n \in \mathbb{N}$ と $x_0 \in \mathbb{Z}$ に対して $\mathbb{Z}$ の列 $(x_0, x_1, \cdots, x_n)$ で $|x_i - x_{i-1}| = 1$, $i = 1, \cdots, n$, を満たすものを (x_0 を出発点とする $\mathbb{Z}$ 上の)n 歩の path と呼び，$\mathcal{W}_n$ をそのような path を全て集めた集合とする．$\sharp\mathcal{W}_n = 2^n$ に注意．断らなければ，以下 $x_0 = 0$ とする．

$n \in \mathbb{N}$ と $x \in \mathbb{Z}$ に対して

$$N_{n,x} = \sharp\{(0, x_1, \cdots, x_n) \in \mathcal{W}_n \mid x_n = x\}$$

とおく．右辺の集合は，平面内の $(0,0)$ から (n,x) への折れ線 (これも path と言うことにする) であって，1 歩進む毎に横方向に 1，縦方向に ± 1 進むもの，の集合．(ここでは 1 次元 RW のためだけの便宜として，第 1 成分を時刻または歩数として「横方向」，第 2 成分を $\mathbb{Z}$ 上の位置として,「縦方向」と名付けた.) そのような path の総数を $N_{n,x}$ とおいた．

$a = (n+x)/2$, $b = (n-x)/2$ とおけば $n = a+b$, $x = a-b$ であるから，a, b がそれぞれ上，下（数直線上の双六なら右，左？）に進んだ回数．よって

$$N_{n,x} = \begin{cases} \begin{pmatrix} n \\ (n+x)/2 \end{pmatrix}, & n \equiv x \pmod 2, \\ 0, & n \not\equiv x \pmod 2. \end{cases} \tag{9}$$

次の命題は，単純ながら，path の到達点と本数の関係を調べるときに有効な普遍的方法である．

[8] 実際は 1 次元 simple random walk では recurrence は $0-1$ 法則からすぐ分かる [8, §3.1].

命題 3 (Reflection principle) *$n, x, y \in \mathbb{N}$ ならば，$(0,-x)$ から (n,y) への path の本数は，$(0,x)$ から (n,y) への path のうち横軸 (時間軸) と原点以外で交点を持つ（触る）ものの本数に等しい．*

証明．$(0,-x)$ から (n,y) への path を (i,s_i), $i=0,\cdots,n$, とする（$s_0=-x$, $s_n=y$）．$-x<0$, $y>0$ なので必ず横軸を横切る．はじめて横軸を横切る時を K （$s_K=0$）とする： $K=\inf\{k\in\mathbb{N}\mid s_k=0\}$．時刻 K までの path を横軸に関して対称移動すれば $(0,x)$ から (n,y) への path を得る．この変換は明らかに単射かつ全射であるから，主張を得る． □

Reflection principle は非常に応用性のある性質である．Law of iterated logarithm への応用は 系 96 を参照．

命題 4 以下が成り立つ．

(i) $x\neq 0$ のとき $(0,0)$ から (n,x) への *path* のうち $(0,0)$ 以外では横軸に触らないものの総数は $\dfrac{|x|}{n}N_{n,|x|}$．
（$x>0$ のときは常に正の側にあるものの総数，$x<0$ のときは常に負の側にあるものの総数）．

(ii) $x\neq 0$ のとき $(0,0)$ から (n,x) への *path* のうち n 歩目で初めて x に到達するものの総数は $\dfrac{|x|}{n}N_{n,|x|}$．
（ $x>0$ のとき，到達点以外は x より小さい点しか通らないものの総数．$x<0$ のときも同様.）

(iii) $(0,0)$ から $(2n,0)$ への *path* のうち，正の点を通り，$2n$ 歩目で初めて 0 に戻るものの総数は，$\dfrac{1}{n}\begin{pmatrix}2n-2\\n-1\end{pmatrix}$.

(iv) $(0,0)$ から $(2n,0)$ への *path* のうち負の点に触らないものの総数は $\dfrac{1}{n+1}\begin{pmatrix}2n\\n\end{pmatrix}$.

証明．(i) $x<0$ も同様なので $x>0$ とする．条件を満たす path は $(1,1)$ から (n,x) への path のうち横軸を触らないもの．$x=a-b$, $n=a+b$ とおくと，reflection principle 命題 3 によって，これは次に等しい．

$$N_{n-1,x-1}-N_{n-1,x+1}=\begin{pmatrix}n-1\\a-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}n-1\\a\end{pmatrix}=\frac{a-b}{a+b}N_{n,x}.$$

(ii) (n,x) を平行移動で原点にして横軸を反転 $(t'=-t)$ させれば上の問題に帰着する

(iii) 条件を満たす path は $(2n-1,1)$ を通り $(0,0)$ 以外では横軸に触らない path の本数と等しいから既に証明したことと (9) と二項係数の性質による．

(iv) 上の結果で平行移動で $(1,1)$ を原点に取り直す（横軸 (時間軸)，縦軸 (空間軸) を $+1$ ずらす）と，$\dfrac{1}{n}\begin{pmatrix}2n-2\\n-1\end{pmatrix}$ は $(0,0)$ から $(2n-2,0)$ への path で負の点に触らないものの総数に等しいことがわかる．

□

$\mathcal{W}_n$ と SRW $\{W_n\}$ を関係づける．SRW の n 歩目まで $(W_0,\cdots,W_n)$ のサンプルは定義から $\mathcal{W}_n$ の要素でちょうど尽くされることは明らか．しかも，X_n が i.i.d. であることと $\mathrm{P}[\,X_1=1\,]=\mathrm{P}[\,X_1=-1\,]=1/2$ であることから，$\mathrm{P}[\,(W_0\cdots,W_n)=w\,]=2^{-n}$, $w\in\mathcal{W}_n$, 即ち，

> SRW の n 歩目まで $(W_0\cdots,W_n)$ の (結合) 分布は n 歩の path 集合 $\mathcal{W}_n$ 上の一様分布である．
> 平たく言えば，SRW がある (n 歩目までで決まる) 性質を満たす確率は，その性質を持つ n 歩の path の本数を $\sharp\mathcal{W}_n=2^n$ で割った値に等しい．

よって，例えば ($x_0=0$ として) $\mathrm{P}[\,W_n=x\,]=N_{n,x}/2^n$ 等となる．こうして SRW の計算は path の数を数えるという組み合わせ論の問題に（原理的には）帰着した．

Reflection principle の応用の有名な例題として，選挙のとき常にリードを保ったまま勝つ確率がある．

定理 5 (The Ballot Theorem[9]) *二人の候補者 A, B について一票ずつ開票して最後にそれぞれ a, b 票ずつ得票して A が勝つ $(a>b)$ とする．A が常にリードしながら勝つ票の出方 (A, B の並び方) の総数と経過は問わずにとにかく $a>b$ で勝つ票の出方の総数の比は $\dfrac{a-b}{a+b}$ である[10]．*

[10] [10, vol. 1 §3.3] によれば 1878 年に初めて証明されたとのこと．

証明. $x=a-b$, $n=a+b$ とおくと，票の出方の総数は $N_{n,x}$ である．常にリードしながら勝つ票の出方は $(0,0)$ から (n,x) への path のうち $(0,0)$ 以外では x 軸に触らないものの総数と等しい．よって，この定理は命題 4 から直ちに得られる． □

1.2.2 Simple random walk の確率の計算．

Arcsine law を証明するために次の 2 つの補題を用意する[11]．

補題 6 *(i)* $2n$ 歩で出発点 $W_0=0$ に戻る確率 *(7)* は

$$u_{2n}=\mathrm{P}[\,W_{2n}=0\,]=2^{-2n}N_{2n,0}=\begin{pmatrix}2n\\n\end{pmatrix}2^{-2n}\quad n=0,1,2,\cdots. \tag{10}$$

(ii) $1-\displaystyle\sum_{k=1}^{n}f_{2k}=\mathrm{P}[\,W_1\neq 0,\cdots,W_{2n}\neq 0\,]=\mathrm{P}[\,W_{2n}=0\,]=u_{2n}$.

(iii) $2n$ 歩で出発点へ初めて戻る確率 *(8)* は $f_{2n}=u_{2n-2}-u_{2n}=\dfrac{1}{2n-1}u_{2n}=\dfrac{1}{2n}u_{2n-2}$.

(iv) n 歩目で初めて x に到達する確率は $h_n(x)=\dfrac{|x|}{n}N_{n,|x|}2^{-n}$．特に $h_{2n}(2k)=\begin{pmatrix}2n\\n+|k|\end{pmatrix}2^{-2n}-\begin{pmatrix}2n-1\\n+|k|\end{pmatrix}2^{-2n+1}$.

証明． (i) Simple random walk ではどの n 歩の path も出現する確率は 2^{-n} なので,

$$\mathrm{P}[\,W_{2n}=2k\,]=2^{-2n}N_{2n,2k}=\begin{pmatrix}2n\\n+k\end{pmatrix}2^{-2n},\quad k=0,1,\cdots,n,\ n\in\mathbb{Z}_+. \tag{11}$$

これより最初の主張は明らか.

(ii) 最初の等号は f_{2k} の定義と，奇数歩目には 0 に戻らないことから明らか．従って，これは,

$$2\mathrm{P}[\,W_1>0,\cdots,W_{2n}>0\,]=2\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{P}[\,W_1>0,\cdots,W_{2n-1}>0,W_{2n}=2k\,]$$

に等しい．$p_{n,x}=\mathrm{P}[\,W_n=x\,]=N_{n,x}2^{-n}$ とおくと，$(0,0)$ から $(2n,2k)$ まで行く path で正時刻に 0 に戻らないものは 命題 4 と同様に $N_{2n-1,2k-1}-N_{2n-1,2k+1}$ に等しいから,

$$2\mathrm{P}[\,W_1>0,\cdots,W_{2n-1}>0,W_{2n}=2k\,]=p_{2n-1,2k-1}-p_{2n-1,2k+1}\,.$$

よって主張の左辺は，$p_{2n-1,1}$ に等しいが，対称性からさらに

$$p_{2n-1,1}=\frac{1}{2}(p_{2n-1,1}+p_{2n-1,-1})=\mathrm{P}[\,W_{2n}=0\,].$$

(iii) 最初の等号は上の結果から明らか．これに具体形 (10) を適用すれば残りも明らか.

(iv) 最初の等号は 命題 4 (2) より明らか．残りは (9) から明らか.

□

注 3 最後の主張で,「n 歩目で x にいる *path* のうちで」という条件をつければ初めて x に到達する割合（条件付き確率）は *Ballot theorem* より $\dfrac{|x|}{n}$ である． ◇

---

[10] Ballot とは (無記名) 投票 (用紙) のこと．
[11] これ以後，hitting time で条件付けて，独立性を使って確率を分解した後，hitting time を時刻の原点に取り直す，という式変形を証明に用いるが，この変形ができることを simple random walk の (強)Markov 性という．

定理 7 (最終訪問時刻の arcsine law) $L_{2n}=\sup\{m\in\{0,1,\cdots,2n\}\mid W_m=0\}$ とおく（最後の帰還時刻）とき，$\mathrm{P}[\,L_{2n}=2k\,]=u_{2k}u_{2n-2k}$.

証明. $\mathrm{P}[\,L_{2n}=2k\,]=\mathrm{P}[\,W_{2k}=0,W_{2k+1}\neq 0,\cdots,W_{2n}\neq 0\,]$ だから，独立性と 補題 6 から明らか. □

滞在時間の検討に移る.

Hitting time $\tau_x=\min\{n>0\mid W_n=x\}$ を $x\in\mathbb{Z}$ に対して定義する.

補題 6 を hitting time で書き直すと同時に u_{2n} と f_{2n} のいくつかの見方を書いておく.

系 8 *(i)* $\mathrm{P}[\,\tau_0>2n\,]=u_{2n}$.

(ii) $f_{2n}=\mathrm{P}[\,\tau_0=2n\,]$.

(iii) $f_{2n}=\mathrm{P}[\,\tau_{-1}=2n-1\,]=\mathrm{P}[\,\tau_1=2n-1\,]=\mathrm{P}[\,W_k\geqq 0,\ k=0,1,\cdots,2n-2,\ W_{2n-1}=-1\,]$.

(iv) $u_{2n}=\mathrm{P}[\,\tau_{-1}>2n\,]=\mathrm{P}[\,\tau_1>2n\,]=\mathrm{P}[\,W_k\geqq 0,\ k=0,1,\cdots,2n\,]$.

証明. (i) $\{\tau_0=n\}=\{W_1\neq 0,\cdots,W_{n-1}\neq 0,W_n=0\}$ なので， 補題 6 の最初の主張から明らか.

(ii) f_{2n} の定義より明らか.

(iii) 右辺は独立性から $(0,0)$ から $(2n-2,0)$ への path のうち負の点に触らないものの確率の半分である. 命題 4，補題 6(3) と (10) によって，これは左辺に等しい.
あるいは次のように直接的にも証明できる. 独立性と $y=1$ で折り返す reflection principle と (11) から

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{P}[\,\tau_1=2n-1\,]=\mathrm{P}[\,W_1\leqq 0,\cdots,W_{2n-3}\leqq 0,W_{2n-2}=0\,]\mathrm{P}[\,W_1=1\,]\\
&=\frac{1}{2}(\mathrm{P}[\,W_{2n-2}=0\,]-\mathrm{P}[\,W_{2n-2}=0,\ \exists k\in\{1,2,\cdots,2n-3\};\ W_k=1\,])\\
&=\frac{1}{2}(\mathrm{P}[\,W_{2n-2}=0\,]-\mathrm{P}[\,W_{2n-2}=2\,])=2^{-2n+1}(\binom{2n-2}{n-1}-\binom{2n-2}{n})=\frac{1}{2n}u_{2n-2}\\
&=f_{2n}.
\end{aligned}
$$

最後の変形で補題 6(3) を用いた.

(iv) 補題 6(2) より

$$
u_{2n}=1-\sum_{k=1}^{n}f_{2k}=1-\sum_{k=1}^{n}\mathrm{P}[\,\tau_1=2k-1\,]=\mathrm{P}[\,\tau_1>2n\,].
$$

□

注 4 以上によって，$2n$ 歩で初めて 0 に戻る確率 *(first return)* f_{2n} は $2n-1$ 回目で初めて負になる確率に等しく，$2n$ 歩に 0 に戻る確率 u_{2n} は $2n$ 回目までの時点で 0 に戻らない確率に等しく，さらにこれは $2n$ 回目までの時点で負にならない確率にも等しい，ということが分かった. ◇

補題 9 (Simple random walk の renewal equation) $u_{2n}=\sum_{\ell=1}^{n}f_{2\ell}u_{2n-2\ell}$.

証明. 独立性と 系 8 (2) から，

$$
\begin{aligned}
u_{2n}&=\mathrm{P}[\,W_{2n}=0\,]=\sum_{\ell=1}^{n}\mathrm{P}[\,\tau_0=2\ell,W_{2n}=0\,]=\sum_{\ell=1}^{n}\mathrm{P}[\,\tau_0=2\ell\,]\mathrm{P}[\,W_{2n-2\ell}=0\,]\\
&=\sum_{\ell=1}^{n}f_{2\ell}u_{2n-2\ell}.
\end{aligned}
$$

□

定理 10 (滞在時間の arcsine law) η_{2n} を，$[0,2n]$ の時間帯に正の側にいる単位線分の本数（$W_t>0$ となる時間幅）とする．即ち，

$$\eta_{2n}=\sharp\{k\in[0,2n)\mid W_k\vee W_{k+1}>0\}.$$

このとき $\mathrm{P}[\,\eta_{2n}=2k\,]=u_{2k}u_{2n-2k},\ k=0,1,\cdots,n.$

（従って，$\eta_{2n}/(2n)$ も $n\to\infty$ で $L_{2n}/(2n)$ と同じ分布に法則収束する．つまり,「正または負一方に偏る」のが普通.）

証明. 補題 9 から

$$\mathrm{P}[\,\eta_{2n}=0\,]=\mathrm{P}[\,\tau_1>2n\,]=u_{2n}=u_0u_{2n}\,.$$

よって $k=0$ のとき主張は成り立つ．対称性から $k=n$ についても主張は成り立つ．特に $n=1$ のときは全ての k について主張が成り立つ.

$n-1$ まで主張が成り立つとする．独立性と帰納法の仮定と 系 8 (2) と補題 9 から

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}[\,\eta_{2n}=2k\,]&=\sum_{\ell=1}^{n}\sum_{e\in\{-1,1\}}\mathrm{P}[\,W_1=e,\tau_0=2\ell,\eta_{2n}=2k\,]\\
&=\sum_{\ell=1}^{n}(\mathrm{P}[\,W_1=1,\tau_0=2\ell\,]\mathrm{P}[\,\eta_{2n-2\ell}=2k-2\ell\,]+\mathrm{P}[\,W_1=-1,\tau_0=2\ell\,]\mathrm{P}[\,\eta_{2n-2\ell}=2k\,])\\
&=\sum_{\ell=1}^{n}(\frac12 f_{2\ell}u_{2k-2\ell}u_{2n-2k}+\frac12 f_{2\ell}u_{2k}u_{2n-2k-2\ell})\\
&=\frac12 u_{2n-2k}\sum_{\ell=1}^{k}f_{2\ell}u_{2k-2\ell}+\frac12 u_{2k}\sum_{\ell=1}^{n-k}f_{2\ell}u_{2n-2k-2\ell}\\
&=u_{2k}u_{2n-2k}
\end{aligned}$$

となって， n のときも成り立つ.

□

最後に，１点の滞在時間についても言及しておく．$2n$ 回目に m 回目の原点復帰を果たす確率を $f_{2n}^{(m)}$ とおく.

補題 11 $f_{2n}^{(m)}=h_{2n-m}(m)=\begin{pmatrix}2n-m\\ n\end{pmatrix}2^{-2n+m}-\begin{pmatrix}2n-m-1\\ n\end{pmatrix}2^{-2n+m+1}$. ここで， $h_n(x)$ は補題 *6 (4)* のとおり．また，最後の等号は $m=n$ のときは 2 項目を 0 とし，$m>n$ ならば $f_{2n}^{(m)}=0$ とする.

証明. 最初の等号は m についての帰納法で証明する．$m=1$ のとき，左辺は f_{2n}．条件（$2n$ 歩で初めて原点に帰る）を満たす path のうち負の側を通るものについて $(-1,-1)$ ずらすと，1 歩目から先の path は $2n-1$ 歩で初めて $+1$ に達する path と 1 対 1 に対応する．正の側を通るものも同様．よって $f_{2n}=\frac12(h_{2n-1}(1)+h_{2n-1}(-1))=h_{2n-1}(1)$．即ち $m=1$ のときは正しい．m についての帰納法で m まで正しいとすると，左辺については初めて原点に戻る時刻，右辺については初めて $+1$ に達する時刻で分類すると

$$f_{2n}^{(m+1)}=\sum_{k=1}^{n-1}f_{2k}f_{2n-2k}^{(m)}=\sum_{k=1}^{n-1}h_{2k-1}(1)h_{2n-2k-m}(m)=h_{2n-m-1}(m+1).$$

よって $m+1$ のときも正しい.

後半は，補題 6 (4) の具体形から明らか.

□

$2n$ 回目までに m 回原点に帰る確率を $g_{2n}^{(m)}$ とおく．これは一点 0 の滞在時間の分布[12] を表す.

定理 12 $g_{2n}^{(m)}=\displaystyle\sum_{k=m}^{n}f_{2n}^{(k)}=\frac{1}{2^{2n-m}}\begin{pmatrix}2n-m\\ n\end{pmatrix},\ m=0,1,\cdots,n,\ n\in\mathbb{N}.$

[12] ブラウン運動で local time として知られる量の離散類推.

注 5 $g_{2n}^{(0)} = g_{2n}^{(1)} = u_{2n} > g_{2n}^{(2)} > \cdots$. なお，意味から考えると

$$\sum_{m=0}^{n} g_{2n}^{(m)} = 1$$

となるが，これは次の公式を使えば直接的にも容易に得られる．

補題 ***13*** $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+k)!}{2^k k!} = 2^n n!\,.$

証明. $S_0 = 1$ は明らかなので $S_{n+1} = 2(n+1)S_n,\ n \in \mathbb{Z}_+,$ を言えばよい．

$$\begin{aligned}
S_{n+1} - (n+1)S_n &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(n+1+k)!}{2^k k!} - (n+1)\sum_{k=0}^{n} \frac{(n+k)!}{2^k k!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(n+k)!}{2^k (k-1)!} + \frac{(2n+2)!}{2^{n+1}(n+1)!} \\
&= \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{(n+\ell+1)!}{2^{\ell+1}\ell!} + \frac{(2n+1)!}{2^{n+1}n!} + \frac{(2n+2)!}{2^{n+2}(n+1)!} = \frac{1}{2}\sum_{\ell=0}^{n+1} \frac{(n+\ell+1)!}{2^\ell \ell!} \\
&= \frac{1}{2} S_{n+1}\,.
\end{aligned}$$

よって $S_{n+1} = 2(n+1)S_n,\ n \in \mathbb{Z}_+,$ が成り立つ．[13] □

◇

定理 *12* の証明. m 回目の原点回帰時刻 $2n - 2k$ $(0 \leqq k < n)$ で分類して補題 6 (2) を使うと

$$g_{2n}^{(m)} = f_{2n}^{(m)} + \sum_{k=1}^{n-m} f_{2n-2k}^{(m)} \mathrm{P}[\, W_1 \neq 0, \cdots, W_{2k} \neq 0 \,] = f_{2n}^{(m)} + \sum_{k=1}^{n-m} f_{2n-2k}^{(m)} u_{2k}$$

u_{2k} の意味から $u_{2k} = \sum_{\ell=1}^{k} f_{2k}^{(\ell)}$ だが，他方， $f_{2n}^{(m+\ell)}$ に関して第 m 回目の原点復帰を迎える時刻 $n-k$ で分類することによって $f_{2n}^{(m+\ell)} = \sum_{k=\ell}^{n-1} f_{2n-2k}^{(m)} f_{2k}^{(\ell)}$ を得るので，

$$g_{2n}^{(m)} = f_{2n}^{(m)} + \sum_{\ell=1}^{n-m}\sum_{k=\ell}^{n-1} f_{2n-2k}^{(m)} f_{2k}^{(\ell)} = \sum_{\ell=0}^{n-m} f_{2n}^{(m+\ell)}\,.$$

具体形は 補題 11 の具体形から明らか．

□

1.2.3 漸近形 $n \to \infty$.

Stirling の公式

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\, e^{-n} n^n$$

（$a_n \sim b_n$ は $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ の意味とする）を (10) に用いると，漸近形

$$u_{2n} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}, \tag{12}$$

を得る．Stirling の公式はあちこちで証明されているが，§A.1 に一つの証明を載せておく．

[13] [2] は 1 次元 simple random walk の種々の公式を初等的に導いていてたいへん興味深いよい教科書だが，補題 13 の証明は無意味に難しくしているとしか思えない．

定理 14 (Arcsine law) $0 < a < b < 1$ ならば

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}[\, a \leqq \frac{\eta_{2n}}{2n} \leqq b \,] = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}[\, a \leqq \frac{L_{2n}}{2n} \leqq b \,] = \frac{2}{\pi} \arcsin y \Big|_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} .$$

即ち， $\eta_{2n}/(2n)$ と $L_{2n}/(2n)$ は分布関数 $\mu([0,x]) = \dfrac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{x}$ なる $[0,1]$ 上の分布に法則収束する．

注 6 この結果は分布が偏ることを意味する．*Sample path* の実例による説明が *[10, vol. 1 §III.6]* にある．◇

証明. 定理 7 と 定理 10 に (12) を用いると左辺は (変数変換 $x = y^2$ も行うと)

$$\frac{1}{\pi}\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \frac{2}{\pi}\int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

に等しい． □

最後に local time の漸近形についても触れておく．

定理 15 $\{W_n\}$ が $2n$ 歩目までに原点に戻った回数（原点の *local time*）を $T^{(2n)}$ と書くとき，$\dfrac{1}{\sqrt{2n}}T^{(2n)}$ の分布は $n\to\infty$ のとき

$$\mathrm{P}[\, A \,] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_A e^{-x^2/2}dx, \quad A \in \mathcal{B}_1(\mathbb{R}_+),$$

なる分布に弱収束する．

証明. 定理 12 の $g_{2n}^{(m)}$ に対して $g_{2n}^{(m)} = \mathrm{P}[\, T^{(2n)} = m \,]$ である．よって $\alpha \geqq 0$ に対して

$$\sum_{0\leqq m \leqq \alpha\sqrt{2n}} g_{2n}^{(m)} \to \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\alpha e^{-x^2/2}dx, \quad n\to\infty, \tag{13}$$

を言えば，分布関数が収束するから弱収束する．

定理 12 の具体形から $m = O(\sqrt{n})$ のとき

$$\log\frac{g_{2n}^{(m)}}{g_{2n}^{(0)}} = -\frac{m^2}{4n} + O(\frac{1}{\sqrt{n}}).$$

他方 (10) と (12) でみたように

$$g_{2n}^{(0)} = \frac{1}{2^{2n}}\begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix} = u_{2n} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}} .$$

よって (13) が成り立つ．

□

1.3 割愛した題材．

以下の題材はこの講義のテーマもしくは基礎教養として重要だが，準備時間の欠如と講義の分量を考えて割愛した．

- Renewal theory [8, §3.4].

  補題 9 で出てきた漸化式は renewal equation と呼ばれる．SAW でも bridge の Ornstein-Zernicke 的振る舞いの証明に用いられる [13, §4.2].

- Simple でない random walk （空間的に非対称な random walk や $\mathbb{R}$ 上の random walk など）の詳細な性質 ([10, vol. 1 §XIV]，[8, §3.1, 3.2] など).

- Arcsine law はブラウン運動（ランダムウォークの連続極限）で成り立つこともあって深く研究されている．高次元化やブラウン運動以外の拡散過程への一般化もある [20].

2 d 次元 random walk.

2.1 推移確率 (transition probability).

§1 に書いたように，原点 0 の隣の格子点の集合を $S=\{x\in\mathbb{Z}^d \mid |x|=1\}$ とおくとき，S に値をとる i.i.d. 確率変数列 $X_n:\Omega\to S$, $n\in\mathbb{Z}_+$, が S の $2d$ 個の要素全てを等しい確率 $\mathrm{P}[\,X_1=x\,]=(2d)^{-1}$, $x\in S$, でとるとし， $x_0\in\mathbb{Z}^d$ に対して，$W_n=x_0+\sum_{k=1}^{n}X_k$, $n\in\mathbb{Z}_+$, とおいて d 次元 simple random walk という．

定義は出発点 x_0 によるので， x_0 毎に確率測度を考えていることになるので，同時にいろんな出発点を考えるときは P_{x_0} のように添字で区別することにする[14]．

> $n\in\mathbb{Z}_+$, $x,y\in\mathbb{Z}^d$ に対して
> $$p_n(x,y)=\mathrm{P}_x[\,W_n=y\,] \tag{14}$$
> とおいて，n 歩の推移確率と言う．

特に，$p_0(x,y)=\delta_{x,y}$ である．

再帰性のように，path 全体の形ではなくある時刻（stopping time でもよいが）にどこにいるか，が問題になるときは，推移確率が非常に基本的な量になる．また，random walk にはマルコフ性があるので，推移確率さえ与えれば path 上の確率測度は決まってしまう．応用上も，例えばインキのシミが水の中に染み渡る様子など，現実に有用な量そのものである．以上の意味で random walk においては決定的に重要な量である．逆に言えば，マルコフ性のない self-avoiding walk では決定的に重要な量とは言えなくなるが，random walk との対比という意味では引き続き重要な量である．

> Simple random walk (マルコフ過程) は非常に詳しい性質が分かっている．また，強力な解析手段がそろっている．マルコフでない過程の random walk に比較した特徴の抽出が数理物理学からみた確率過程論周辺の重要な課題であり，self-avoiding walk はその一つの（長い歴史があるという意味で象徴的な）典型である．

(14) と同様に
$$p_n(x,y)=\mathrm{P}[\,W_n=y\mid W_0=x\,] \tag{15}$$
とおく．

命題 16 $n\in\mathbb{Z}_+$ に対して以下が成り立つ.（最初の 2 点では，p_n を (x,y) 成分とする $\mathbb{Z}^d\times\mathbb{Z}^d$ 行列とみなす記号を使う.）

(i) $p_0=\mathbb{I}$.（左辺は単位行列.）

(ii) $p_n=p_1^n=p_1\times p_1\times\cdots\times p_1$.

(iii) $p_n(x,y)=p_n(0,y-x)$, $x,y\in\mathbb{Z}^d$ （空間的一様性）.

注 7 行列の積は，各成分が非負なので，級数和の意味で常に *well-defined* である[15]． ◇

証明. いずれも定義から明らかであろう. □

1 次元のとき (1) と同様に，点 $x\in\mathbb{Z}^d$ への到達時刻 (hitting time) を
$$T_x=\begin{cases}\min\{n\geqq 1\mid W_n=x\}, & \exists n\in\mathbb{N};\ W_n=x\,,\\ \infty, & \text{otherwise},\end{cases} \tag{16}$$
で定義する[16]．

---

[14] 確率空間も x_0 毎に別々に取ることもできるが，集合としては全部を合わせたものを考えて，その上の測度だけ区別しても何も変わらないので，そのように思うことにする.

[15] 連続時間のマルコフ過程では convolution operator で定義する.

[16] Hit しない場合に備えて必ず $\{\infty\}$ も値域に含めないといけないことを念頭におくべきである．例えば，T_x を含む量を $n=T_x$ で条件付けて n について和を取る，という変形技術があるが，単に n についての級数 $\sum_{n=1}^{\infty}$ を考えただけでは $T_x=\infty$ の場合は抜けてしまうことに注意.

$\mathrm{P}_x[\, T_x < \infty \,]$ は出発点に戻る確率を表す．1 歩進んで戻る確率は正だから，d 次元 simple random walk では $\mathrm{P}_x[\, T_x < \infty \,] > 0$ が成り立つ．そこで最初の興味はこれが 1 になるかどうかである．

$x \in \mathbb{Z}^d$ は $\mathrm{P}_x[\, T_x < \infty \,] = 1$ のとき再帰的 (recurrent) な点，そうでなければ過渡的 (transient) な点である，という．

2.2 マルコフ連鎖．

2.2.1 既約な時間的に一様なマルコフ連鎖．

Random walk の再帰性の有用な判定条件が一般のマルコフ連鎖に（余分の負担なしに）一般化できる．Random walk が持つマルコフ性という重要な特徴を指摘する目的も併せて既約な時間的に一様なマルコフ連鎖の一般的な定義を紹介する．

今まで W は，出発点 W_0 が定数で，かつ，$\mathbb{Z}^d$ に値を取る確率変数の列（確率連鎖）としてきたが，

この §2.2 では，$W = \{W_n \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$ は (W_0 も含めて）高々可算集合 S に値をとる確率変数の列とする[17]．(S に演算が定義されてなければ独立変数 X_n の和という形に書けないが，以下はそれでも成り立つ一般論である.）W が次の条件を満たすとき，既約な時間的に一様なマルコフ連鎖 (Markov chain) であるという．

Markov 性 (Markov property)： $\mathrm{P}[\, W_{n+1} = y \mid W_0 = x_0\,,\ W_1 = x_1\,,\ \cdots,\ W_n = x_n \,] = \mathrm{P}[\, W_{n+1} = y \mid W_n = x_n \,]$, $x_0, \cdots, x_n, y \in S$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

時間的一様性 (temporal homogeneity[18])： $\mathrm{P}[\, W_{n+1} = y \mid W_n = x \,] = \mathrm{P}[\, W_1 = y \mid W_0 = x \,]$, $x, y \in S$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

既約性 (irreducibility)： $(\forall x, y \in S)\ \exists n > 0;\ \mathrm{P}[\, W_n = y \mid W_0 = x \,] > 0\,.$

ここで条件付き確率 $\mathrm{P}[\, A \mid B \,] = \mathrm{P}[\, A \cap B \,]/\mathrm{P}[\, B \,]$ は，条件 B が確率正で成り立つときのみ定義し，従って上記 Markov 性は，「条件が確率正で成り立つような $\{j_k\}$, n 全て」に対して成り立つとき成り立つ，と読む．時間的一様性に関しても同様.

もちろん，条件を落とせば形容詞が減ってより一般的な定義を得る．例えば Markov 性が成り立つことだけが分かっていれば， Markov 連鎖である，という．この講義では煩雑を避けるため，上記 3 条件を緩めた一般論には踏み込まない.

W_0 の分布を初期分布と言う.（特に， $\mathrm{P}[\, W_0 = x \,] = 1$ のとき， $\{W_n\}$ は x を出発点とするマルコフ連鎖であるという.）

$n \in \mathbb{Z}_+$ と $x, y \in S$ に対して $p_n(x, y) = \mathrm{P}_x[\, W_n = y \,] = \mathrm{P}[\, W_n = y \mid W_0 = x \,]$ とおいてこれを (n 歩の) 推移確率 (遷移確率) という．推移確率を用いて W が時間的に一様なマルコフ連鎖であることの条件を書き直すことができる．さらに，random walk で確認した性質 命題 16 のうち空間的一様性（並進対称性）以外が一般のマルコフ連鎖でも成り立つこともわかる（多少形を変えて掲げておく）.

命題 17 $n \in \mathbb{Z}_+$ に対して以下が成り立つ.

(i) W が時間的に一様なマルコフ連鎖であることは次のように書ける.

$$\mathrm{P}[\, W_{n+1} = y \mid W_0 = x_0\,,\ W_1 = x_1\,,\ \cdots,\ W_n = x_n \,] = p_1(x_n, y), \quad x_0, \cdots, x_n, y \in S,\ n \in \mathbb{Z}_+. \tag{17}$$

(ii) $p_0(x, y) = \delta_{x,y}$.（左辺はクロネッカーのデルタ.）

(iii) $0 \leqq M < N$ のとき，

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}[\, W_n = y_n,\ n = M+1, \cdots, N \mid W_n = x_n,\ n = 0, \cdots, M \,]\\ &= p_1(x_M, y_{M+1}) p_1(y_{M+1}, y_{M+2}) \cdots p_1(y_{N-1}, y_N)\\ &= \mathrm{P}[\, W_n = y_n,\ n = 1, \cdots, N - M \mid W_0 = x_M \,].\end{aligned}$$

[18] 記号 S の使い方が §2 とずれているが，確率変数の値域 (状態空間) に和の構造がなくてもマルコフ連鎖を定義できるので，あちらの節の S や X_n に相当するものは一般論には出てこない．この節はマルコフ連鎖の一般的な考え方の紹介，程度の挿入的意味にとどめ，simple random walk との完全な対応づけには注意を払わないことにする.

[18] homogeneity は，発音はホモジュニエティだがスペリングは普通の英和辞書を見る限り，ei らしい.

特に，(p_n を (x,y) 成分が $p_n(x,y)$ の $\mathbb{Z}^d\times\mathbb{Z}^d$ 行列とみなす記号法の下で,)

$$p_n = p_1^n = p_1\times p_1\times\cdots p_1\,,\quad n=1,2,3,\cdots.$$

(iv) $1\geqq p_n(x,y)\geqq 0,\ x,y\in S,\ n\in\mathbb{Z}_+,$ かつ， $\displaystyle\sum_{y\in S} p_n(x,y)=1\,.$

証明. (17) は時間的に一様なマルコフ連鎖の定義から明らか．２つ目は p_0 の定義から明らか．３つ目は (17) を用いて

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}[\,W_n=y_n,\ n=M+1,\cdots,N\mid W_n=x_n,\ n=0,\cdots,M\,]\\
&=\mathrm{P}[\,W_N=y_N\mid W_n=y_n,\ n=M+1,\cdots,N-1,\ \ W_n=x_n,\ n=0,\cdots,M\,]\\
&\ \times\mathrm{P}[\,W_n=y_n,\ n=M+1,\cdots,N-1\mid W_n=x_n,\ n=0,\cdots,M\,]\\
&=\mathrm{P}[\,W_n=y_n,\ n=M+1,\cdots,N-1\mid W_n=x_n,\ n=0,\cdots,M\,]\,p_1(y_{N-1},y_N)
\end{aligned}$$

として， $M+1\leqq n\leqq N$ について帰納的に変形していけばよい．$x_n,\,y_n$ たちについて和を適宜取れば行列記法の式も得られる．最後の性質は明らか.

□

時間的に一様なマルコフ性とは，W_n に関する確率を p_1 だけを用いて書くことができるということである．具体的には (17) を参照.
従って時刻に関する漸化式を立てること，および, (帰納的に繰り返せば) $\{W_n\}$ が関わる全ての確率が p_1 (と初期分布) で決まってしまうこと，がわかる.

2.2.2 マルコフ連鎖の再定義 ― 初期分布の分離.

§1 では 0 から出発する random walk のみを考えてきた．即ち初期分布を固定していた．対応して，§2.2.1 では，マルコフ連鎖を確率空間 $(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})$ の上の確率連鎖 $W_n,\,n\in\mathbb{Z}_+$,（で条件のついたもの）として定義し，時間的に一様な場合は初期分布 $\mathrm{P}[\,W_0=x\,]$ と遷移確率（条件付き確率）$p_1(x,y)=\mathrm{P}[\,W_1=y\mid W_0=x\,]$ で全ての確率が決まることをみた.

以下では出発点を取り替えたものの間の関係をも考察する．その考察においてマルコフ性と時間的一様性が非常に役に立ち，結果として $W_0=0$ のときの種々の性質をも導く.

$x\in S$ に対して $\mathrm{P}_x[\,A\,]=\mathrm{P}[\,A\mid W_0=x\,],\ A\in\mathcal{F}$, で P_x を定義すると，$\mathrm{P}_x[\,W_0=x\,]=1$ を満たす確率測度になる.

$\mathrm{P}[\,W_0=x\,]=0$ なる x に対しては，ある $m>0$ で $\mathrm{P}[\,W_m=x\,]$ ならば，時間的一様性を利用して $\mathrm{P}_x[\,A(W_0,\cdots,W_n)\,]=\mathrm{P}[\,A(W_m,\cdots,W_{n+m})\mid W_m=x\,]$ で定義すればよいし， x に達する確率がどの時刻でも 0 ならば S から除いておいて確率空間を定義し直せば，確率の値に影響はない．こうして，マルコフ連鎖 $(\mathrm{P},\{W_n\})$ には各 $x\in S$ ごとに $\mathrm{P}_x[\,W_0=x\,]=1$ を満たす確率測度 $(\mathrm{P}_x,\ x\in S)$ と初期分布 $\mu_0[\{\cdot\}]=\mathrm{P}[\,W_0=\cdot\,]$ が対応する.

逆に，S 上の path の集合を Ω, path $w\in\Omega$ の時刻 n における位置 $w(n)$ を与える座標関数を $W_n(w)$ とし，$W_n,\,n\in\mathbb{Z}_+$, が生成する σ 加法族を $\mathcal{F}$ とする．$(\Omega,\mathcal{F})$ 上の確率測度の族 $\mathrm{P}_x,\,x\in S$, を $\mathrm{P}_x[\,W_0(w)=x\,]=1$, $x\in S$, と

$$\mathrm{P}_x[\,W_{n+1}=y\mid W_1=x_1\,,\ \cdots,\ W_n=x_n\,]=\mathrm{P}_{x_n}[\,W_1=y\,],\ \ x,x_1\cdots,x_n,y\in S,\ n\in\mathbb{Z}_+,$$

によって定義すると，初期分布 μ_0 ごとに

$$\mathrm{P}_{\mu_0}[\,A\,]=\sum_{x\in S}\mu_0(\{x\})\mathrm{P}_x[\,A\,]$$

によって P_{μ_0} が決まって， $\{W_n\}$ はその上で見るとマルコフ性を持つ確率連鎖になる.

そこで，一般には確率連鎖というときは，確率変数の列あるいは path 上の確率測度を指すが，マルコフ連鎖だけは上で説明した意味，つまり，path 空間 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上の確率測度の族と座標関数 $(\{W_n\mid n\in\mathbb{Z}_+\},\{\mathrm{P}_x\mid x\in S\})$ であってしかるべき性質を満たすものを指す．即ち，初期分布を与えるごとに確率変数列としてのマルコフ連鎖が定まる．初期分布のとりかたによらない一般論や，逆に初期分布を定めたい場合には, (つまり，たいていの場合は) このほうが意味がとりやすい.

このような確率測度の族が存在するかという問題に対しては，時間的に一様なマルコフ連鎖について言えば，$0\leqq p_n(x,y)\leqq 1$, $\displaystyle\sum_{y\in S}p_n(x,y)=1$, および，次の Chapman–Kolmogorov の関係式を満たす $p_n(x,y)$,

$x, y \in S$, $n \in \mathbb{N}$, があれば，$\mathrm{P}_{x_0}[\, W_1 = x_1, \cdots, W_n = x_n \,] = \prod_{k=0}^{n-1} p_1(x_k, x_{k+1})$ によってマルコフ連鎖が作れることが知られている：

$$p_{n+m}(x,y) = \sum_{z \in S} p_n(x,z) p_m(z,y), \quad x, y \in S,\ n, m \in \mathbb{N}. \tag{18}$$

Simple random walk の $p_n(x,y)$ が以上の性質を満たすことは容易に分かる．
この講義ではこれ以上の説明を省略して具体的な計算に戻る．

2.2.3 再帰性．

Random walk のとき (16) と同様に，点 $x \in S$ への到達時刻 (hitting time) を

$$T_x = \begin{cases} \min\{n \geqq 1 \mid W_n = x\}, & \exists n \in \mathbb{N};\ W_n = x\,, \\ \infty, & \text{otherwise}, \end{cases} \tag{19}$$

で定義する．特に $W_0 = x$, a.e, ならば T_x を再帰時刻 (recurrence time) という．$\mathrm{P}_x[\ \cdot\ ] = \mathrm{P}[\,\cdot \mid W_0 = x\,]$ で測れば $W_0 = x$, a.e., である．$\mathrm{P}_x[\, T_x < \infty \,] = 1$ のとき x は再帰的 (recurrent) といい，任意の $x \in S$ が再帰的ならば $\{W_n\}$ または $\{p_n\}$ は再帰的であるという．逆に $\mathrm{P}_x[\, T_x = \infty \,] > 0$ ならば x は過渡的 (transient) という．
(16) と同様に，

$$\mathrm{P}_x[\, T_y < \infty \,] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{P}_x[\, T_y = k \,]. \tag{20}$$

事象列 A_n, $n \in \mathbb{Z}_+$, のうち無限個が成り立つ確率が 1 のとき A_n, i.o., (infinitely often) と書く．

式で書けば $\mathrm{P}[\, \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n \,] = \mathrm{P}[\, \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_n \,] = 1$ のことを言う．
再帰性の次の言い換えは基本的である．

定理 18 *$x \in S$ が再帰的ならば $W_n = x$, i.o.，即ち，$\mathrm{P}_x[\, \overline{\lim_{n\to\infty}} \{W_n = x\} \,] = 1$，$x \in S$ が過渡的ならば $\mathrm{P}_x[\, \overline{\lim_{n\to\infty}} \{W_n = x\} \,] = 0$．0 と 1 の間の確率は起きない（従って，それぞれ同値条件）．*

証明. $m \in \mathbb{N}$ に対して m 回目に x に戻る時刻を $T_x^{(m)} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ とおく．即ち，$T_x^{(1)} = T_x$ および

$$T_x^{(m)} = \min\{n > T_x^{(m-1)} \mid W_n = x\},\ m = 2, 3, 4, \cdots.$$

ここで，$T_x^{(m-1)} = \infty$ または右辺の min の条件を満たす n がなければ $T_x^{(m)} = \infty$ と定義する．当然 $T_x^{(1)} \leqq T_x^{(2)} \leqq \cdots$．ただし等号は ∞ のときだけ．これを使えば $\overline{\lim_{n\to\infty}} \{W_n = x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{T_x^{(n)} < \infty\}$ と書けるので，

$$\mathrm{P}_x[\, \overline{\lim_{n\to\infty}} \{W_n = x\} \,] = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}_x[\, T_x^{(n)} < \infty \,].$$

よって，

$$\mathrm{P}_x[\, T_x^{(n)} < \infty \,] = \mathrm{P}_x[\, T_x < \infty \,]^n, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{21}$$

を証明すれば十分である．
まず，$m, i, j \in \mathbb{N}$ に対して

$$\mathrm{P}_x[\, T_x^{(m)} = i,\ T_x^{(m+1)} = i + j \,] = \mathrm{P}_x[\, T_x^{(m)} = i \,]\, \mathrm{P}_x[\, T_x = j \,]$$

に注意する．実際，(17) から

$$\begin{aligned} &\mathrm{P}_x[\, T_x^{(m+1)} = i + j \mid T_x^{(m)} = i \,] = \mathrm{P}_x[\, W_k \neq x,\ k = i+1, \cdots, i+j-1,\ W_{i+j} = x \mid T_x^{(m)} = i \,] \\ &= \mathrm{P}_x[\, W_k \neq x,\ k = 1, \cdots, j-1,\ W_j = x \,] = \mathrm{P}_x[\, T_x = j \,] \end{aligned}$$

だから，それは正しい．これを用いると $m \geqq 2$ で

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}_x[\, T_x^{(m)} < \infty \,] &= \mathrm{P}_x[\, T_x^{(m-1)} < T_x^{(m)} < \infty \,] = \sum_{i=m-1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{P}_x[\, T_x^{(m-1)} = i,\ T_x^{(m)} = i + j \,] \\
&= \sum_{i=m-1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{P}_x[\, T_x^{(m-1)} = i \,]\, \mathrm{P}_x[\, T_x = j \,] = \mathrm{P}_x[\, T_x^{(m-1)} < \infty \,]\, \mathrm{P}_x[\, T_x < \infty \,].
\end{aligned}$$

よって m についての帰納法で (21) が成り立つ．

□

ここまでマルコフ連鎖の既約性を用いてこなかった．既約なマルコフ連鎖では１点での再帰性とマルコフ連鎖の再帰性（全ての点での再帰性）が同値になる[19]．

定理 19 x が再帰状態でかつ $p_n(x,y) > 0$ なる y が存在するならば y も再帰状態である．

既約な時間的に一様なマルコフ連鎖 $\{W_n\}$ では，ある x が再帰的ならば $\{W_n\}$ は再帰的であり，ある x が過渡的ならば $\{W_n\}$ は過渡的である．

証明．まず，

$$\mathrm{P}_x[\, T_y < \infty \,] = p_1(x,y) + \sum_{z \in S;\ z \neq y} p_1(x,z)\, \mathrm{P}_z[\, T_y < \infty \,],\ y \in S, \tag{22}$$

を証明する．(17) から，$z \neq y$ のとき，

$$\mathrm{P}_x[\, T_y = n,\ W_1 = z \,] = p_1(x,z) \mathrm{P}_z[\, W_k \neq y,\ 1 \leqq k \leqq n-2,\ W_{n-1} = y \,] = p_1(x,z)\, \mathrm{P}_z[\, T_y = n-1 \,]$$

なので，$z \in S$ と $n \geqq 2$ について和をとると，(17) と (20) から (22) を得る．

次に，(22) で右辺が（1 以下なのは左辺が等しいことが分かったいまや，確率だから当然だが）1 になるならば，即ち，$\mathrm{P}_x[\, T_y < \infty \,] = 1$ となる y が存在するならば，全ての $z \in S$ に対して

$$p_1(x,z) > 0 \implies \mathrm{P}_z[\, T_y < \infty \,] = 1$$

が成り立つことに注意する．なぜなら (22) の右辺は

$$\sum_{z \in S} p_1(x,z) - \sum_{z \in S;\ z \neq y} p_1(x,z)(1 - \mathrm{P}_z[\, T_y < \infty \,])$$

に等しいが，(17) から第１項は 1 であり，第２項の和の記号の中の各項は非負．よってこれが 1 になるのは第２項の和の記号の中の全ての項が 0 の場合に限る．再び (22) において，$p_1(x,z) > 0$ であるような z を x に代入すると，$\mathrm{P}_x[\, T_y < \infty \,] = 1$ となる y が存在するならば，

$$p_1(x,z_1) p_1(z_1,z) > 0 \implies \mathrm{P}_z[\, T_y < \infty \,] = 1$$

となる．S の可算性と確率の非負性から条件は $p_2(x,z) > 0$ と同値である．これを繰り返すことにより，$\mathrm{P}_x[\, T_y < \infty \,] = 1$ となる y が存在するならば，

$$\exists n;\ p_n(x,z) > 0 \implies \mathrm{P}_z[\, T_y < \infty \,] = 1$$

を得る．

特に，x が再帰状態ならば，$\mathrm{P}_x[\, T_x < \infty \,] = 1$ となるので，$p_n(x,y) > 0$ ならば $\mathrm{P}_y[\, T_y < \infty \,] = 1$ を得る．即ち y も再帰状態である．

ここまでは既約性を使っていなかったが，最後に既約性

$$(\forall x, y \in S)\ \exists n > 0;\ p_n(x,y) > 0$$

を使うと，ある x が再帰状態ならば全ての $y \in S$ が再帰状態，即ち，W は再帰的である．よって再帰状態でない点が一つでもあれば，全ての点が過渡状態，即ち W は過渡的である．

□

[19] $\mathbb{Z}^d$ (§2.3) では全ての点が対等なので，このことは当たり前である．次の定理 19 はこのような規則性のない空間でも成り立つ，という指摘である．これはフラクタル上の random walk などをやるときには役に立つ．

再帰性の判定に母関数が有効である．

$$f_{k,x,y} = \mathrm{P}_x[\,T_y = k\,],\quad k \in \mathbb{N},\ x,y \in S, \tag{23}$$

とおくと，(20) から

$$\mathrm{P}_x[\,T_y < \infty\,] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{P}_x[\,T_y = k\,] = \sum_{k=1}^{\infty} f_{k,x,y}\,. \tag{24}$$

((16) の脚注に注意！)．

$p_n(x,y)$ と $f_{n,x,y}$ の母関数[20] を

$$G_s(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x,y) s^n,\quad |s| < 1, \tag{25}$$

および

$$F_s(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{n,x,y} s^n,\quad |s| \leqq 1, \tag{26}$$

で定義する（f は時刻 0 では定義していないことに注意）．ここで

$$F_1(x,y) = \mathrm{P}_x[\,T_y < \infty\,] \leqq 1$$

だから $F_s(x,y)$ は $|s| = 1$ でも定義されることに注意．

命題 20 $x,y \in S$ に対して以下が成り立つ．

$$\begin{aligned} p_n(x,y) &= \sum_{m=1}^{n} f_{m,x,y} p_{n-m}(y,y),\ n \in \mathbb{N}, \\ G_s(x,y) &= \delta_{x,y} + F_s(x,y) G_s(y,y),\ |s| < 1\,. \end{aligned}$$

証明. $n \in \mathbb{N}$ に対して $A_n = \{W_n = y\}$, $B_n = \{W_n = y,\ W_k \neq y,\ 1 \leqq k < n\}$ $(= \{T_y = n\})$ とおくと，$\mathrm{P}_x[\,A_n\,] = p_n(x,y)$，および (23) から $\mathrm{P}_x[\,B_n\,] = f_{n,x,y}$．よって $1 \leqq m < n$ のとき (17) から

$$\mathrm{P}_x[\,A_n \cap B_m\,] = \mathrm{P}_x[\,B_m\,]\,\mathrm{P}_x[\,A_n \mid B_m,\ W_0 = x\,] = f_{m,x,y}\,p_{n-m}(y,y).$$

$m = n$ のときも両端の辺が等しいことは直接確かめられる．

$\displaystyle\bigcup_{m=1}^{n} (A_n \cap B_m) = A_n$ かつ B_m たちが排反なことから，最初の等式を得る．その両辺に s^n をかけて $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}$ をとり，左辺に (17) を使って，右辺で和の順序を交換すると残りの式を得る．

□

命題 20 によって，再帰状態と遷移確率の対角線成分の和 (trace) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} p_n(x,x) = \lim_{s\uparrow 1} G_s(x,x)$ の収束が対応することが分かる．

定理 21 $x \in S$ が再帰状態であるための必要十分条件は $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} p_n(x,x) = \infty$．

証明. 単調収束定理と (24) から

$$\lim_{s\uparrow 1} F(x,x;s) = F(x,x;1) = \mathrm{P}[\,T_x < \infty \mid W_0 = x\,]$$

および

$$\lim_{s\uparrow 1} P(x,x;s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x,x) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

を得る．命題 20 から $P(x,x;s)(1 - F(x,x;s)) = 1$, $|s| < 1$, だから，$s \uparrow 1$ とすれば $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} p_n(x,x) = \infty$ と $\mathrm{P}[\,T_x < \infty \mid W_0 = x\,] = 1$ が同値になることが分かる．

□

[20] p_n, f_n を重み (相対分布) に取るときの時刻 n の母関数，と呼ぶ方が正しいと思うが…

2.3 $\mathbb{Z}^d$ 上の simple random walk の再帰性．

$\mathbb{Z}^d$ 上の simple random walk W_n, $n \in \mathbb{Z}_+$, に戻る．ここでは，W_n の再帰性を調べるのに，定理 21 を直接適用する方法について説明する．明らかに $\mathbb{Z}^d$ のどの点も対等なので，どれか一点 (原点) の再帰性 ($\mathrm{P}_0[\,T_0 < \infty\,]$) だけ調べれば十分.

2.3.1 $d = 1$ の場合．

定理 21 を直接適用するので，$p_n(0,0) = \mathrm{P}_0[\,W_n = 0\,]$ が分かればよい．奇数歩では原点に戻れないのは明らか： $p_{2m+1}(0,0) = 0$．偶数歩のとき， $d = 1$ の場合は (11) で既にやってある：

$$p_{2m}(0,0) = \mathrm{P}_0[\,W_{2m} = 0\,] = 2^{-2m} N_{2m,0} = 2^{-2m} \begin{pmatrix} 2m \\ m \end{pmatrix}.$$

スターリングの公式

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$$

を用いると $p_{2m}(0,0) \sim \dfrac{1}{\sqrt{\pi m}}$ となるので，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} p_n(0,0) = \infty$．よって 定理 21 より，1 次元 simple random walk は再帰的である.

2.3.2 $d = 2$ の場合．

$d = 1$ の場合に (11) を得たように，左右上下に進む回数とその組み合わせを数える．n 歩で出発点に戻る path の本数を N_n とする．奇数歩の場合は出発点には戻れないので $N_{2m+1} = 0$．$2m$ 歩で原点に戻るには左右に k 歩，上下に $m-k$ 歩ずつ，但し， $k = 0, 1, \cdots, m$，という場合でつきる．$(1+t)^m \cdot (1+t)^m = (1+t)^{2m}$ の t^m の係数を比較して得られる公式

$$\sum_{k=0}^{m} \begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2m \\ m \end{pmatrix}$$

も使えば

$$N_{2m} = \sum_{k=0}^{m} \begin{pmatrix} 2m \\ k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2m-k \\ k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2m-2k \\ m-k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2m \\ m \end{pmatrix}^2.$$

よって（結果が $d = 1$ のときの 2 乗になったので），

$$p_{2m}(0,0) = (2d)^{-2m} \begin{pmatrix} 2m \\ m \end{pmatrix}^2 \sim \frac{1}{\pi m}.$$

再び $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} p_{2m}(0,0) = \infty$ だから定理 21 より，2 次元 simple random walk も再帰的である.

2.3.3 $d \geqq 3$ の場合の結果．

２項係数１つで書ける結果にはならないが，同様に数え上げて漸近形を評価することは可能である．結果は，d 次元正方格子のとき，$p_{2m}(0,0) \sim C m^{-d/2}$ となって $d \geqq 3$ simple random walk は過渡的である．§A.4.1 に数え上げはしない導出方法を与える.

過渡的であることを証明するには $p_n(0,0)$ の漸近形は必要ではなく，$G_1(x,x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} p_n(x,x) < \infty$ が分かれば十分である．§2.5 では母関数の方法によってこれを得る (定理 23).

2.4 特性関数．

$\mathbb{Z}^d$ のように並進対称性（空間的一様性）のある系では RW の位置 W_n に関する特性関数が有効である．$n \in \mathbb{N}$ に対して W_n の特性関数

$$\varphi_n(t) = \mathrm{E}_0[\,e^{\sqrt{-1} t \cdot W_n}\,] = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} e^{\sqrt{-1} t \cdot x} p_n(0,x), \quad t \in \mathbb{R}^d, \tag{27}$$

($t\cdot x$ は $\mathbb{R}^d$ の内積) を考える．1 歩の推移確率の分布 $\{p_1(0,x)\mid x\in S\}$ の特性関数 $\varphi\colon\ \mathbb{R}^d\to\mathbb{C}$ を

$$\varphi(t)=\sum_{x\in\mathbb{Z}^d}e^{\sqrt{-1}t\cdot x}p_1(0,x)=\frac{1}{d}\sum_{i=1}^{d}\cos t_i\,,\quad t\in\mathbb{R}^d, \tag{28}$$

で定義する．最右辺の具体形は直接計算することにより容易に得られる．時間的に一様なマルコフ連鎖の n 歩の特性関数

$$\varphi_n(t)=\mathrm{E}[\,e^{\sqrt{-1}t\cdot W_n}\,]=\sum_{x\in\mathbb{Z}^d}e^{\sqrt{-1}t\cdot x}p_n(0,x) \tag{29}$$

は 1 歩の特性関数 φ の n 乗であることが分かる．

命題 22 $p_n(0,x)=(2\pi)^{-d}\displaystyle\int_A e^{-\sqrt{-1}t\cdot x}\varphi(t)^n dt_1\cdots dt_d\,.$

ここで積分範囲 A は *(*ルベーグ測度 0 集合を除いて*)* $(\mathbb{Z}/(2\pi)\mathbb{Z})^d$ の代表になっている区間ならば何でも良い． $[-\pi,\pi]^d$ がよく用いられるが，下記では $[-\pi/2,3\pi/2]^d$ を用いる．

証明. W_n の増分 X_n が i.i.d. であることから，

$$\varphi_n(t)=\mathrm{E}[\,e^{\sqrt{-1}t\cdot X_1}\,]^n=\varphi(t)^n \tag{30}$$

を得る．

被積分関数の周期性から $A=[-\pi,\pi]^d$ にとれる．Fubini の定理から，

$$\begin{aligned}&(2\pi)^{-d}\int_{[-\pi,\pi]^d}e^{-\sqrt{-1}t\cdot x}\varphi(t)^n dt_1\cdots dt_d=(2\pi)^{-d}\sum_{y\in\mathbb{Z}^d}p_n(0,y)\int_{[-\pi,\pi]^d}e^{-\sqrt{-1}t\cdot(x-y)}dt_1\cdots dt_d\\&=p_n(0,x).\end{aligned}$$

□

2.5 Green 関数と母関数．

Green 関数を

$$G(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{P}_x[\,W_n=y\,]=\sum_{n=0}^{\infty}p_n(x,y)=\lim_{s\uparrow 1}G_s(x,y),\quad x,y\in\mathbb{Z}^d, \tag{31}$$

で定義する．即ち， random walk が y に到着する回数の期待値である．

遷移確率との関係は (14) を参照．定理 60 より， $G(x,y)$ は $d>2$ のとき有限（収束）, $d\leqq 2$ のとき発散する (transient か recurrent かに対応).

(31) と $p_n(x,y)=p_n(0,y-x)$ から

$$G(x,y)=G(0,y-x),\quad x,y\in\mathbb{Z}^d. \tag{32}$$

$\mathbb{Z}^d$ 上の関数 $f\colon\ \mathbb{Z}^d\to\mathbb{C}$ に対して p_1 に対応した離散ラプラス演算子 Δ を

$$(\Delta f)(x)=\sum_{z\in\mathbb{Z}^d}p_1(x,z)(f(z)-f(x)) \tag{33}$$

で定義する．Simple random walk に対応するのは通常の離散ラプラス演算子だが，一般の集合上の一般のマルコフ連鎖に対して対応する離散ラプラス演算子を (33) で定義できる．

$p_0(x,y)=\delta_{x,y}$ と $\displaystyle\sum_{z\in\mathbb{Z}^d}p_1(x,z)=1$ と (18) より

$$\sum_{z\in\mathbb{Z}^d}p_1(x,z)G(z,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{z\in\mathbb{Z}^d}p_1(x,z)p_n(z,y)=\sum_{n=0}^{\infty}p_{n+1}(x,y)=G(x,y)-\delta_{x,y}$$

となる．非負項のみなので和の順序交換は問題ない．y を固定して $G(\cdot,y)$ への Δ の作用として

$$(\Delta G)(x,y) = -\delta_{x,y} \tag{34}$$

即ち

> Chapman–Kolmogorov 方程式 (18) を満たせば（つまりマルコフ連鎖ならば）対応する Green 関数 (31) は差分方程式 (34) の解である．

(34) から推察されるように，Green 関数は，Markov 性の特徴を内包し，また，偏微分方程式との関連のある点で，強力な研究対象となりうる．

$d>2$ では Green 関数 $G(x,y)$ は有限値である．その漸近形を調べるのに，母関数と特性関数が有効である．($d \leqq 2$ (recurrent case) ではグリーン関数は使えないが，母関数は常に存在して，その $+0$ 極限の発散の様子が情報を持つ．)

定理 23 $d>2$ で以下が成り立つ．

$$G(x,y) = G(0,y-x) = d(2\pi)^{-d}\int_{[-\pi,\pi]^d} \frac{e^{-\sqrt{-1}t\cdot(y-x)}}{\sum_{k=1}^d (1-\cos t_k)}\,dt,\quad x,y\in\mathbb{Z}^d. \tag{35}$$

従って特に，$G(x,x)<\infty$．即ち，$d>2$ では SRW は過渡的である．

証明.

$$G_z(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n p_n(x,y),\quad z\in\mathbb{C},\ x,y\in\mathbb{Z}^d, \tag{36}$$

とおく．$G_z(x,y)=G_z(0,y-x)$ である．確率の有界性から $G_z(x,y)$ は $|z|<1$ のとき (x,y について一様に) 収束する．また，単調収束定理から

$$\lim_{z\uparrow 1} G_z(x,y) = G(x,y),\quad x,y\in\mathbb{Z}^d. \tag{37}$$

$G_z(x,y)$ を調べるのに特性関数 $\varphi_{G,z}$ が有効である：

$$\varphi_{G,z}(t) = \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} e^{\sqrt{-1}t\cdot x} G_z(0,x)\quad t\in\mathbb{R}^d. \tag{38}$$

$|z|<1$ のとき，定義 (36) を代入して和の順序を交換することができる ($\sum x\in\mathbb{Z}^d p_n(0,x)=1$ に注意)[21] .

$$\varphi_{G,z}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \left(\sum_{x\in\mathbb{Z}^d} e^{\sqrt{-1}t\cdot x} p_n(0,x)\right)$$

さらに，(29), (30), (28) を用いると

$$\varphi_{G,z}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (z\varphi(t))^n = \frac{1}{1-z\varphi(t)} = \frac{1}{d^{-1}\sum_{k=1}^d (1-z\cos t_k)},\quad t\in\mathbb{R},\ |z|<1\,.$$

よって 命題 22 の証明と同様に，

$$\begin{aligned} G_z(x,y) &= G_z(0,y-x) = (2\pi)^{-d}\int_{[-\pi,\pi]^d} e^{-\sqrt{-1}t\cdot(y-x)}\varphi_{G,z}(t)dt \\ &= d(2\pi)^{-d}\int_{[-\pi,\pi]^d} \frac{e^{-\sqrt{-1}t\cdot(y-x)}}{\sum_{k=1}^d (1-z\cos t_k)}\,dt, \\ &\quad |z|<1,\ x,y\in\mathbb{Z}^d. \end{aligned} \tag{39}$$

(37) と優収束定理から $d>2$ のとき (35) を得る．

□

[21] Green 関数で同様にやると絶対収束していないので Fubini が使えない．母関数の有効性がここにある．

注 8 *(i)* $|x-y|$ が大きいとき，$G(x,y)=G(0,y-x)\sim C_d|y-x|^{2-d}$ *(C_d は d だけできまる定数)* が大ざっぱには次のようにして見当がつく.

定理 *23* から， $\hat{x}=\dfrac{x}{|x|}$ とおくと，

$$
\begin{aligned}
G(0,x) &= \frac{d}{(2\pi|x|)^d}\int_{[-|x|\pi,|x|\pi]^d}\frac{e^{-\sqrt{-1}s\cdot\hat{x}}}{\sum_{k=1}^d(1-\cos\frac{s_k}{|x|})}\,ds\\
&\sim \frac{2d|x|^2}{(2\pi|x|)^d}\int_{[-|x|\pi,|x|\pi]^d}\frac{e^{-\sqrt{-1}s\cdot\hat{x}}}{s^2}\,ds\\
&\sim \frac{2d|x|^2}{(2\pi|x|)^d}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{e^{-\sqrt{-1}s\cdot\hat{x}}}{s^2}\,ds\\
&\sim C_d|x|^{2-d}.
\end{aligned}
$$

しかし，これはきちんとやろうとすると面倒であるとのことである *[43]*.

(ii) 定理 *60* では x 依存性は導かずに $p_n(x,y)\sim Cn^{-d/2}$ のみを得たが，*(36)* と *(39)* にタウバー型定理を使えば，$p_n(x,y)$ の $n\to\infty$ での漸近形の $x-y$ 依存性まで出るはずである.

答は $x-y-n$ が偶数のとき，

$$
p_n(x,y)\sim Cn^{-d/2}\exp(-|x-y|^2/n) \tag{40}
$$

となるはず.

もちろん，これもきちんとやろうとすると面倒なはず.

◇

2.6 Mean square displacement.

Mean square displacement の exponent は次元 d によらず $1/2$ である.

$d=1$ の場合と同様で，簡単なことではあるが，いちおう証明しておく.

$d=1$ のとき ((2) 以下の議論を参照) と同様に，まず，ℓ が自然数のときの $\mathrm{E}[\,(W_n^2)^\ell\,]$ の漸近形を初等的に導く．ここで $W_n=(W_{n1},\cdots,W_{nd})$ は d 次元ベクトルで，$W_n^2=\sum_{k=1}^d W_{nk}^2$ とする．$X_1=(X_{11},\cdots,X_{1d})$ も同様である.

d 次元 simple random walk の定義から $\mathrm{E}[\,X_{1i}\,]=0$, $i=1,\cdots,d$, $\mathrm{E}[\,X_{ki}X_{ji}\,]=\dfrac{1}{d}\delta_{kj}$, $k,j=1,\cdots,n$, $i=1,\cdots,d$. よって

$$
\mathrm{E}[\,W_n^2\,]=\sum_{i=1}^d\mathrm{E}[\,W_{ni}^2\,]=\sum_{i=1}^d\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n\mathrm{E}[\,X_{ki}X_{ji}\,]=n.
$$

同様に，$i\ne i'$ ならば $X_{ki}X_{ki'}=0$, $k=1,\cdots,n$, も使って，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[\,W_n^4\,] &= \sum_{i_1=1}^d\sum_{i_2=1}^d\sum_{j_1=1}^n\sum_{j_2=1}^n\sum_{j_3=1}^n\sum_{j_4=1}^n\mathrm{E}[\,X_{j_1i_1}X_{j_2i_1}X_{j_3i_2}X_{j_4i_2}\,]\\
&= \sum_{i_1=1}^d\sum_{j_1=1}^n\sum_{j_2=1}^n\sum_{j_3=1}^n\sum_{j_4=1}^n\mathrm{E}[\,X_{j_1i_1}X_{j_2i_1}X_{j_3i_1}X_{j_4i_1}\,]\\
&\quad+\sum_{i_1\ne i_2}\sum_{j_3=1}^n\sum_{j_4=1}^n\sum_{j_1\ne j_3,j_4}^n\sum_{j_2\ne j_3,j_4}^n\mathrm{E}[\,X_{j_1i_1}X_{j_2i_1}\,]\mathrm{E}[\,X_{j_3i_2}X_{j_4i_2}\,]\\
&= \sum_{i_1=1}^d\Big(\sum_{j_1=1}^n\mathrm{E}[\,X_{j_1i_1}^4\,]+\sum_{j_1=1}^n\sum_{j_2\ne j_1}\mathrm{E}[\,X_{j_1i_1}^2\,]\mathrm{E}[\,X_{j_2i_1}^2\,]\Big)+\sum_{i_1\ne i_2}\sum_{j_3=1}^n\sum_{j_1\ne j_3}\mathrm{E}[\,X_{j_1i_1}^2\,]\mathrm{E}[\,X_{j_3i_2}^2\,]\\
&= (n+n(n-1)/d)+(n(n-1)(d-1)/d)=n^2.
\end{aligned}
$$

以下，同様に考えると自然数 ℓ に対しては (3) の d 次元版

$$
\mathrm{E}[\,|W_n|^{2\ell}\,]\sim C_{d,\ell}n^\ell
$$

を得る．ここで $C_{d,\ell}$ は d と ℓ だけによる定数.

これから (3) 以下の議論をそのまま使うことができる．即ち $t \in \mathbb{R}^d$ を固定する毎に，$d=1$ のときの (3) 以下の議論で W_n を d 次元の $t \cot W_n$ に，Z を分布 $N(0,t^2/d)$ を持つ確率変数に置き換えると，$p>1$ と $t \in \mathbb{R}^d$ の各点で

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}[\,|n^{-1/2}t\cdot W_n|^{2p}\,] = \mathrm{E}[\,|Z|^{2p}\,] < \infty,\ \ t \in \mathbb{R}^d,\ d=1,2,3,\cdots,p>1, \tag{41}$$

を得る．よって，$C_{p,t,d}>0$ があって，

$$\mathrm{E}[\,|t\cdot W_n|^{2p}\,] \sim C_{p,t,d}n^p,\ \ t\in\mathbb{R}^d,\ d=1,2,3,\cdots,p>1, \tag{42}$$

の意味で (2) の一般次元化が成り立つ.

Mean square displacement の exponent は次元 d によらず定数 1/2 である.

以上の結果をみると，本質的に W_n が平均 0 分散 1 の i.i.d. の和であることしか使っていない．例えば，三角格子でも mean square displacement の exponent は 1/2 である．このように mean square displacement の指数 1/2 は random walk の格子構造によらない普遍的な指数である上に d にもよらない.

問 4 三角格子で *mean square displacement* の *exponent* は 1/2 であることを証明せよ. ◇

2.7 割愛した題材.

- エルゴード理論関連の話題．[3] の中では再帰性の positive/null と定常分布 [3, §6.2].
  周期的な場合 [3, §6.4].
- 調和関数，harmonic measure，などの解析的な議論 [12, §1, §2]，および，交差確率 ([12] の主テーマ).
- RW が通る点の個数．一度以上通った点の個数 R_n とするとき，W_n の漸近形（大数の法則，中心極限定理，重複対数の法則）のように R_n の漸近形についても大数の法則，中心極限定理，重複対数の法則などがある.

  交差確率とも関連していることが知られている．また，次元 d によって振る舞いが異なる．R_n はマルコフ性を持たないので，マルコフ連鎖から非マルコフ連鎖への研究の手がかりの一つであろう．私は文献を挙げる能力しかない [38]．最近浜名，熊谷 [41] 他が，さらに詳細な結果を出し続けている.

3 d 次元 self-avoiding walk.

3.1 Connective constant.

$\mathbb{Z}^d$ 上の長さ n の self-avoiding walk とは，$\mathbb{Z}^d$ の点の列 $w=(w(0),\cdots,w(n))$ であって，$|w(i{+}1)-w(i)|=1$, $i=0,\cdots,n-1$, および,

$$w(i) \ne w(j),\ \ i\ne j, \tag{43}$$

を満たすものをいう．原点 0 から出発する n 歩の self-avoiding walk の集合を $\mathcal{V}_n$ と書くことにする.

$d=1$ のときは $\mathcal{V}_n$ は原点から右または左に等速直進運動する path だけだから何の問題もない．要素の個数は 2 である．しかし， $d>1$ は難問である.

§1.1.3 で，原点から出発した 1 次元 simple random walk(の n 歩目まで) を，原点から出発する path の集合 $\mathcal{W}_n$ に対応させられることを見た．また，例えば (10) のように，path の総数 2^{-n} で割ることで，path の本数から，simple random walk の事象の確率を得ることができる.

以上は容易に $\mathbb{Z}^d$ 上の simple random walk に拡張できて，原点から出発した $\mathbb{Z}^d$ 上の n 歩の path の集合を $\mathcal{W}_n$ とおくと，その総数は $\sharp\mathcal{W}_n=(2d)^n$ であり，$W_1,\cdots,W_n$ で書かれた事象の確率は，対応する性質を持つ path の本数を $(2d)^n$ で割れば得ることができる.

Self-avoiding walk の定義で条件 (43) をはずせば，$\mathcal{W}_n$ の path の条件になるから，$\mathcal{V}_n\subset\mathcal{W}_n$ である.

$\mathcal{W}_n$ では path の総数を数えることは何の問題もなかった．Self-avoiding walk ではまず，path の総数 $C_n=\sharp\mathcal{V}_n$ (の漸近形) が難しい問題である．実際，$2\leqq d\leqq 4$ では未解決である.

最も簡単な評価は次のように得られる．1 歩目は $2d$ 方向全てが考えられる． 2 歩目以降は直前にいた方向には戻れないので， $2d-1$ 方向の可能性を越えることはない．逆に，常に座標軸の正方向 (d 通り可能) にしか進まなければ必ず self-avoiding になる．そこで,

$$d^n \leqq C_n=\sharp\mathcal{V}_n \leqq 2d(2d-1)^{n-1}, n\in\mathbb{N}, \tag{44}$$

を得る．さらに C_n の対数漸近形の存在は分かる．

$A_n \approx B_n$ を $\log A_n \sim \log B_n$，即ち，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log A_n}{\log B_n}=1$ の意味とする．

命題 24 (Hammersley 1957) $d \leqq \mu = \mu_d \leqq 2d-1$ なる定数 μ があって，$\mu = \inf_{n\in\mathbb{N}} C_n^{1/n}$ である．（従って，特に，$C_n \approx \mu^n$.）

証明. $w \in \mathcal{V}_{n+m}$ は最初の n 歩は $\mathcal{V}_n$ に，あとの m 歩は $\mathcal{V}_m$ に含まれるから，$C_{n+m} \leqq C_n C_m,\ n,m \geqq 1$, が成り立つ．$C_n \geqq 1$ なので $\log C_n$ に 定理 69 を適用できて，$\log\mu = \displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log C_n$ が存在して，$\mu = \inf_{n\in\mathbb{N}} C_n^{1/n}$ である．よって，(44) より $d \leqq \mu \leqq 2d-1$．

□

$\mu = \mu_d$ の値の詳しいことは分かっていない．[22] 数値的な結果として $\mu_2 \fallingdotseq 2.64$, $\mu_3 \fallingdotseq 4.68$ くらいである．$2.58 < \mu_2 < 2.73$ は分かっている（[12, §6.2] とその文献参照）．Kesten が finite memory walk の方法で μ_d の $s = 1/(2d)$ についての漸近展開の最初の数項を証明した (1964).

1960 年代前半までに Hammersley と Kesten が得た結果が，その後 30 年近く，self avoiding walk の厳密な結果としては最善だった．1990 年代前半に Hara–Slade が lace 展開の方法によって，$d \geqq 5$ の場合の漸近的な結果を最終的に決着させた．その結果の一つとして，

$$\mu_d = s^{-1} - 1 - s - 3s^2 - 16s^3 - 102s^4 + O(s^5)$$

を得た（ [26] とその引用文献参照）．

Lace 展開は高次元 $(d \geqq 5)$ の self avoiding walk が，simple random walk と exponent の意味で同じ漸近的性質を持つことを証明するのに強力な手法である．実際，命題 24 は $\log C_n$ と $\log\mu^n$ の比が 1 に収束することしか言えてないが，Hara–Slade は $d \geqq 5$ ならば $C_n \sim A\mu^n$ であることも証明した．

定理 25 (Hara–Slade (1990,1992)) $\mathbb{Z}^d$ 上の *self-avoiding walk* について，$d \geqq 5$ ならば $C_n \sim A\mu^n$ である，即ち $A = \displaystyle\lim_{n\to\infty}\mu^{-n}C_n$ が存在する．

ここで係数 A は d による定数で $A = 1 + s + 4s^2 + O(s^3)$.

Lace 展開の技術的な話は手間がかかるので，講義では触れない．証明の詳細は原典 [25, 24] と教科書 [13] に譲る．

ところで，μ に対応するのは $\mathbb{Z}^d$ 上の simple random walk では $C_n(\mathrm{SRW}) = (2d)^n$ から $\mu(\mathrm{SRW}) = 2d$ である．三角格子では (2 次元であるけれども) C_n(三角格子の SRW) $= 6^n$ なので,（原点への帰還確率の指数とは逆に）格子の形によって異なる．

- n 歩の path の総本数 C_n は random walk では明らかに $(2d)^n$ だが，self-avoiding walk では，既に難しい問題である．$2 \leqq d \leqq 4$ では漸近形も解決していない．
- 総本数の漸近形を決める $\mu = \displaystyle\lim_{n\to\infty} C_n^{1/n}$ そのものは,（存在することは self-avoiding walk でもわかるが,）random walk のときでも universal な量ではない (遷移確率の具体形の詳細によってしまう).
- C_n や μ は path 上の確率測度 (またはそれを特徴づける量) の分母になるので，これらの量が難しいことが path の性質を調べる上で障害になる．

3.2 Exponents．

Path の集合の典型的な性質を，その上の一様分布を考えて，それについて確率 1 で成り立つ性質や期待値の性質で測るのが自然である．

n 歩の path の集合のように有限集合では一様な測度の意味は明らか．Simple random walk の定義は，制限のない walk の集合上の一様分布になっていた．

[22] Exponents と違って「定義の詳細に依存する」量で，きちんと求めるのは難しい．また，当面，それを求めることを急務とはしない．まずは普遍的な量を解決しないと！

n が小さい間はあからさまに数えればいい[23] から，$n \to \infty$ の漸近的性質 (指数) に興味がある．

このような量を path の (典型的な) 性質とよぶことにする．Random walk では (Markov 性や，そこから得られる差分方程式や Dirichlet form との関係を除けば) まさにそのようなものを調べてきた．

3.2.1 ２乗平均変位の指数 ν．

Path の性質のうち，もっとも基本と考えられるのは path がどれくらいぎざぎざしているかであろう．言い換えればある程度の距離に広がるまでに要する時間 (歩数) の order である．
この量は，本当は「一段細かいスケールで見たとき，歩数が平均何倍増えるか？」という量 (1 スケールあたりの歩数行列の固有値) が定義可能なときは，それが基本にある．(Sierpiński gasket 上の SAW の平均歩数行列は §6 の (90)．Sierpiński gasket 上の SRW と $\mathbb{Z}$ 上の self-repelling walk についてはくりこみ群の作用するパラメータ空間が 1 元なので平均歩数行列は実数であり，それぞれ §5.2 の $\Phi_1'(x_c)$ と §4.3 の $\dfrac{\partial \Phi_{1,u}}{\partial x}(x_{c,u})$ である.）Path の性質の殆ど全てに影響する基本量である．

§1.1.3 で simple random walk に対して mean square displacement の指数を定義した．Simple random walk では次元によらず W_n は $\sqrt{n}$ の order (指数 1/2) であった．

Self-avoiding walk でも同様に定義できる．ここではいちばん弱い形で書いておく.（そもそも低次元では存在すら証明されていないのだから，強い形で書く意味がまだない.）

n 歩の self-avoiding walk $\mathcal{V}_n$ の各要素に equal weight で重みを入れた確率空間の族 $(\mathcal{V}_n, \mathrm{P}_n)$, $n \in \mathbb{N}$, を考える．即ち，期待値は

$$\mathrm{E}_n[\ \cdot\ ] = \frac{1}{C_n} \sum_{w \in \mathcal{V}_n} \cdot$$

で定義する．このとき， mean square displacement の指数 ν を

$$\mathrm{E}_n[\ |w(n)|^2\ ] \approx n^{2\nu}$$

で定義する．

§1.1.3 の simple random walk の mean square displacement の定義と比べると, ($p = 1$ の場合のみ，しかも log 比の収束のみ，という点で弱いが,）対応していることが分かる[24] ．Simple random walk の path との対応から，その確率は n 歩の path に等しい重みを与えたものになっている点でも，ここでの self-avoiding walk における定義と対応していることも注意．また，simple random walk では $\nu(RW) = 1/2$ である．

$d \geqq 5$ では $\nu_d = 1/2$ が証明されている．$2 \leqq d \leqq 4$ では証明は何もない．予想されている値は $\nu_2 = 3/4$, $\nu_3 = 0.59\cdots$, $\nu_4 = 1/2$．($d = 4$ では「log 補正」$\mathrm{E}_n[\ |w(n)|^2\ ] \sim D_4 n (\log n)^{1/4}$ があると予想されている．[25])．

3.2.2 帯磁率の指数 γ．

Path の本数 C_n について， $C_n = \mu^n r_n$ とおくと，命題 24 より $\lim\limits_{n\to\infty} r_n^{1/n} = 1$ は分かるが，一般的には，r_n 自体は収束するとは限らない．例えば $r_n \sim n^{\gamma - 1}$ のように振る舞うかという問題が考えられる．定理 25 によって $d \geqq 5$ ではたしかにこのようにふるまうことと，$\gamma = \gamma_d = 1$ であること（つまり，r_n 自体が収束すること）が分かる．

Simple random walk では $r_n = 1$ だったから，自明な意味で $\gamma = 1$ となるので，$d \geqq 5$ では self-avoiding walk の値と一致する．しかし， $d \leqq 4$ では，simple random walk では自明な意味で $\gamma = 1$ なのに対して，self-avoiding walk では，少なくとも $\log r_n$ についての漸近形が

$$r_n \approx \begin{cases} n^{\gamma_d - 1}, & d = 2, 3, \\ (\log n)^a, & d = 4, \end{cases}$$

と予想されている．ここで $\gamma_2 - 1 = \dfrac{11}{32}$, $\gamma_3 - 1 \fallingdotseq 0.162$, $a = \dfrac{1}{4}$． $d = 2, 3, 4$ では γ の存在すら証明はされていない (無理に定義すれば ∞ かもしれない)．

なお，命題 24 から

$$\mu^n \leqq C_n \tag{45}$$

を得るので， γ_d は（存在すれば） $\gamma_d \geqq 1$ である．

[23] しかし，あからさまに数える方法は計算機をもってしても急速に破綻する（[13, Appendix C, §9]）．

[24] $p = 1$ の場合のみ，というのはとにかく $p = 1$ でもできなければお話にならないから．そして，おそらく，$p = 1$ でできれば $p > 1$ も同様になるだろうという期待の下に，他の問題を優先する傾向があるから．もちろん，一般化できればそのほうがめでたいが，優先順位の低い問題と考える傾向がある．

[25] 逆に言えば $d = 2$, $d = 3$ では $\mathrm{E}_n[\ |w(n)|^2\ ] \sim D_d n^{\nu}$ と想像しているということ．但し，ν すら分からないのにそれより低次の振る舞いにはとても言及できない，ということか，$d = 4$ のときのように歯切れ良い発言はない．

3.2.3 比熱の非解析項の指数 α_{sing}.

n 歩で原点から点 x まで行く self avoiding walk の本数を $C_n(x)$ とする．即ち，

$$C_n(x) = \sharp\{w \in \mathcal{V}_n \mid w(n) = x\} \tag{46}$$

とおく．$C_n = \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} C_n(x)$.

Simple random walk では n 歩で原点に戻る確率が素直な量として計算できたが，self-avoiding walk では類似物を探すとすれば，self-avoiding polygon を考えることになる．Self-avoiding polygon とは $w = (w(0), \cdots, w(n))$ であって，$n-1$ 歩目まで self-avoiding で $w(n) = w(0)$, $|w(n-1) - w(n)| = 1$ となるものを言う．歩数 n の self-avoiding polygon の個数を A_n とすると，$A_n = \sum_{|e|=1} C_{n-1}(e) = 2dC_{n-1}(e_1)$．ここで e_1 は x_1 軸方向の単位ベクトル.

Hammersley は $A_n \approx \mu^n$ を証明した（[12, §6.2] とその文献参照）．実際，simple random walk のときの 定理 60 の類推では， A_n/C_n は n のべきで減衰すると期待されるが，これは証明されていない．もしそのように振る舞うならば，

$$\mu^{-n} A_n(x) \approx n^{\alpha_{sing}-2}$$

で α_{sing} を定義する.

定理 60 の類推からは再帰確率だけでなく，その判定条件 定理 21 に出てくる $p_n(0,x)$ の漸近形の類推で $C_n(x)$ が

$$\mu^{-n} C_n(x) \approx n^{\alpha_{sing}-2}$$

の振る舞いを持つと期待される.（もちろん n 歩で x に到着できる場合.）定理 60 から，simple random walk では $\alpha_{sing}(RW) = 2 - d/2$ となる.

3.2.4 臨界点での相関関数の減衰指数 η.

Simple random walk の Green 関数 (31) を，path との対応を用いて

$$G(0,x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{P}_0[\, W_n = x\,] = \sum_{n=0}^{\infty} (2d)^{-n} \sharp\{w \in \mathcal{W}_n \mid w(n) = x\}$$

と書き換えると，この類推として self-avoiding walk に対して

$$G(0,x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^{-n} C_n(x) \tag{47}$$

を考えることができる.

注 9 *(i) SRW* の場合と違って，もはや，差分方程式の解という意味はない．あくまでも，比較のための類推である.

(ii) 但し， μ^{-1} を変数 z に置き換えた関数は母関数という意味を持つ *§3.2.7* .

(iii) また， $\mu = \lim_{n\to\infty} C_n^{1/n}$ なので，$G(0,x)$ の性質と $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{C_n} C_n(x)$ の性質は，特に n の大きいところが効くはずの $|x|$ の大きいところ *(*漸近形*)* で似ていると期待される.

◇

$G(0,x)$ の漸近的性質を測る指数として

$$G(0,x) \approx |x|^{-(d-2+\eta)}, \quad |x| \to \infty, \tag{48}$$

によって η を（存在すれば）定義する.

定理 23 から，対応する simple random walk の指数は $\eta(RW) = 0$ $(d > 2)$ である.

3.2.5 交差確率の指数 Δ_4.

n 歩の self avoiding walk 2 本 w_1, w_2 のうち，w_1 は原点から出発するとし，w_2 はあらゆる点からの出発を許す．その組み合わせのうちで，両者が交わる（$w_1(i) = w_2(j)$ となる i, j が存在する）組数を $C_{n,n}$ と書くことにするとき，

$$C_{n,n} \approx n^{2\Delta_4+\gamma-2}\mu^{2n} \tag{49}$$

で，Δ_4 を定義する．

$\Delta_4(RW) = 3/2$ が分かっている [12]．Self-avoiding walk ではこの量に関する結果はない．この量は φ^4_4 スピン系と呼ばれる平衡系統計力学モデルの連続極限として得られる場の量子論が自由場 (ガウス場) しかない，という予想に（緩い意味で）関連している点で興味がある．しかし，難しい量である．

3.2.6 高次元における exponents.

1990 年代初めに，いくつかの指数について，$d \geqq 5$ では (log 比ではなく，元の量の比の漸近形という) 強い意味で存在し，しかもその値が対応する simple random walk の値と一致することが Hara–Slade によって分かった．

定理 26 (Hara–Slade (1990,1992)) $\mathbb{Z}^d$ 上の *self-avoiding walk* について，$d \geqq 5$ ならば $\nu = 1/2$, $\gamma = 1$ である．

注 10 *(i)* 漸近形は log 比ではなく，もっと強い意味で成り立つ．即ち，任意の $\epsilon > 0$ に対して

$$C_n = A_d\mu^n(1 + O(n^{-1/2+\epsilon})),$$
$$\mathrm{E}_n[\,|w(n)|^2\,] = D_d n(1 + O(n^{-1/4+\epsilon})).$$

ここで，A_d, D_d は次元だけで決まる定数で，例えば $1 \leqq A_5 \leqq 1.493$, $1.098 \leqq D_5 \leqq 1.803$.

(ii) ν に関して $p > 1$ の場合もできるかどうかは，できるであろうけれども技術的に $p = 1$ より難しい部分があるので，今のところやられていない．

(iii) ν に関しては指数の値よりも遙かに強く，スケーリング極限が *simple random walk* のスケーリング極限と同じ *(Brownian motion)* になることまで $d \geqq 5$ で分かっている．即ち，$n^{-1/2}w([nt])$ を線形内挿した確率過程の分布が $n \to \infty$ で *Wiener* 測度に弱収束する

◇

その他の指数も高い次元で，あるいは，少しモデルを変える (1 歩で 1 より大きいある有限距離まで飛ぶことを許す spread out self avoiding walk) と解決したものがある．詳細は文献 [23] （元のモデルについての結果は執筆中）に譲り，結果のみ掲げておく．

定理 27 (Hara–Hofstad–Slade (2000)) ある次元 d_0 が存在して $d \geqq d_0$ ならば $\eta = 0$, $\alpha_{sing} = 2 - d/2$ である．

注 11 *(i)* いずれも log 比ではなく比が収束する意味である．

一般的に，現時点では *lace* 展開の方法は，結果が得られるときは強い意味の漸近形の存在が証明される．

(ii) *[23]* で証明されていることは（十分高次元の *spread out model* についてではあるけれども）これらの指数の存在よりも強くて，局所中心極限定理 *(local central limit theorem)*：$n \to \infty$, $|x|^2 \asymp n$ で $C_n(x) \asymp \mu^n n^{-d/2} \exp(-const.|x|^2/n)$.

元のモデルでも行けるという感触があるようだ．

◇

3.2.7 母関数による exponents の定義.

定理 27 の d_0 に本質的な意味はない．$d_c = 4$ が本質的な次元であって，$d > d_c = 4$ ではこれらの指数は全て simple random walk と同じ値になると信じられているし，関連する結果が証明されているという意味でほぼ決定的な状況証拠も蓄積している．例えば η は，対応する量の母関数の変数に関する指数として $d \geqq 5$ で決着している．このことは母関数で先に対応する事実が分かっている．

(35) でみたように，母関数は漸近形の評価に有効である．特に積分順序の交換を自由にできる点が強力である．ただし，元の変数に戻すとき（Tauber 型評価）に苦労する場合があって，そのために母関数に関しては漸近形が決着していても元の変数で未解決ということが起きている．

Path の本数 $C_n(x)$, C_n の母関数を，

$$G_z(x,y) = G_z(0,y-x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(y-x) z^n,$$
$$\chi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n = \sum_{w} z^{|w|} = \sum_{y\in\mathbb{Z}^d} G_z(x,y) \tag{50}$$

で定義する．SAW では $x=y$ のときは自明な和である．これらの母関数は 命題 24 より，$|z|<z_c=\mu^{-1}$ で定義され，$|z|>z_c$ で発散．$|z|=z_c$ では場合 (d) による．(47) より， Green 関数は $G(x,y)=G_{1/\mu}(x,y)$ である．特に，(45) より $C_n \geqq \mu^n$ だから，

$$\chi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n \geqq (1-\mu z)^{-1}, \quad 0 \leqq z < \mu^{-1},$$

なので，

$$\lim_{z\uparrow z_c} \chi(z) = \infty \tag{51}$$

となる．

Bridge(第 1 成分が出発点と到達点のそれらが作る閉区間の外に出ない SAW) に関する議論により，$G_z(x,y)$ の収束半径も (自明な $x=y$ を除いて) μ^{-1} である [13, §3.2].

Simple random walk の対応する量は $\chi_{SRW}(z)=(1-2dz)^{-1}$ となることは容易である．

相関距離 ξ を

$$\xi(z)^{-1} = -\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log G_z(0,(n,0,\cdots,0))$$

で定義する．$z>\mu^{-1}$ で $\xi(z)<\infty$ となる．実際，定義 (50) において，直線で結ぶ道だけ考えると，$G_z(0,(n,0\cdots,0)) \geqq z^n$ なので $\xi(z)^{-1} \leqq -\log z$．他方， $z<z_c=\mu^{-1}$ ならば，$r=z(\mu+\epsilon)<1$ となるように $\epsilon>0$ を選ぶと，μ の定義から十分大きい n に対して $C_n=O((\mu+\epsilon)^n)$ となるので，$G_z(0,(n,0\cdots,0)) \leqq C\exp(-|\log r|n)$，即ち，$\xi(z)^{-1} \geqq -\log r$．Bridge に関する議論 [13, §4.1] によって $\lim_{z\uparrow z_c} \xi(z)^{-1}=0$ も分かっている．

Lace 展開によって $d \geqq 5$ では $\xi(z_c)^{-1}=0$ である．$d=2,3,4$ ではこれは予想にとどまっている．

母関数の言葉で書かれた指数の定義を考えることができる．十分良い性質があれば，Tauber 型定理によって元の指数も存在して一致する．そこで，同じ記号を用いることにする．例えば， $\chi(z) \asymp (z_c-z)^{-\gamma}$,

$\xi(z)$ は 1 歩で行ける範囲の大きさを表すので ν の指数に関連すると予想される．($d \geqq 5$ では証明された.) Mean square displacement と直接関係があるのは

$$\xi_p(z) = \left[\chi(z)^{-1} \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} |x|^p G_z(0,x) \right]^{1/p}, \quad p>0\,.$$

$\xi(z) \approx \xi_p(z) \approx (z_c-z)^{-\nu}$ が予想されている．特に，強い ($\sim$ の) 意味で ν と γ の存在を仮定し，γ について Tauber 型定理が成り立てば (γ が元の定義でも母関数の非解析性による定義でも等しければ)， $\nu_2=\nu$ を得る．

他方， $G_z(0,x)$ を x についてフーリエ変換した量

$$\hat{G}_z(k) = \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} e^{\sqrt{-1}k\cdot x} G_z(0,x)$$

は $z=1/\mu$ で η に結びつくはずである．(48) に (適当な Tauber 型定理の成立の仮定の下で) 対応するのは

$$\hat{G}_{z_c}(k) \sim C|k|^{-2+\eta}$$

となる．

なお，(48) と (51) から，(η が存在すれば) $\eta \leqq 2$ である．

実際は，$d \geqq 5$ での lace 展開の結論は，先ず，n の母関数かつ x のフーリエ変換の量についての指数が証明され，それから Tauber 型定理によって n についての漸近形の指数に翻訳され，最後に x についての漸近形の議論が最近可能になった．

定理 28 (Hara–Slade (1990,1992)) $z_c=1/\mu$ とおくとき， $d \geqq 5$ で以下が成り立つ．

(i) 任意の $\epsilon > 0$ に対して d, ϵ だけで決まる正数 $C_{\epsilon,d}$ が存在して，$\hat{G}_{z_c}(k) = \dfrac{C_{\epsilon,d}}{k^2 + O(k^{2.5-\epsilon})}$．(即ち，$\gamma = 1$．)

(ii) $\chi(z) \sim \dfrac{A}{1 - z/z_c}$．(即ち，$\gamma = 1$．)

(iii) $\xi(z) \sim \sqrt{\dfrac{D}{2d(1 - z/z_c)}}$．(即ち，$\nu = 1/2$．)

3.2.8 Exponents に関する予想．

高次元の exponents が解決しているのに比べて，低次元では存在も含めて殆ど未解決である．一つの重要な理由は，$d < 4$ では exponents の値が，simple random walk と異なるだろうと思われている点である．つまり，

> 漸近的性質が simple random walk と大きく異なると予想される次元では self-avoiding walk の漸近的性質は殆ど何も分かっていない．

ここでは，信じている人が多い予想から主なものを結論だけ列挙しておく．

予想 29 以下が予想されている．

(i) $d > 4$ では α_{sing}, ν, γ, η は *simple random walk* の値に等しい．(主要部分は定理 *26*, 定理 *27* などで実際に証明されている．)

(ii) 全ての次元で $\gamma = \nu(2 - \eta)$ が成り立つ *(scaling)*．(高次元では定理 *26*, 定理 *27* より成り立つことが分かっている．)

(iii) 全ての次元で $\alpha_{sing} - 2 = -d\nu$ が成り立つ *(hyperscaling)*[26]．(高次元では定理 *26*, 定理 *27* より成り立つことが分かっている．)

(iv) $d < 4$ では $d\nu = 2\Delta_4 - \gamma$ が成り立つ．

> Scaling とは本質的には path のギザギザの度合いに関する典型的な性質は，一つの指数 (即ち ν) だけで決まる，という提唱である．言い換えると，path に関する (漸近的) 情報は path の本数とぎざぎざの度合いを定める指数 γ, ν で決まる，という提唱である．結果として 2 つの指数を除いて他の全ての指数は (d も入れれば) 定まる．このことは証明されてはいないが，確率過程研究の重要な作業仮説として，研究や講義の構成の中心に据えないといけない[27]．

Self avoiding walk の mean square displacement の指数の古い予想として，Flory の議論 (§A.11) が知られている．それによると，ν は (もしあれば) およそ次の値に近いと予想される．

$$\nu = \begin{cases} \dfrac{3}{d+2}, & d \leqq 4, \\ \dfrac{1}{2}, & d > 4. \end{cases}$$

これは $d = 1$ では自明に正しく，Hara–Slade の結果 定理 26 によって $d \geqq 5$ でも正しい．$d = 4$ では厳密ではないが信憑性のある[28] 議論によって γ のときのような log の寄与を除いて正しいと予想されている．より具体的には $d = 4$ では

$$\mathrm{E}_n[\,|w(n)|^2\,] \asymp n(\log n)^{1/4}$$

が予想されている．

別の厳密でない議論によって $d = 2$ でも正確な値だという予想がある．しかし，数値計算 (厳密性も精密性も要求しない数値計算) によれば，$d = 3$ では $\nu_3 \fallingdotseq 0.59$ ではないか，と予想されている．

[26] 比熱の指数として α をとると $d > 4$ や SRW では $\alpha = 0$ となって hyperscaling が壊れる，と統計力学の教科書にある．適切な定義の選択の問題に過ぎないと考えていいかどうかはよく分からない．スピン系では α_{sing} は調べにくい量である．

[27] Markov 性より「ギザギザ」(スケール変換に対する応答) のほうが path の性質の本質ととらえたいからこそ，数学者は株価のグラフとブラウン運動の sample path に類似性を追求するのだろう．

[28] その議論をより単純なモデルに適用すればきちんとした結果が出る，その議論はそのまま本当の証明に生かせるだろうと考えられている，など．

その他のこと．

scaling と ν, γ に関する予想値から $\eta \geqq 0$ が予想される．これを $\hat{G}$ の不等式としたものを infrared bound という．ϕ^4, Ising スピン系では証明されているが，$d \leqq 4$ SAW では証明されていない．

Hyperscaling と ν の予想値を仮定すると $\alpha_{sing,d} - 2 < -1$ となり，$G_{z_c}(0,x) < \infty$ を得る．他方 $d = 2$ では SRW の対応する量は発散する．

3.2.9 統計力学の類推．

いくつかの指数を（$d \leqq 4$ では存在するかどうかも open problem として）定義した．これらは，平衡系統計力学で研究されてきた指数の類推で選ばれた面がある．(もちろん，さらにさかのぼれば，それぞれ基礎的な意味があることになるが.）平衡系統計力学（の正準集合による定式化）とは，phase space と呼ばれることもあるアプリオリな測度空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ と Ω 上の下に有界な実可測関数（ハミルトニアン） $H : \Omega \to \mathbb{R}$, および， $\beta \in \mathbb{R}$ （逆温度）に対して，対して分配関数

$$Z(\beta) = \int_\Omega e^{-\beta H(\omega)} d\mu(\omega)$$

即ち， H の母関数，および， $F = \log Z$ （自由エネルギー），などを定義しておいて， μ, H を「現実の興味深いモデル」からとってきたときに，これらの量がどう振る舞うかを調べる分野である[29]．特に， β について非解析的な点が，臨界点などと呼ばれて重要な問題になる．

特に，μ が離散分布の場合や，self-avoiding walk や random walk のように，有限集合上の分布を考えてその $n \to \infty$ 極限（熱力学極限）を考察する場合には， μ として離散集合上の一様分布（個数数え）をとるのが普通である．簡単のために， H が非負整数値をとるとすると，

$$Z(z) = \sum_\omega z^H(\omega) = \sum_{0 \leq n < \infty} C_n z^n \tag{52}$$

と書けるので，今までの節の考察対象との対応がよりはっきりするだろう．ここで， $C_n = \sharp\{\omega \in \Omega \mid H(\omega) = n\}$ とおいた．また，前節までとの対応のため $z = e^{-\beta}$ とおいた．

H は外場と呼ばれる β 以外のパラメータも含むのが普通である．(あるいは，対応する項を確率変数としてそれらを合わせた多次元の母関数を考えるといってもよい.）たとえば，強磁性 Ising スピン系 (の有限系)

$$\Omega = \{\omega = (\sigma_i)_{i=1,\cdots,n} \mid \sigma_i \in \{\pm 1\},\ i = 1, \cdots, n\}$$

のときは，$H = \sum_{i,j} J_{ij}\sigma_i\sigma_j + h\sum_i \sigma_i$ などと，実変数 h （磁場）も入っているのが普通である．ここで $J_{ij} \geqq 0$ は定数（ d 次元 Ising スピン系などと空間形状を込めて呼ぶのが普通だが，これは 0 でない J_{ij} の取り方によって決まる）．適当に変数を取り替えれば，

$$Z(\beta, h) = \sum_{\sigma_1 = \pm 1} \cdots \sum_{\sigma_n = \pm 1} e^{-\beta \sum_{i,j} J_{ij}\sigma_i\sigma_j} e^{h \sum_i \sigma_i} \tag{53}$$

となる．

分配関数の和の各項を sample $\omega = (\sigma_i)$ の出現確率とする確率測度 μ_n を考える．適当に良い性質があれば，確率測度はモーメントで決まる． $\sigma_i(\omega)$ を与える確率変数（座標への projection）を簡単のため再び σ_i と書くことにすれば，今の場合，モーメントは $\mathrm{E}[\ \sigma_{i_1} \cdots \sigma_{i_k}\ ]$ の形をしている．統計力学ではこの量を相関関数という．(複数の σ_i の符号がそろっている度合いを見る量だから.）

$F(\beta, h) = \dfrac{1}{n} \log Z(\beta, h)$ を自由エネルギーと言う．(53) を h で 2 階微分して $h = 0$ とすることで，

$$\chi(\beta) = \frac{\partial^2 F}{\partial h^2}(\beta, 0) = \frac{1}{n} \sum_{i,j} \mathrm{E}[\ \sigma_i \cdots \sigma_j\ ]$$

を得る．左辺は，磁場 h を変化させたときの系のエネルギーの変化の変化を表すので帯磁率と言う． 2 点相関関数の和は帯磁率という意味を持つ．(後述の相転移点を除けば $n \to \infty$ でも対応する式が成り立つ．F の定義で n で割ったのは，そのとき $n \to \infty$ 極限が存在するから.）

[29] ここの書き方は非常に不正確である．正確に言うと，先ず，有限系 (有限自由度系) を定義する．これは，具体的には，1 つのハミルトニアン H ではなく，(有限系の) ハミルトニアンの族を考えることで実現する．これが (有限) 実数値関数であり，また有限系の分配関数が (有限) 実数値である．その次に無限体積極限を考えたいのだが，このままでは，興味のあるケースではハミルトニアンも分配関数も ill-defined(無限大) になってしまう．しかし，自由エネルギーは (興味ある一般的なケースで) 体積 (自由度) に比例するので，単位自由度当たりの自由エネルギーの無限体積 (無限自由度) 極限は存在する．また， $Z^{-1}e^{-\beta H}d\mu$ の有限体積版の測度の列はある測度に弱収束する．これらの量の振る舞いを調べる，というのが正しい言い方．

以下，この小節では「適当な (必要ならば自由度のべきで規格化した) 無限体積極限」という修飾語を省略して形式的な記述をしたり，有限系を統計力学と読んだり不親切に記述する．(改訂することがあれば，ちゃんと書きたいが.）

J_{ij} の support によって $\{1,\cdots,n\}$ に「空間構造」を入れられる.（詳しく言うと，$n\to\infty$ の列が network 構造を持つように consistent に列を作る.）伝言ゲームの類推から i,j が離れるほど $\mathrm{E}[\,\sigma_i\sigma_j\,]$ は小さくなることが想像できるし，実際，$\{J_{ij}\}$ が $\mathbb{Z}^d$ に近い構造を持つときは β の値によって $|i-j|$ とともに指数減少することなどが証明できる．モーメントの分析によって (DLR 方程式)，J が $\mathbb{Z}^d$ に近い構造を持つときは，ある種の $n\to\infty$ の弱収束極限測度が存在する（熱力学極限）.

β が大きくなってスピンがそろっている sample (configuration とよぶ) の重みが増えると，相関は増加する．n が有限ならば，重みは，従って，相関関数も β について（複素）解析的である．これに対して，$d\geqq 2$ の熱力学極限では β_c があって，$\beta<\beta_c$ では相関関数が $|i-j|\to\infty$ で 0 になるが，$\beta>\beta_c$ で相関関数が $|i-j|\to\infty$ で 0 でなくなる．即ち，複素解析性が失われる（相転移）.

さらに，$\beta\to\beta_c$ で種々の量（相関関数やその和，分配関数やその微分）の $\beta-\beta_c\to 0$ または $|i-j|\to\infty$ での漸近形が指数的振る舞いをする．これらの指数を critical exponent とよぶ.（以上は強磁性モデルとよばれるモデル一般に見られる現象である.）

Random walk や self-avoiding walk の指数は，統計力学の臨界指数のアナロジーとみることができる.（単に式の上のアナロジーから始まるが，空間構造に関する universality という重要な論点が研究の中心になるべきである.）

分配関数 (52) と母関数 (50) とを比べると以下の対応がある.

母関数	分配関数
z	$e^{-\beta}$
$z_c=\mu^{-1}$	$e^{-\beta_c}$
$G_z(x)$	$\mathrm{E}[\,\sigma_0\sigma_x\,]$
$\chi(z)$	$\chi(\beta)$

「臨界指数」のまとめ.

記号	定義	SRW	統計力学
γ	$C_n\approx\mu^n n^{\gamma-1}$	1	帯磁率
α_{sing}	$C_n(x)\approx\mu^n n^{\alpha_{sing}-2}$	$2-d/2$	比熱 (非解析項)
ν	$\mathrm{E}_n[\,\|w(n)\|^2\,]\approx n^{2\nu}$	$1/2$	2 乗平均変位
η	$G_{z_c}(x)\approx\|x\|^{-d+2-\eta}$	0	相関距離

どういう量の exponents を考えるかは統計力学の伝統の影響が大きい．さらにさかのぼれば，スピン系における実験しやすい量（帯磁率や比熱はそれぞれ磁化や熱容量の温度微分）であってモーメントのような系を定める量である[30].

Exponents に注目する理由は，指数が正方格子でも三角格子でも同じ，というように，系の細かい構造によらず，次元などの大局的な量だけで決まる期待があることである．どの程度モデルを変えても指数が変わらないのかは全くといっていいほど分かっていないが，系の細かい構造によらないだろうという期待を理論物理学では universality 仮説と言うことがある.

他方 μ や漸近形の比例計数などは系の細かい構造によって変わるので，universal な量ではない．そこでこれらは算出も難しいし，他の深い構造との関連も弱いだろうということになる.

また，指数は完全な定数ではなく，次元 d によって変わることも重要である．単なる定数ではなく，系の大局的構造を反映している．しかも，高次元では RW の指数と SAW の指数が一致するという観察は，ある次元 d_c より大きい次元では殆どの指数が系に殆どよらない定数であって，それが RW の値に一致し，$d<d_c$ では SAW と RW では（もしかしたら他にもいくつか違うものがあるかもしれない）指数が違う，という漠然とした予想を導く．この d_c のことを上臨界次元と呼ぶ．SAW では $d_c=4$ が予想されている．Flory の近似公式は ν についてこの予想に沿った値を与えている．また，その「導出」はなぜそのような「臨界次元」があると考えるかという描像を与えている.

3.3 Random walk に基づく関連モデル.

3.3.1 Random walk の交差確率.

§3.2 初めに書いたように simple random walk には $r_n=C_n\mu^{-n}$ の (自明でない) 類推がないが，random walk の交差確率を詳しく研究した Lawler は [12, §6.3] で交差確率との類推を観察している.

$W_n^{(1)}=\sum_{k=1}^n X_k^{(1)}$, $W_n^{(2)}=\sum_{k=1}^n X_k^{(2)}$, を原点を出発点とする独立な $\mathbb{Z}^d$ 上の simple random walk とする．$A\subset\mathbb{Z}_+$ に対して，時間帯 A に $W_n^{(i)}$ が通った点の集合を $W^{(i)}(A)=\{W_k^{(i)}\mid k\in A\}$ と書くとき，n 歩までの非交差確率を

$$f_n=\mathrm{P}[\,W^{(1)}((0,n]\cap W^{(2)}((0,n]=\emptyset\,]$$

とおく.

§3.2.5 で考察するものとは全く違うことに注意.

[30] スピン系と SAW はガウス系と RW のところで合わせればアナロジーが完全になると思うが.

[12, §5.1, Th.4.4.1, Th.3.5.1] によれば，次のことが分かっている．

定理 30 $\zeta_2>0,\ \zeta_3>0,\ C_d>0,\ d=5,6,\cdots,$ が存在して，

$$f_n \approx \begin{cases} n^{-\zeta_d}, & d=2,3, \\ (\log n)^{-1/2}, & d=4, \\ C_d\,, d \geqq 5. \end{cases}$$

$\zeta_2=\dfrac{5}{8}$， $\zeta_3 \fallingdotseq 0.28$ が予想されている．$d\geqq 5$ の主張は，永久に非交差である確率が正，ということである．逆に言えば，$d\leqq 4$ では確率 1 でいつかは交差する．

Lawler の (非) 交差確率に関する議論は手間がかかるので，講義では触れない．（まず，２本の simple random walk をつないだ全整数時刻にわたる two sided walk を考え，これと simple random walk の非交差確率を精密に求めてから，それに基づいて f を調べる.）詳しくは教科書 [12] を参照.

Self-avoiding walk における $r_n=C_n\mu^{-n}$ の漸近形について，次のように観察している [12, §6.1]．もし， $r_n\sim An^{\gamma-1}$ のように振る舞うとすると，$\dfrac{C_{2n}}{C_nC_n}\sim A^{-1}(n/2)^{1-\gamma}$ である．左辺は n 歩の self-avoiding walk の集合に (simple random walk と同様に) 一様分布の確率を入れたときに，２本の self-avoiding walk が原点以外で交差しない確率である．よって simple random walk の ζ_d と self-avoidng walk の γ_d-1 が対応する．§3.2 初めに引用した予想値 $\gamma_2-1=\dfrac{11}{32}$, $\gamma_3-1\fallingdotseq 0.16$, と $\zeta_2=\dfrac{5}{8}$， $\zeta_3\fallingdotseq 0.28$ を比べると，self-avoiding walk のほうが simple random walk に比べて半分だが，これは非交差確率は，まっすぐのびやすい self-avoiding walk のほうが大きい，という直感に合う．

なお，改めて，simple random walk に関する指数 ζ_d は存在は証明されているが，self-avoiding walk に関する指数 γ は $d\leqq 4$ では存在すら証明はされていない．類推といっても，低次元 self-avoiding walk については，分からないことが多い．

3.3.2 Weakly self-avoiding model と Edwards model．

よく分かっている simple random walk の交差確率などを手がかりに self-avoiding walk を調べるのは自然な研究方針である．

Simple random walk から作ったモデルで self-avoiding walk と同じ指数を持つと予想されているのは，weakly self avoiding walk (Domb–Joyce model) である．n 歩の path (制限無し) $w\in\mathcal{W}_n$ に対して，自己交差の回数を

$$J(w)=\sum_{0\leqq i<j\leqq n}\delta_{w(i),w(j)} \tag{54}$$

とおく．J の simple random walk に関する期待値は分かっている [12, Theorem 1.2.1].

$$\mathrm{E}[\,J\,]=\sum_{0\leqq i<j\leqq n}p_{j-i}(0,0)\sim c_d\sum_{0\leqq i<j\leqq n}(j-i)^{-d/2}\sim c_d\begin{cases} n^{3/2}, & d=1, \\ n\log n, & d=2, \\ n, & d\geqq 3. \end{cases}$$

で定義する．これを weakly SAW または Domb–Joyce モデルという．これは $\beta>0$ ならば SAW と同じ指数を持つと予想されている．

$\mathcal{W}_n$ 上の確率測度の族

$$U^\beta[\{w\}]=\frac{1}{\mathrm{E}[\,e^{-\beta J}\,]}e^{-\beta J(w)}\,,\quad \beta\geqq 0,$$

を weakly self avoiding model という．ここで $\mathrm{E}[\,\cdot\,]$ は n 歩の simple random walk の確率とする．

$\beta=0$ のときは (path $\mathcal{W}_n$ 上の測度として）simple random walk と同じ，$\beta=\infty$ では self-avoiding walk と同じである．

Self-avoiding walk と同じ指数を持つと予想されている．Hara–Slade の一連の結果によって $d\geqq 5$ (一部は十分大きい d) では証明もされている．但し，低次元では解析が難しく， $d<4$ では元の self-avoiding walk と同様に結果はない.

低次元で研究が進んでいるモデルとして Edwards model がある．本来 Brown 運動（連続時間確率過程）に基づいて作られた（先ず形式的に構想されて，その後適切な極限モデルとして定義された）確率測度だが，その離散類推を，例として [12, §6.4] から引用しておく．(54) の J を用いて $\mathcal{W}_n$ 上の確率測度の族

$$Q^\beta[\{w\}]=\frac{1}{\mathrm{E}[\,e^{-\beta\bar{J}}\,]}e^{-\beta\bar{J}(w)}\,,\quad \beta\geqq 0,$$

を (離散)Edwards model という．ここで，$\bar{J}=2n^{(d-4)/2}(J-\mathrm{E}[\,J\,])$ （$\mathrm{E}[\,J\,]$ は $n\to\infty$ での収束が見やすいように定数を引いただけ.）．$d=4$ では weakly self avoiding model と実質上 (定数の定義を除いて) 同

じ．$d < 4$ では weakly self avoiding model より RW に近い．実際， $d = 2$ では Edwards model については $\nu = 1/2$ が言える.（その連続極限は連続版 Edwards model になって，それはブラウン運動に対して絶対連続になることも証明されている．$d = 3$ ではブラウン運動に対して singular になることはわかっているが，離散 Edwards model が連続 Edwards model に収束するかどうか，および， ν の値は分かっていないらしい.）

3.4 割愛した題材．

(i) Lace 展開.

Lace 展開は技術的に込み入っていて，基礎講義にはあまり向かない[31]．(Self-avoiding walk に関する少し立ち入った研究が全て込み入っている.）Lace 展開を勉強したいならば，教科書 [13] を参照されたい．教科書執筆以後も結果が出続けているので最新の成果は原著論文を当たる必要がある．

(ii) Non-nearest neighbor jump を許した SAW．任意の d で漸近的性質 (特に exponents) は SAW と同じと期待される．しかも，Lace 展開が非常に有効なモデルで，$d \geqq 5$ で指数が RW のそれと一致することが多くの指数について決着している（少なくともフーリエ変換や母関数で指数を定義すれば）.

(iii) その他の関連するモデル．数学的にも詳しく研究されている代表例として percolation が有名である.「統計力学由来のモデル」の一つとして，exponents の定義など多くの点で SAW との類推が多い. Lace 展開による高次元における解決も進んでいる．これについては，教科書 [6, 11, 13] を参照.

(iv) 以上の割愛事項に比べれば重要度は落ちるが，SAW を含めた「統計力学由来の確率モデル」がどれも極めて難しく，かつ，数学的にも物理学的にも大成功をおさめた SRW やブラウン運動と直接結びつきにくいため,「SAW に近い，SRW に関係ありそうなモデル」がたくさん提唱された.

Self-repelling models．完全な self-avoiding 性はないが，というモデルは非常にたくさん提案されている．おそらく SAW が難しいため，ということと，マルコフ過程（特に random walk やブラウン運動）に基づくモデルがほしいからだと思われる．ほとんど触れなかった.

(a) Weakly self-avoiding walk．$d = 4$ が critical であることが明確になる．Lace 展開は最初 weakly SAW で Brydges–Spencer が導入した.

(b) Edwards model．元々，連続時間のモデル．ブラウン運動への摂動ポテンシャルとして形式的に書かれる．$d = 1$ では実質も問題ない．$d = 2, 3$ では「引き算（くりこみ）」によって正当化されることは分かっている．離散時間版も調べられている.

(c) SRW と SAW をつなぐ試みは weakly self avoiding model や Edwards model の他にも多くある．Kinetically growing walks [12, §6.5], loop erased walks [12, §7] や true self-avoiding walk など.

但し，simple random walk から作ったモデルで結果の出るものは，今のところ，（self-avoiding walk の特徴が出るはずの低次元で）最初に定義した self-avoding walk の漸近的性質（指数など）が一致しないようである.

以上とは全く違う研究方向だが，pre-Sierpiński gasket とよばれる「低次元」的な pre-fractal 上で，ある意味で simple random walk と self-avoiding walk を「きちんとつなぐ」ことができる §4.

4 1次元 self-repelling walk．

4.1 Introduction.

§1, §2 では random walk を i.i.d. の和として定義した．しかし，これでは self-avoiding walk への拡張は困難である．他方，random walk と self-avoiding walk 共通の特徴として「典型的な path がギザギザしている」ことがある.「なめらかな」曲線では mean square displacement の指数が 1 より小さくなることはありえない.「ギザギザ」とは，ある大きな歩数の path を眺めたとき，少し細かく見てもギザギザしているが，もっと細かく見てもギザギザしている，ということである．これに対して微分可能な曲線は，十分細かく見れば直線に見える．それが微分可能の定義である[32]．

Path のギザギザに由来する漸近的性質，例えば exponents，は大きな歩数の path を粗く（例えば２分割，４分割，と）切っていったとき，どのスケールでもギザギザしている，ということから導かれる，と期

[31] というのは純然たる口実で，割愛する真の理由は，原さんに講義してもらうべきだからである.
[32] ここで，時間方向に眺める通常の確率連鎖や確率過程の定式化から，くりこみ群の描像に移行する導入をはかっている．講義としてはこの節の内容で具体的な事実を説明しつつ,「ギザギザ」の方向に眺めるとは数学としてはどういうことかをていねいに説明すべきである．が，まだ講義録として不完全である.

待される．つまり $n \to \infty$ で収束する量は十分大きな n で既に極限に近いから，ある程度以上細かい path の性質（例えば格子上の 1 歩）にはよらないのではないだろうか，むしろ，大きい方から切っていったときのギザギザの増え具合が重要だろう，という見方がある．

物理において，平衡系統計力学の臨界現象と場の量子論の構成は，このような見方を支持するとされる．これがくりこみ群の描像である．

1 次元 simple random walk (SRW) をこの見方で見直すと，その応用として，SRW と self-avoiding walk (SAW) を「つなぐ」あるモデル [30] が自然に定義できる．この定義はまさにギザギザを増やしていく (格子上の確率連鎖は最小単位が決まっているので，ギザギザを増やすのは歩数を増やすのと連動するが，精神は一貫している) 形になっている．

この手法はかなり広い範囲のフラクタル上の確率連鎖 (およびその連続極限) に適用できて，その作り方から mean square displacement の指数に相当する量 ν が (平均歩数増大度の指数として) 自然に現れる．

1 次元 simple random walk (SRW) をくりこみ群の見方で見直し，その後で self-repelling walk を紹介する．

4.2 1 次元 simple random walk のくりこみ群．

$W_n,\ n \in \mathbb{Z}_+$, を 0 を出発点とする 1 次元 simple random walk (SRW) とする．即ち， $X_n : \Omega \to \{\pm 1\}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, を i.i.d. で $\mathrm{P}[\,X_1 = \pm 1\,] = 2^{-1}$ なるものとして，$W_n = \sum_{k=1}^{n} X_k,\ n \in \mathbb{Z}_+$, とする．

(1) で，SRW W_n について，集合 A の hitting time $\tau = \inf\{n \in \mathbb{Z}_+ \mid W_n \in A\}$ を定義した．これを拡張して hitting time の列を考えることができる．そしてそれらの時刻での (A 内での) 位置を並べることにより，A 上の path の集合の上の確率測度を得る．

$A = 2\mathbb{Z}$ とし，hitting time の列 $\tau_{A,i},\ i \in \mathbb{Z}_+$, を $\tau_{A,0} = 0$ とし，帰納的に

$$\tau_{A,i+1} = \{n > \tau_{A,i} \mid W(n) \in A \setminus \{W(\tau_{A,i})\}\},\quad i \in \mathbb{Z}_+,$$

で定義する．$\tau_{A,i}$ は W_n が偶数点を i 回目に hit する時刻である．続けて 2 度同じ偶数を hit した場合は除外して数える．

このとき，$Q_A(W)(i) = W_n(\tau_{A,i}),\ i \in \mathbb{Z}_+$ は $2\mathbb{Z}$ 上の simple random walk になる．即ち，$Q_A(W)(0) = 0$，$X'_k = Q_A(W)(k) - Q_A(W)(k-1),\ k \in \mathbb{N}$ が独立，各 k に対して $\mathrm{P}[\,X'_k = \pm 2\,] = 2^{-1}$，がそれぞれ直接証明できる（最後の性質は対称性から明らか，他はもっと明らか）．

$A = 2\mathbb{Z}$ は ($\mathbb{R}$ の部分集合として) 空間スケール (距離) を半分にする写像で $\mathbb{Z}$ と $1:1$ 対応し，この対応で， $Q_A(W)$ と W は同じ分布になることに注意．偶数点でだけ W を見ることにより，

> 1 次元 SRW は粗くみた path が，確率測度として元の path と同じになる，という著しい性質がある．このような性質を（漠然と）統計的自己相似性と言うことがある[33]．

Path を粗く見る写像 Q_A を decimation と言うことがある．Decimation は，確率連鎖が飛び移れる点の組の集合 $\{(x,y) \mid \mathrm{P}[\,W_k = y \mid W_{k-1} = x\,] > 0 \text{ for some } k\}$ による network を別の network に写す写像と見なせる．

$A = 2^n$ ならば，n について帰納的に decimation を繰り返して，SRW の (細かくなる) 列を得ることができる．Path の特別な (しかし，基本的な) 集合に対して，これを実行しよう．

$n \in \mathbb{Z}_+$ に対して $\tilde{G}_n = 2^n\mathbb{Z}$ とおく．$n \in \mathbb{Z}_+$ と $w:\ \mathbb{Z}_+ \to \tilde{G}_0$ [34] のうち， $w(0) = 0$ を満たすものと $\ell \in \mathbb{Z}_+$ に対して，$\tilde{G}_n$ の ℓ 番目の hitting time $T_{n,\ell}(w)$ を

$$\begin{aligned} &T_{n,0}(w) = 0, \\ &T_{n,\ell+1}(w) = \inf\{k > T_{n,\ell}(w) \mid w(k) \in \tilde{G}_n \setminus \{w(T_{n,\ell}(w))\}\},\quad \ell = 0,1,2,\cdots, \end{aligned} \tag{55}$$

で帰納的に定義する．$L_n = T_{n,1}$ とも書くことにする．

> L_n は原点を出発した walk が初めて $\tilde{G}_n \setminus \{0\}$ の点を hit する時刻 (歩数) である．

[33] 「漠然と」と書いたことを厳密に定義することもできるが，この講義では具体例を論じるので一般的定義はいらない．次の「漠然と」も同様．また， decimation や厳密な統計的自己相似性はあまり普遍性がないので，一般的な定義を目指すより典型例を調べる方が有効である．

また，残念ながら，decimation による確率連鎖の自己相似性は，高次元 SRW にはない．Decimation が有効な network は，定数 r があって，任意の点に対してそれを含む有限集合 B がとれて，r 個の点を除去すれば B が network として切り離される場合である．この性質を，空間 (network) が finitely ramified である，と（とりあえず，漠然と）言うことがある．(高次元 SRW で decimation がうまくいかない理由を考えて見よ.)

[34] $\tilde{G}_0 = \mathbb{Z}$ だが，Sierpiński gasket の場合も使える形で書いておいた．

そして,

$$\tilde{\mathcal{W}}_n = \{w:\ \mathbb{Z}_+ \to \tilde{G}_0 \\ \mid L_n(w) < \infty,\ w(0)=0,\ |w(i+1)-w(i)|=1,\ i=0,1,\cdots,L_n(w)-1, \\ w(j)=2^n,\ j \geqq L_n(w)\} \tag{56}$$

とおく．即ち，原点から出発して $\tilde{G}_n \setminus \{0\}$ の点を通らずに隣に移る walk で， 2^n を hit したらそこにとどまる，という walk の集合である[35]．

$D=\{2^n\}$ の hitting time[36] を τ_D，$A=\{-2^n\}$ の hitting time を τ_A，とおけば，(56) は次のように書いてもいいことに注意しておく．

$$\tilde{\mathcal{W}}_n = \{w:\ \mathbb{Z}_+ \to \tilde{G}_0 \\ \mid L_n(w) < \infty,\ w(0)=0,\ |w(i+1)-w(i)|=1,\ \ i=0,1,\cdots,L_n(w)-1,\ \tau_D < \tau_A\,, \\ w(j)=w(L_n(w)),\ j > L_n(w)\} \tag{57}$$

一見複雑だが，$\tilde{\mathcal{W}}_0$ は右隣への 1 歩にすぎない．一般に $\tilde{\mathcal{W}}_1$ は $2^1\mathbb{Z}$ 上に decimation した walk の「最初の 1 歩」を元のスケールで見たときの集合である（以下の decimation 参照．時間的に一様で左右対称なので，これで全ての random walk が決まる，という意味で本質的な集合である．

Decimation を定義する．$w \in \tilde{\mathcal{W}}_n$ に対して $\tilde{\mathcal{W}}_1$ への decimation $Q_1:\ \tilde{\mathcal{W}}_n \to \tilde{\mathcal{W}}_1$ を， $w \in \tilde{\mathcal{W}}_n$ に対して

$$Q_1 w(k) = 2^{1-n} w(T_{n-1,k}(w)),\quad k \in \mathbb{Z}_+, \tag{58}$$

によって定義する．

$w \in \tilde{\mathcal{W}}_n$ は $\tilde{G}_{n-1} = 2^{n-1}\mathbb{Z}$ の点を通るときだけ見ることによって $\tilde{G}_{n-1}$ 上の walk となり，それを 2^{1-n} 倍 (スケール縮小) することで $\tilde{G}_0 = 2^{1-n}\tilde{G}_{n-1}$ 上の walk となる．1 歩毎に隣に飛ぶことは， $T_{n-1,k}$ の定義と外に出るには必ず隣の点を通らなければならない (finitely ramifiedness) という元の walk の定義による．$w \in \tilde{\mathcal{W}}_n$ なので $2^{1-n}w$ は時刻 $L_n(w)$ まで $\tilde{G}_1$ の点を hit せず，最後に 2^1 を hit してそこにとどまる．w が 2^n を hit した瞬間に止まるので，$L_1(Q_1 w)$ は $T_{n-1,i}(w) = L_n(w)$ となる i に等しい (有限)．言い換えると

$$L_n(w) = T_{n-1,L_1(Q_1 w)}(w). \tag{59}$$

以上により， $Q_1(w) \in \tilde{\mathcal{W}}_1$ である．

$\tilde{\mathcal{W}}_n$ における L_n の母関数を

$$\Phi_n(z) = \sum_{w \in \tilde{\mathcal{W}}_n} z^{L_n(w)} = \sum_{w \in \tilde{\mathcal{W}}_n} z^{T_{n,1}(w)},\quad z \in \mathbb{C}, \tag{60}$$

で (収束半径内で) 定義する．Φ_1 は**具体的に計算することにより**[37] 得られる：

$$\Phi_1(z) = \frac{z^2}{1-2z^2},\quad |z| < \frac{1}{\sqrt{2}}\,. \tag{61}$$

問 5 *(61)* を導け． ◇

特に Φ_1 は 0 でない収束半径を持つ.（このことと次の 命題 31 から，全ての Φ_n が 0 でない収束半径を持つので Φ_n は well-defined.）$w \in \tilde{\mathcal{W}}_n$ を $Q_1(w)$ の形で分類することで，次の recursion を得る．

命題 31 (Renormalization group) $\Phi_n(z) = \Phi_1(\Phi_{n-1}(z))$.（右辺の収束半径内で左辺も収束.）

証明. $w \in \tilde{\mathcal{W}}_n$ とする．(59) より，

$$L_n(w) = T_{n-1,L_1(Q_1 w)}(w) = \sum_{i=0}^{L_1(Q_1 w)-1} (T_{n-1,i+1}(w) - T_{n-1,i}(w)). \tag{62}$$

w の path の断片 $w_i = \{\ w(k) \mid T_{n-1,i}(w) \leqq k \leqq T_{n-1,i+1}(w)\}$，$i=0,1,2,\cdots,L_1(Q_1 w)-1$，を考える．Hitting times $T_{n-1,i}$ の定義から，各 w_i は幅 2^{n-1+1} の区間の中にいて，$\tilde{\mathcal{W}}_{n-1}$ のある要素 $\tilde{w}_i$ と合同に

---

[35] 時間を無限にそろえるために最後にとどまることにしたが，実質は 2^n に当たったら止まる，という単純な話．$L_n < \infty$ を課したが，永久に $(-2^n, 2^n)$ にとどまる walk は以下での考察の対象にならない．実際，SRW は確率 1 で無限遠に届く．なお，以後，「スケール (大きさ)」を n で，歩数を k 等で書くことにする．

[36] 確率が入っていない段階で hitting time と呼ぶのは用語の乱用だが．

[37] 即ち，ここで dynamics に関する情報が入ることで一般論から得られない系固有の特徴が入る．このように，一般的な「ギザギザの細かい構造」という再帰的な側面と系固有の特徴を分離するところが (来るべき) くりこみ群の定式化の特徴である．

なる．このことと (62) から， $w \in \tilde{\mathcal{W}}_n$ について和をとることで，

$$\begin{aligned}\Phi_n(z) &= \sum_{w\in\tilde{\mathcal{W}}_n} z^{L_n(w)} \\ &= \sum_{w\in\tilde{\mathcal{W}}_n} \prod_{i=0}^{L_1(Q_1 w)-1} z^{T_{n-1,i+1}(w)-T_{n-1,i}(w)} \\ &= \sum_{v\in\tilde{\mathcal{W}}_1} \sum_{\tilde{w}_0\in\tilde{\mathcal{W}}_{n-1}} \cdots \sum_{\tilde{w}_{L_1(v)-1}\in\tilde{\mathcal{W}}_{n-1}} \prod_{i=0}^{L_1(v)-1} z^{L_{n-1}(\tilde{w}_i)} \\ &= \sum_{v\in\tilde{\mathcal{W}}_1} \Phi_{n-1}(z)^{L_1(v)} \\ &= \Phi_1(\Phi_{n-1}(z)).\end{aligned}$$

□

注 12 命題 *31* から $\Phi_n = \Phi_1 \circ \cdots \circ \Phi_1$ となるので，$\Phi_n(z) = \Phi_{n-1}(\Phi_1(z))$ なども同時に成り立つ． ◇

(61) と 命題 31 は path の漸近的性質に関する本質的な情報を持っている．私はこの recursion を (1 次元 SRW の) くりこみ群と呼ぶことにしている．
命題 31 を $m = n-1$ で用いれば， L_n の分布は $L_{n-1}(Q_{n-1})$ で決まり， $L_{n-2}(Q_{n-2})$ 以下にはよらないことが分かる．この「スケール方向のマルコフ性」（分枝過程）が，ギザギザを付け加えるという描像に整合したモデルになっている．

命題 31 があると，歩数の分布の $n \to \infty$ の漸近形 (スケールされた歩数分布の弱収束) について議論できる．§B.1.4 の定義に従うと，Φ_1 の固定点 x_c は (61) より明らかに $x_c = 1/2$，従って $\lambda = \Phi_1'(x_c) = 4$ となる．(157) に従って

$$G_n(s) = \frac{1}{x_c}\Phi_n(e^{-\lambda^{-n}s}x_c) = 2\Phi_n(\frac{1}{2}e^{-4^{-n}s}) \quad n = 1, 2, 3, \cdots,$$

とおくと，特に，定理 85 と 定理 87 と 定理 82 から次を得る．

系 32

$$G_n(s) = \int_0^\infty e^{-s\xi} P_n(d\xi)$$

を満たす $\mathbb{R}_+$ 上のボレル確率測度 P_n が存在し，$n \to \infty$ で $\mathbb{R}_+$ 上のボレル確率測度 P^* に弱収束する．
P^* の母関数

$$G^*(s) = \int_0^\infty e^{-s\xi} P^*(d\xi)$$

は

$$G^*(s) = G_1(-4\log G^*(s/4)), \quad {G^*}'(0) = 1,$$

によって定まる．P^* の特性関数を $\varphi^*(t) = G^*(-\sqrt{-1}t)$, $t \in \mathbb{R}$, とおくと，$C_1 > 0$ と $C_2 > 0$ が存在して，

$$|\varphi^*(t)| \leqq C_2 e^{-C_1|t|^{\nu_u}}, \quad t \in \mathbb{R},$$

となる．ここで $\nu = \dfrac{\log 2}{\log \lambda} = 1/2$．従って特に， P^* は密度 ρ を持つ：$P^*(d\xi) = \rho(\xi)d\xi$．そして，$C > 0$ が存在して，

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}} e^{C\xi}\rho(\xi) < \infty,$$

を満たし，また，$\rho(\xi) > 0$, $\xi > 0$, を満たす．

(60) から

$$G_n(s) = \sum_{w\in\tilde{\mathcal{W}}_n} 2^{1-T_{n,1}(w)}\, e^{-4^{-n}T_{n,1}(w)s})$$

となるので， P_n は $4^{-n}\mathbb{Z}_+$ 上に support され，

$$P_n(\{4^{-n}\ell\}) = \sharp\{w\in\tilde{\mathcal{W}}_n \mid T_{n,1}(w)=\ell\}\times 2^{1-\ell}$$

で与えられる．左辺は原点から出発する simple random walk において，2^n を 2^{-n} より先に hit するという条件を付けたときの 2^n を hit するまでの歩数が ℓ である確率になっていることに注意．それゆえ ℓ を 4^{-n} 倍したときに分布が収束するのは自然である.（全確率が 1 になることは 1/2 が Φ_1 の固定点になることから従う.）

この結果は，SRW の連続極限 ($\lim\limits_{n\to\infty} 2^{-n}W_{[2^{2n}t]}$) が連続確率過程 (Brown 運動) になることを証明するのに用いることができる [30].

命題 31 の応用として，§D.5 に 1 次元 SRW の LIL の lower bound の別証明を与える．

4.3 1 次元 self-repelling walk．

1 次元 SRW は時間方向に追っていけば (マルコフ性のおかげで) 詳しい性質が分かるのでわざわざ decimation を持ち出すのは無駄にみえる．しかし，self-avoiding walk は (SRW のような 1 歩単位のマルコフ性がないので，原理的に) 時間 (歩数) 方向に眺める限り SRW と統一的に扱うことができない．このことは $1<d\leqq 4$ の $\mathbb{Z}^d$ で致命的な問題になる．

他方，スケール方向に眺めるくりこみ群の思想は両者を原理的にどの次元でも統一的に扱うし，$\mathbb{Z}$ や finitely ramified fractals では decimation によって現実に統一的に扱える．くりこみ群は細かい構造を付け加えていく，または，より粗い構造を順に見ていく，という統計力学や場の量子論的なものの見方をそのまま反映していることが最大の特徴である．これによって，なめらかでない関数の解析学に一つの可能性を開く．Sierpiński gasket 上の random walk と self-avoiding walk をくりこみ群のレベルで統一的に扱うのは，この作業仮説の簡単だが実現した一例である．

この哲学をさらに進めると，次の白昼夢に至る．くりこみ群はパラメータ空間上の写像なので，対応する実際の確率測度が何の集合の上で定義されているかを考える必要がない．逆に言えば，どこまで空間を広げればしかるべき性質を持った確率測度が定義できるか事前に分からなくても，くりこみ群を分析して，後から対象を決めればよい．これは物理現象のように先にその漸近的性質がかなりの程度分かっているけれども，出発点となるべき対象の定義域が数学レベルでは分かっていない，という状況には適当である．

くりこみ群による統一的記述の応用として，SRW と SAW を「連続に内挿する」self-repelling walk を decimation を用いて定義できることを $\mathbb{Z}$ 上の場合に紹介する [30].

§4.2 の最初の部分は chain についての確率測度が入っていないので，1 歩毎に隣に移る $\mathbb{Z}$ 上の任意の chain に適用可能である．

念のため繰り返す.

$\tilde{G}_n = 2^n\mathbb{Z},\ n\in\mathbb{Z}_+$，とおき，$n\in\mathbb{Z}_+$ と $w:\ \mathbb{Z}_+\to\tilde{G}_n$ に対して

$$\begin{aligned}&T_{n,0}(w)=0,\\ &T_{n,\ell+1}(w)=\inf\{k>T_{n,\ell}(w)\mid w(k)\in\tilde{G}_n\setminus\{w(T_{n,\ell}(w))\}\},\quad \ell=0,1,2,\cdots,\end{aligned}$$

で $\tilde{G}_n\setminus\{0\}$ の hitting times を定義し，$L_n=T_{n,1}$ とも書くことにする．

$\tilde{G}_n\setminus\{0\}$ の first hit が 2^n となる nearest neighbor jump をする path の集合を

$$\begin{aligned}&\tilde{\mathcal{W}}_n=\{w:\ \mathbb{Z}_+\to\mathbb{Z}\\ &\mid L_n(w)<\infty,\ w(0)=0,\ |w(i+1)-w(i)|=1,\ i=0,1,\cdots,L_n(w)-1,\\ &w(j)=2^n,\ j\geqq L_n(w)\}\end{aligned}$$

とおく．$w\in\tilde{\mathcal{W}}_n$ と $0\leqq m\leqq n$ に対して

$$Q_m w(k) = 2^{m-n}w(T_{n-m,k}(w)),\quad k\in\mathbb{Z}_+,$$

によって $\tilde{\mathcal{W}}_m$ への decimation $Q_m w\in\tilde{\mathcal{W}}_m$ を定義する．

以上は SRW の場合と全く同様である．さて，母関数を決めれば測度が決まるので， (60) の Φ_n の定め方が，モデルを決めることになる．§4.2 では (60) で Φ_n を定義して，その結果として， (63) と 命題 31

を得た．ここで紹介するモデル (self–repelling walk[30]) は発想を逆転させて，(63) と 命題 31 の一般化によって parameter $u>0$ を持つモデル（の族）を定義する：

$$\Phi_{1,u}(z)=\frac{z^2}{1-2u^2z^2},\quad |z|<\frac{1}{u\sqrt{2}}, \tag{63}$$

$$\Phi_{n+1,u}(z)=\Phi_{1,u}(\Phi_{n,u}(z)),\quad n\in\mathbb{Z}_+. \tag{64}$$

$u=1$ のときは (60) に一致して，§4.2 の議論，特に (202) によって，SRW の (端点を fix したときの) 歩数の母関数を得る．

他方， $u=0$ のときは，(63) と (64) から $\Phi_{n,0}(z)=z^{2n}$ となるので，和を取る w を 0 から 2^n までの線分 (即ち，1 次元 self-avoiding walk) に限ったのと同じである．そこで SRW と SAW をつなぐモデルになっていることが期待できる[38]．

一般の u に対しては， $z^{L_n(w)}$ の和という形に書こうとすると，係数は u の複雑な多項式になってしまう．$0\leqq u<1$ のとき，折れ曲がりの多いものほど suppress されるので self-repelling であり，$u>1$ のとき self-attractive であると予想される．

Φ_n, $n=1,2,3,\cdots$, は (152)，(154)，および，(152) の後に列挙した仮定を満たす．よって，例えば定理 94 の結果が成り立つ．鍵になる量は

$$x_{c,u}=\frac{1}{4u^2}(\sqrt{1+8u^2}-1),\quad \lambda_u=\frac{\partial\Phi_{1,u}}{\partial x}(x_{c,u})=\frac{2}{x_{u,c}}=\sqrt{1+8u^2}+1,\quad \nu_u=\frac{\log 2}{\log\lambda_u}.$$

特に SAW と SRW は $\lambda_0=1$ and $\lambda_1=4$．Hitting time の評価や LIL などの漸近形を決める重要な量は ν_u であったが，これが u に関して連続的に SRW と SAW をつないでいることに注意．このことから連続極限における対応する確率過程の，LIL や Hölder 連続性の modulus の連続性を調べることができる [30]．

このような量を連続的に内挿するモデルは（特に連続極限の確率過程では）今までなかった．くりこみ群の描像からは以上のように自然に得られる．

§4.2 の SRW の Φ_n はここでの $\Phi_{n,u}$ の $u=1$ の場合である： $\Phi_n=\Phi_{n,1}$．さらに，(63) から，$\Phi_{1,u}(z)=\dfrac{1}{u^2}\Phi_{1,1}(uz)$ を得るので，一般に

$$\Phi_{n,u}(z)=\frac{1}{u}\overbrace{(\frac{1}{u}\Phi_{1,1})\circ\cdots\circ(\frac{1}{u}\Phi_{1,1})}^{n}(uz)$$

を得る．このように，くりこみ群で書いた定義 (63), (64) は単純でも，あらわに書こうとすると u 依存性は z 依存性と全く異なる．言い換えると，§4.2 の類推で (60) のように

$$\Phi_{n,u}(z)=\sum_{w\in\tilde{\mathcal{W}}_n} z^{L_n(w)}\rho_{n,u}(w) \tag{65}$$

書こうとするとき， z の入り方は SRW の場合と変わらないが，$\rho_{n,u}$ は n,w と共に複雑に変化する．折れ曲がりと共に u の因子がつく (self-repelling) と理解できるが，どのスケール n の点 $\tilde{G}_n$ で折れ曲がったかで u のべきが異なる．くりこみ群での見かけほど自明でないために，これまでこのモデルが気づかれてこなかったと思われる．

問 6 n の小さい方からいくつかについて， $\Phi_{n,u}(z)$ を計算して，*(65)* の右辺にある z 依存性を確認し，かつ， $\rho_{n,u}$ の具体形を求めよ． ◇

対応する歩数の母関数 G_n と確率測度 P_n は (200) と同様に，

$$\int_0^\infty e^{-s\xi}\mathrm{P}_{n,u}[\,d\xi\,]=G_{n,u}(s)=\frac{1}{x_{c,u}}\Phi_{n,u}(e^{-\lambda_u^{-n}s}x_{c,u})=\sum_{w\in\tilde{\mathcal{W}}_n} e^{-\lambda_u^{-n}sL_n(w)}x_{c,u}^{L_n(w)-1}\rho_{n,u}(w)$$

によって与えられる． s 依存性の比較から，$\mathrm{P}_{n,u}[\ \cdot\ ]$ はこのモデルにおける $\lambda_u^{-n}L_n$ の分布を与えていることが分かる．例えばその short time estimates の漸近形（および $n\to\infty$ 極限の漸近形）が 定理 94 か

[38] 1 次元 SAW は単なる線分なので SRW と「つなぐ」といっても説得力が薄いかもしれない．しかし，以上の議論は Sierpiński gasket に全く同様に拡張できる [30]．Sierpiński gasket では SAW も自明でない確率測度なので，確率測度間の内挿はますます自明でなくなる

ら (201) と同じ形で与えられる（ν 等を SRW の値を代入せずに残しておいたのはここでそのまま引用するため）.

Self-repelling walk ではマルコフ性はない（例えば i.i.d. の和では書けない）[39].

連続極限の性質に関しては [30] 参照.

5 Pre-Sierpiński gasket 上の random walk.

フラクタルという言葉を聞いたことのある人は多いだろう．多くの角度から基礎研究が行われ，また，科学の種々の分野に応用研究が試みられている．ここでは，フラクタルの基礎研究の一つを，くりこみ群の思想との関連で紹介する．

Decimation が $\mathbb{Z}$ 以外でも有用性があることを示すために，pre-Siérpinski gasket 上の random walk において，等方性の回復という，フラクタルに特徴的な事実を紹介する [21, 22].

5.1 フラクタル

広い意味での自己相似な図形を一般にフラクタルと呼ぶ [14]．ここでは話を簡単にするために狭い意味の自己相似な図形を考える．自己相似性は，ある図形を縮小した図形をいくつか合わせて元の図形を再現できること，と理解できる．典型的な例として，以下では Sierpiński gasket と呼ばれる図形に話を限る．

Sierpiński gasket は単位三角形の内部に複雑な構造を持つ図形である．Sierpiński gasket は，長さを半分に縮小すると元の図形の 1/3 の部分に重なる（図は省略）．重ね方は 3 通りある．

一般に縮小写像の組を与えると，それらによって写された図形の和集合が元の図形に一致する，という条件から（空でない有界閉集合が一意的に定まるという意味で）フラクタル図形が定義できる [9].

Sierpiński gasket は次のようにして作ることもできる．一辺の長さが 1 の三角形（周と内部）を F_0 とおく．F_0 から一辺 1/2 の下向きの三角形の内部を 1 個くり抜いてできる，一辺 1/2 の上向きの三角形 3 つからなる図形を F_1' とおく．

同様に F_1' から一辺 1/4 の下向きの三角形を 3 個くり抜いてできる，上向き三角形 9 個からなる図形を F_2' とおく．これを繰り返して，一般に，F_{n-1}' から一辺 $1/2^n$ の下向きの三角形を 3^{n-1} 個くり抜いてできる図形を F_n' とおく．F_n' は一辺 $1/2^n$ の上向きの三角形を 3^n 個つないでできる図形になるが，その $n \to \infty$ の極限として Sierpiński gasket を得る．

フラクタルは自己相似になるように無限に細かい構造を持っている．フラクタルに対して，上のような F_n' たちを，フラクタル前駆図形という気持ちで，プレ-フラクタル (pre-Sierpiński gasket) と呼ぶ．

フラクタルというとまずは自己相似性に注目するのが定義から考えて健全な態度である．しかし，ここでは，図形の自己相似性とは直接関係のない対称性にも注目しよう．Sierpiński gasket(pre-Sierpiński gasket) は図形の中心（F_n' の重心）の回りに $\pm 120^\circ$ 回転しても変わらないという回転対称性を持つ．回転対称性の代わりに鏡映対称性を持ち出してもよい．以下の話は回転対称性と思うか鏡映対称性と思うかによらないので，こだわらないことにする．

Random walk における，図形の対称性とフラクタルとしての自己相似性の関わりが §5.3 以下のテーマである．その前に，次節で Sierpiński gasket 上の SRW について exponent ν を見ておく．

5.2 Sierpiński gasket 上の SRW の exponent ν.

§5.1 ではフラクタルとの関連で細かい構造を付け加えて F_n' を定義したが，今まで調べてきた $\mathbb{Z}^d$ 上の walk との類推では，単位構造を 1 に固定して外に広げて定義するほうが便利である．F_n' の一つの頂点を原点，原点から出ている一つの辺を x 軸，F_n 全体は第 1 象限，にそれぞれおさまるように $\mathbb{R}^2$ に埋め込んであるとする．$F_0' \subset F_1' \subset \cdots$ とみなせる．F_n' とその y 軸に関する鏡映の合併を 2^n 倍した図形を F_n とおき，そして，$\tilde{F}_0 = \bigcap_{n=0}^{\infty} F_n$ とおいて $\tilde{F}_0$ を構成する単位正三角形たちの頂点の集合を $\tilde{G}_0$ とする.（これが $\mathbb{Z}$ のアナロジーとなる.）を以下では F_n と書く．なお，F_n は一応単位正三角形板をつないだものとして定義しているが，実際は，頂点と辺をつないだ network の構造しか見ていないので，以下では F_n を network とみなす．

$\mathbb{Z}$ 上の SRW のとき (§4.2) と同様に，$n \in \mathbb{Z}_+$ と $w:\ \mathbb{Z}_+ \to \tilde{G}_0$ のうち，$w(0)=0$ を満たすものと $\ell \in \mathbb{Z}_+$ に対して，(55) によって $\tilde{G}_n = 2^n \tilde{G}_0$ の ℓ 番目の hitting time $T_{n,\ell}(w)$ を定義し，$L_n = T_{n,1}$ と書く．また，(56) と同様に

$$
\begin{aligned}
&\tilde{\mathcal{W}}_n = \{w:\ \mathbb{Z}_+ \to \tilde{G}_0 \\
&\mid L_n(w) < \infty,\ w(0)=0,\ |w(i+1)-w(i)|=1,\ \overline{w(i)w(i+1)} \subset \tilde{F}_0\,;\ i=0,1,\cdots,L_n(w)-1, \\
&w(j)=2^n,\ j \geqq L_n(w)\}
\end{aligned}
$$

[39] ただし，1 次元 $\mathbb{Z}$ と (2 次元)Sierpiński gasket のときに限って，2 歩ひとまとめにすれば書けるのではないかという妄想もあった．だめという気もするが，未確認.

によって $\tilde{\mathcal{W}}_n$ を定義する．((56) に比べてついている余分な条件は，辺の長さが 1 というだけでは，$\tilde{F}_0$ の辺に入っていない場所があるので．) (60) と同様に L_n の母関数 $\Phi_n(z) = \displaystyle\sum_{w\in\tilde{\mathcal{W}}_n} z^{L_n(w)}$ を定義すると，decimation によって命題 31 と同様の renormalization group の関係式が成り立つ．そこで Φ_1 を求めておけば，§D.5 と同様に，その fixed point x_c が $x_c = \Phi(x_c)$, $x_c > 0$, から決まり，$\lambda = \Phi_1'(x_c)$ とおけば，$\nu = \log 2/\log\lambda$ が求まる．

原理的には $G_1 \setminus \tilde{G}_1$ の各点から $A_1 = (2,0)$ にたどり着く path の集合それぞれに対して Φ_1 の類推を定義し，それらの間の代数方程式を立てて解くことで Φ_1 を得る[40]．少し整理して計算すると，結果は

$$\begin{aligned}
\Phi_1(z) &= \frac{\Psi_1(z)}{1-2\Psi_0(z)}\,, \\
A &= \begin{pmatrix} 1 & -z & -z \\ -z & 1 & -z \\ -z & -z & 1 \end{pmatrix}, \\
\Psi_0(z) &= (\ z \quad 0 \quad z\ )A^{-1}\begin{pmatrix} z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = \frac{2z^2}{1-z-2z^2}\,, \\
\Psi_1(z) &= (\ z \quad 0 \quad z\ )A^{-1}\begin{pmatrix} z \\ z \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{z^2(1+2z)}{1-z-2z^2}\,,
\end{aligned}$$

と書けることが分かる．即ち，

$$\Phi_1(z) = \frac{z^2}{1-3z}$$

を得る．これより，$x_c = 1/4$, $\lambda = 5$, $\nu = \log 2/\log 5$ となる．

このように，Sierpiński gasket 上の SRW の ν の値は 1/2 ではない．この exponent は mean square displacement の exponent であり，$\mathbb{Z}^d$ 上の SRW では共通の値 1/2 をとる．こうして

> $\mathbb{Z}^d$ 上の SRW では簡単だった exponent の値は，(低次元 SAW で異なるだけでなく) 並進対称性のない空間上でも簡単ではない．

このことは「次元とは何か」という問が ($\mathbb{Z}^d$ や，その連続極限としての $\mathbb{R}^d$ や，局所的にそれと同型な多様体以外の上の物理現象に対しては) 決して簡単ではないことを暗示している．

問 7 *(i)* §*D.5* の議論を参考にして，*Sierpiński gasket* 上の *SRW* の場合の ν を求める経緯をきちんと書き下せ．(特に 命題 *31* と同様の *renormalization group* の関係式を証明し，Φ_1 を計算して求めよ.)

(ii) *Sierpiński gasket* 上の *SRW* W_n に関して，$\mathrm{E}[\,W_n^2\,]$ の $n\to\infty$ での漸近形を計算して，*exponent for mean square displacement* が ν に等しいことを確認せよ[41]．

◇

5.3 抵抗回路 (Dirichlet form)．

§2.2.1 でみたように時間的に一様なマルコフ連鎖 (simple random walk など) では 1 歩毎の遷移確率 $p_1(x,y) = \mathrm{P}[\,W_1 = y \mid W_0 = x\,]$ が全ての性質を定める．

$\mathbb{Z}^d$ から一般化して，点の集合 G を考え，その上での p_1 で決まるマルコフ連鎖を考える．但し $p_1(x,y) = p_1(y,x) \geqq 0$, $p_1(x,x) = 0$ なる場合を考え，辺の集合 $B = \{(x,y) \in G\times G \mid g(x,y) > 0\}$ は連結とする．($p_1(x,y) = p(y,x)$ は強すぎて，$h(x)p_1(x,y) = h(y)p_1(y,x)$ が成り立つ正値関数 h があれば Dirichlet form の話は使えるが，話を簡単な場合に限る.)

(G,p_1) に対応する Dirichlet form を，$f:\ G\to\mathbb{R}$ に対して

$$\mathcal{E}(f,f) = \frac{1}{2}\sum_{x\in G}\sum_{y\in G} p_1(x,y)(f(x)-f(y))^2$$

で定義する．$\mathcal{E}(f,f)$ は，電位分布が f，$(x,y)\in B$ の抵抗が $p_1(x,y)$ のときの（仮想的な）発熱（ジュール熱）を与えている．$A, D \subset G$, $A\cap D = \emptyset$, に対して，A と D の間の実効抵抗 (effective resistance) を

$$R(A,D)^{-1} = \inf\{\mathcal{E}(f,f) \mid f|_A = 0,\ f|_D = 1\} \tag{66}$$

[40] 講義録としては，この計算を丁寧に説明すべきである．しかし，既に半年以上この講義録だけにかかっており，もはや講義録を改善する時間がない．次回以降に残っている課題の一つである．

[41] この問は重要なオリジナルとは言えないが，その割に実際にきちんと遂行するのは手間がかかるかもしれない．

で定義する．

$f\colon G\to\mathbb{R}$ に対して $(\Delta f)(x)=\sum_{x\in G}g(x,y)(f(y)-f(x))$ とおく (差分 Laplacian).

A,D が空でないとき，$R(A,D)$ の右辺の境界条件

$$f(x)=0,\ x\in A,\quad f(x)=1,\ x\in D, \tag{67}$$

と $R(A,D)^{-1}=\mathcal{E}(v,v)$ を満たす v (実現する電位分布) は命題 67 より,（存在すれば）ただ一つで,

$$(\Delta v)(x)=0,\quad x\notin A\cup D. \tag{68}$$

を満たす.

v は次の意味で hitting time の確率と関係する.

命題 33 *p_1 で決まる時間的に一様なマルコフ連鎖で x から始まるものを P_x とし，$A,\ D$ の hitting time (時刻 0 を許す) をそれぞれ $\tau_D,\ \tau_A$ とするとき，$v(x)=\mathrm{P}_x[\,\tau_D<\tau_A\,]$.*

証明. (67) と (68) を満たすことは明らか．命題 67 の一意性から等号を得る． □

有効抵抗に関しては,（高校時代に習ったように）抵抗の合成の法則（直列接続と並列接続）が成り立つ．実際の計算はこれらを用いて行うと簡単.

問 8 *§A.7 の二つの変分原理を用いて合成抵抗の法則を証明せよ.* ◇

例えば，§4.2 の (57) では，$A=\{-2^n\}$ を通らず $D=\{2^n\}$ を hit したらそこで止まる nearest neighbor jump の chain の集合を考えた．SRW でこのようなことが起きる確率は $v(0)$ に等しい.

注意：Dirichlet form はマルコフ連鎖にしか対応しないので，self-repelling walk や self-avoiding walk には無力である．しかし random walk には決定的に強力である.

5.4 等方性の回復．

5.4.1 規則格子では非等方性が回復しない．

人が現象を理解するときの心の動きの一つに，現象に対称性を見いだそうとする傾向がある．プレ-フラクタルについて，図形が持つ対称性を満たさない電気抵抗回路を定義し，対称性のゆくえを追うことにする．

以下，横方向を x 軸方向，縦方向を y 軸方向とする.

まず，一辺 2^n の正方形 F_n を単位正方形で埋めて，各単位正方形の左または下の辺に，x 軸方向は 1，y 軸方向は r の抵抗をおき，F_n の格子点 G_n の各点で抵抗をつなぐ．言い換えると，$r>0$ を定数とし，(仮想) 電位分布が $f(x,y)$ のときに F_n が発するジュール熱が

$$\mathcal{E}(f,f)=\frac{1}{2}\sum_{y=0,2^n-1}\ \sum_{x=0,2^n-1}((f(x+1,y)-f(x,y))^2+\frac{1}{r}(f(x,y+1)-f(x,y))^2)$$

で与えられるとする．

Random walk で言えば横方向の jump が各 $1/(2+2r)$, 縦方向が $r/(2+2r)$ の確率 (p_1) の nearest neighbor jump の random walk である (overall constant を除いて $\mathcal{E}$ が一致する).

そして横方向の有効抵抗 $R_{x,n}$ と縦方向の有効抵抗 $R_{y,n}$ を考える．即ち，(66) において，$A=\{(0,y)\mid 0\leqq y<2^n\}$, $D=\{(2^n,y)\mid 0\leqq y<2^n\}$, としたときの $R(A,D)$ を $R_{x,n}$，$A=\{(x,0)\mid 0\leqq x<2^n\}$, $D=\{(x,2^n)\mid 0\leqq x<2^n\}$, としたときの $R(A,D)$ を $R_{y,n}$，とする．

各場合に実現する電位 v_x , v_y , はつぎのようにすぐ与えられる[42] .

$$v_x(x,y)=2^{-n}x,\ v_y(x,y)=2^{-n}y,\quad (x,y)\in F_n\,.$$

よって (66) から,

$$R_{x,n}=2,\quad R_{y,n}=2r\,,\quad n\in\mathbb{N}.$$

従って,

$$H_n=\frac{R_{y,n}}{R_{x,n}}=r\,,\quad n\in\mathbb{N}.$$

[42] あらわに与えておいて，(67) と (68) を満たすことを示せば，命題 67 の一意性からそれが解である．物理における電位等の計算は事実上全てこの方法でなされている．

即ち,

> 規則格子の場合は，最初に手で入れた非対称性はそのまま大きなスケールまで保存される[43]．

5.4.2 Pre-Sierpiński gasket では等方性が回復する．

Pre-Sierpiński gasket に話を進める．板で考える代わりに，回路網 (network) で考える．左下頂点を $O=(0,0)$，右下頂点を $A=(2^n,0)$，上の頂点を $B=(2^{n-1},2^{n-1}\sqrt{3})$ とする (finite) pre-Sierpiński gasket F_n の各単位辺に抵抗を並べた回路網を考えて，O, A, B で測定を行う．

x 軸方向に並んだ抵抗を大きさ 1 とし，それ以外の $\pm 120°$ 方向に並んだ抵抗は大きさ r とする．対称性から，$120°$ 方向と $-120°$ 方向は等しい.（一般化して 3 方向とも異なる値にとっても最後の結論は変わらないことが分かっている.）

一様な場合と同様に，横方向 (OA 間) の有効抵抗 $R_{x,n}$ と縦方向 (OB, AB 間) の有効抵抗 $R_{y,n}$ を考えてもよい[44] が，別の言い方として，この抵抗回路網は OA, OB, AB に適当な抵抗を置いてつないだ三角形回路網と等価 (O, A, B で測る限り区別できない) になることから，この等価回路の，OA の抵抗値を $R^x_n(r)$, OB と AB の抵抗値を $R^y_n(r)$ とすることもできる．以下では後者で考える.（値そのものは違ってくるが，比の n に関する増大度や等方な場合への接近の指数を考える限り両者に差はない．正三角形の各辺の抵抗値が a, b, c のとき，BC, CA, AB 間の有効抵抗はそれぞれ $a(b+c)/(a+b+c)$, $b(c+a)/(a+b+c)$, $c(a+b)/(a+b+c)$ である.）

この回路網の抵抗の非対称性（Sierpiński gasket の持つ $120°$ 回転対称性を抵抗値が満たさないこと）をはかる量として，比

$$H_n(r)=\frac{R^y_n(r)}{R^x_n(r)} \tag{69}$$

を導入する．

定義から $R^x_0(r)=1$, $R^y_0(r)=r$ なので $H_0(r)=r$ である．

電気回路の初等的な計算 [15] によって，n に関する漸化式

$$R^x_{n+1}=\frac{2R^x_nR^y_n(2R^x_n+3R^y_n)(3R^x_n+2R^y_n)}{({R^x_n}^2+6R^x_nR^y_n+3{R^y_n}^2)(R^x_n+2R^y_n)}\,,$$
$$R^y_{n+1}=\frac{R^y_n(2R^x_n+3R^y_n)}{R^x_n+2R^y_n}\,.$$

を得て，

$$H_{n+1}(r)=g(H_n(r))\,,\quad g(x)=\frac{3x^2+6x+1}{4x+6}\,, \tag{70}$$

が成り立つことが分かる．

問 9 *(i) (70)* を導け.（Y–Δ 変換 *(star–triangle relation)* を用いる[45]．）

(ii) 抵抗の *recursion* は *random walk* に対する *recursion* としては何を考えていることになるか[46]．

◇

この場合の decimation くりこみ群の結果が (70) であり，Y–Δ 変換がその計算の実質を担う．結果として力学系の flow の固定点への収束を見ることに帰着する．

$x=1$ は g の $x>0$ における唯一の固定点 ($g(1)=1$) である．$r>0$ がどんな実数であろうと，

$$\lim_{n\to\infty}H_n(r)=1 \tag{71}$$

となることが分かる．

非等方的な電気抵抗を持つ素材を用いても，十分に大きな pre-Sierpiński gasket の全体としての電気抵抗は等方的になることがわかった．言い換えると，電気抵抗が Sierpiński gasket の対称性を満たさないよ

---

[43] $R_{n,x}$ 自体が有限 non-zero の極限を持つのは 2 次元の特殊性で，本質的ではない．

[44] 即ち，(66) において，$A=\{O\}$, $D=\{A\}$, としたときの $R(A,D)$ を $R_{x,n}$，$A=\{O\}$, $D=\{B\}$, としたときの $R(A,D)$ を $R_{y,n}$．

[45] 講義録としてはこれの説明もていねいにすべきであるが，半年以上この講義録だけに時間を割いており，もはや時間がない．次回以降の課題として残す．

[46] Random walk の歩数の母関数や，遷移確率と抵抗との対応，特にくりこみ群の間の対応，はもっとていねいに講義録に書くべきだが，半年以上この講義録だけに時間を割いてきた結果，もはや時間がない．この問は，次回以降の改善のためのメモとして書かれている．

うな材質を選んで pre-Sierpiński gasket を作っても，細かい構造を入れていくと，対称性が回復する．この現象が，フラクタルにおける対称性の回復のもっとも簡単な例である．

このような対称性の回復現象は並進対称な図形，例えば規則格子型回路網ではおきない．そのためか，これまで知られていなかったか，注目されてこなかったようだ．しかし，電気的な非等方性を持つ材質は特殊な物質ではないし，等方的な材質でも一方向に長くした図形を考えればやはり対称性を壊すことができて，対称性の回復が観測される．

(70) からは対称性の回復のスピード (exponent) も得られる．実際，$H_n(r) \gg 1$ が満たされている間は $R^x_{n+1}(r)$, $R^y_{n+1}(r)$, $H_{n+1}(r)$ はそれぞれ $2R^x_n(r)$, $\dfrac{3}{2}R^y_n(r)$, $\dfrac{3}{4}H_n(r)$, に近く[47]，$H_n(r)$ が 1 に近いときは

$$\begin{aligned} &R^x_{n+1}(r) \sim R^y_{n+1}(r) \sim (5/3)R^x_n(r), \\ &H_{n+1}(r) - 1 \sim \frac{4}{5}(H_n(r) - 1). \end{aligned}$$

なお，$H_n(r) \ll 1$ のときはいきなり 1/6 まで跳ね上がるが，３辺の３つの抵抗のうち２つが抵抗 0 という状況は decimation くりこみ群の固定点でないということである．これに対して１方向だけ抵抗が小さいのは１次元鎖状に直列に抵抗が並んでいる状況なのでスケール変換でその形が保存される（固定点である）．従ってそこからの等方性の回復は（jump ではなく）指数関数的になる．

注 13 以上は全抵抗についてのみ書いてあり，例えば途中点の電位分布について何も記述しなかった．起きていることを 2 つ並べると一見奇妙である．

(i) 一つ一つの抵抗については r の比が残っている *(*電位分布を記述する差分方程式が r 依存性を持つ*)* ので，例えば抵抗の両端の電位差を計ると r 依存性はどんなに系を大きく（n を大きく）しても残る．

(ii) 他方で，n が大きいときの総抵抗がだんだん r によらなくなる，というのが *recursion* からの結論 *(*等方性の回復*)* であった．

これはどうして起きるのだろうか？[48]

答は，固定した個数の抵抗の列の間の電位を計ると r 依存性は n を大きくしても残る（第 1 の事実）．しかし，遠く離れた点の間 *(*間にたくさん抵抗が入っている列の両端*)* で電位差を計ると，遠く離れれば離れるほどその電位差は r による差が小さくなる（第 2 の事実）．回路が複雑になると大きさ r の抵抗と 1 の抵抗が入り乱れて，遠くで計るとならされてしまう，ということである．この現象は規則格子 $\mathbb{Z}^d$ や $\mathbb{R}^d$ では起こらなかったメカニズムによるので，これまで気づかれなかったと思われる．

この説明は，くりこみ群の軌道が全て 1 つの安定固定点に収束するということを現実の系の現象として言ったことになる．くりこみ群で出発点が違うということは，対応する現実の系で *local(*小さい距離*)* には大きく違う系を意味し，くりこみ群の軌道が同じ固定点に収束するということは，現実の系で *global(*遠く離れた点の間，またはたくさんの自由度での平均*)* には似た現象が起きている，ということである．この状況を統計力学では *universality* の成立，確率過程論では *invariance principle* の成立，と呼ぶ[49]

逆に，軌道が双曲型固定点（安定方向と不安定方向を持つ）の近くを通る状況（*Sierpiński gasket* 上の *SAW* ではそのような状況を分析する）では，固定点に収束する軌道と，不安定方向にほんの少し離れた初期値から始まる軌道（これは固定点に収束しないので，いったんは固定点に近づくが途中でそれて大きく離れていく）を比べると，現実の系では *local* には似ているのに *global* には大きく違うことになる．

例えば磁石は強く熱する *(*鉄が赤くなるくらい熱する*)* とある温度で磁石の性質を全く失ってしまう．その温度 *(*臨界点*)* の付近で温度を変える *(*系を変える*)* と，*micro (local)* には鉄原子 *(*の周りの電子*)* の相対運動が少し変わるだけだが，それが極めて多数 *(*化学で習ったアボガドロ数 6×10^{23} が「多数」の典型的な「個数」*)* 集まった磁石として *(*細かいところを無視して *macro (globa)l* に*)* 眺めると，臨界点付近で少し温度を変えるだけで磁石になったりならなかったりする．

一般に，くりこみ群の 1 つの軌道が自明でない *(*固定点直上でない*)* ということは，現実の系の *local* な現象と *global* な現象が大きく違うことを意味する．自由度が多数集まって新しい現象が起きることを協同現象ということがある． ◇

問 10 ３方向とも抵抗値が異なる場合を調べよ．３方向の素子の抵抗値を a, b, c とするとき，比だけが興味の対象なので $a+b+c=1$ と規格化することで，正三角形

$$\mathcal{P} = \left\{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3_+ \mid a_1 + a_2 + a_3 = 1\right\}.$$

[47] $\lim_{n\to\infty} H_n(r) = 1$ なので，n が大きくなると $H_n(r) \gg 1$ が満たされなくなるから，これらの事実を $\sim$ を使って漸近形で書くためには r を n とともに適切に大きくしていく scaling limit で書かないといけない．ここでは直感を重んじるために，そのような精密な式を書かなかったが，recursion の具体形があるからそれは難しくない．

[48] 落合啓之先生からの質問．これは本質的な質問なので，言及しておきたい．

[49] 現在 universality または invariance principle と呼ばれているものの全てがくりこみ群の描像で理解されるべきであるという意味ではない．

と抵抗比を一対一に対応させられる．このパラメータ空間上の力学系としてくりこみ群を見たときに，固定点と *flow* の様子を概観せよ．

$(R^a_{n+1} = \frac{(4K+R^a_n+R^b_n+R^c_n)R^a_n(R^b_n+R^c_n)}{(K+R^b_n+R^c_n)(R^a_n+R^b_n+R^c_n)},\ where\ K = \frac{(R^a_n+R^b_n)(R^b_n+R^c_n)(R^c_n+R^a_n)}{2(R^a_nR^b_n+R^b_nR^c_n+R^c_nR^a_n)}.)$

$\diamond$

等方性の回復があると，漸近一次元拡散という連続確率過程（連続関数上の確率測度）が構成できる．ブラウン運動のような自己相似な確率過程と違って，付け加える構造がスケール毎に変化する確率過程であること，くりこみ群の自明でない軌道（不安定固定点）があれば，そのような確率過程が構成できる，という一般的描像に基づいて構成した，という意味でおそらく初めてのものである．連続極限に関することはこの講義では触れないが，詳しいことは原論文を参照されたい [34, 27, 28].

5.5 Sierpiński carpet の場合．

5.5.1 等方性の弱い意味での回復．

Pre-Sierpiński gasket では漸化式 (70) を陽に求めることができたので，対称性の回復 (71) を証明できた．次の問題は，対称性の回復という現象が Sierpiński gasket に特有なのか，フラクタルに普遍的な現象なのかということである．そこで，今度は pre-Sierpiński carpet の場合を調べよう．

一辺 1 の正方形から $n = 1, 2, \cdots,$ に対して順次一辺 3^n の正方形を 8^{n-1} 個ずつくり抜いていき，その $n \to \infty$ の極限として Sierpiński carpet を作る．記号を節約して Sierpiński carpet のこの構成に対しても，Sierpiński gasket のときと同様に，最初の正方形を F_0 とし，一般に第 n 段階の図形を F_n とおく．外に大きく広げていく代わりに，細かい構造を付け加えたが，等方性の回復，という比についてのみ考察するので，大きくするか小さくするかは関係ない．

電気抵抗を持つ材質で作られたプレ-フラクタル F_n を考える．既に注意したように F_n は対称性を持っているが，材質の電気抵抗がその対称性を持っていない状況を考えよう．横方向を x 軸方向，縦方向を y 軸方向とし，x 方向の抵抗率が 1，y 方向の抵抗率が r であって，抵抗率テンソルの二つの主軸が座標軸に平行な一様非等方な材質を考える．そして， F_n をこの材質によって作られた板であるとする．言い換えると， $r > 0$ を定数とし，電位分布が $v(x, y)$ のときに F_n が発するジュール熱が

$$E_{F_n}(v) = \iint_{F_n}\left(\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right) dx\,dy \tag{72}$$

で与えられるとする.（具体的な計算の際は， (72) は座標変換

$$y' = y\sqrt{r} \tag{73}$$

によって等方的な抵抗板に変換できることに注意する．即ち，実験的には等方的な材料を用いて長方形状に成形すればよく，理論的には長方形領域における通常の調和関数の理論が使える.）

F_n の 2 辺 $y = 0$ と $y = 1$ の間に電圧をかけたときに観測される抵抗を $R^y_n(r)$ とする．最小発熱の原理によれば,

$$\frac{1}{R^y_n(r)} = \inf\{E_{F_n}(v)\} \tag{74}$$

となる．ここで右辺は，関数（電位分布） v を境界条件

$$v(x, 0) = 1,\ v(x, 1) = 0,\ \ 0 < x < 1,$$

を満たしながら変えるときのジュール熱 (72) の最小値である．

（inf は下限の意味だが，この問題では v が調和関数のときに最小値をとることが分かる．また，network の場合と違って，解 v を探す関数空間について若干の準備が必要だが，詳しく言うと，境界も含めて連続で，領域の内部で偏微分可能であって，(72) が有限になる関数の範囲で動かす.）同様に $x = 0$ および $x = 1$ の間に電圧をかけたときに観測される抵抗を $R^x_n(r)$ として，非対称性を測る量として (69) の $H_n(r)$ を考える．特に，$R^x_0(r) = 1$ および $R^y_0(r) = r$, 従って $H_0(r) = r$ である．

n が大きいときの $H_n(r)$ の振る舞いについて次の結果を得た [22].

定理 34 ある定数 C がとれて，$r\ (> 0)$ が何であっても，n が十分大きければ $1/C < H_n(r) < C$ が成り立つ．

どれくらい大きな n で定理の不等式が成り立つかは r によって異なるが，C は r によらない．実際，$C = 4926$ にとれることが証明できる．言い換えれば，材質の電気的非等方性がどんなに大きくても,（従って，正方形の板 F_0 の場合の大局的な電気抵抗の非対称性がどんなに大きくても），フラクタルの細かい構

造を入れていけば，やがて電気抵抗の非対称性は $1/C$ と C の間の値になってしまう．その意味で (71) より弱いながら，対称性の回復の傾向が言えたことになる．

対称性の回復を random walk を用いて直感的に説明してみる．フラクタルは一様な空間に比べると障害物があるとみなせる．垂直方向に比べて水平方向に動きやすいような random walk をする粒子を考えよう．粒子はすばやく水平方向に動き回るが，フラクタル中にはたくさんの障害物があるので遠くまで達することはできない．粒子は，二つの障害物の間にとらわれて，水平方向にほぼ一次元的な random walk をすることになる．とはいえ，垂直方向にもゆっくりではあるが random walk しているので，やがて障害物を迂回するだろう．その結果，水平方向にもより遠くまで達することができる．障害物は水平方向と垂直方向に同じ大きさであり，それが，その大きさと同じ程度の距離をおいて配置されているので，水平方向に見て遠くまで random walk が達する頃には同じ程度の距離垂直方向にも動いているはずである．即ち，対称性の回復が起きる．

5.5.2 再帰不等式

定理 34 の証明は，Sierpiński carpet の持つ自己相似性を自然に反映した再帰不等式を求めることに帰着される．大雑把に言うと，非対称性が強いとき ($H_n(r) \gg 1$ を満す n に対して) $R^x_{n+1}(r)$ は $\dfrac{3}{2}\,R^x_n(r)$ に近く，$R^y_{n+1}(r)$ は $\dfrac{7}{6}\,R^y_n(r)$ に近い．従って，$H_n(r)$ は $\left(\dfrac{7}{9}\right)^n r$ のように減少するので，対称性の指数関数的回復傾向が分かる．具体的には次の再帰不等式が証明できる．

命題 35 $r > 0$ かつ $n \geqq 0$ に対して

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{R^x_n(r)} &\leqq \frac{3}{2}\,\frac{1}{R^x_{n+1}(r)} \leqq \frac{a_1}{R^x_n(r)} + \frac{B_1}{R^y_{n-4}(r)}\,, \\
R^y_n(r) &\leqq \frac{6}{7}\,R^y_{n+1}(r) \leqq a_2 R^y_n(r) + B_2 R^x_{n-4}(r).
\end{aligned}
$$

ここで， $a_1 = 13/12,\ B_1 = 108,\ a_2 = 15/14,\ B_2 = 324/7$．これらの式で x と y を入れ換えた式も成立する．但し，$n < 0$ のときは $R^x_n = R^x_0$， $R^y_n = R^y_0$，の意味とする．

命題 35 から 定理 34 が得られることを確認しよう．命題 35 の 1 行目左側の不等式で x と y を入れ換えたものから

$$
\frac{1}{R^y_{n-4}(r)} \leqq \left(\frac{3}{2}\right)^4 \frac{1}{R^y_n(r)}
$$

を得る．これを 1 行目右側の不等式に代入すると

$$
\frac{3}{2}\,\frac{1}{R^x_{n+1}(r)} \leqq \frac{1}{R^y_n(r)}(a_1 H_n(r) + A_1)
$$

を得る．ここで $A_1 = B_1(3/2)^4$．2 行目についても同様の処理をすると，

$$
\frac{6}{7}\,R^y_{n+1}(r) \leqq R^x_n(r)(a_2 H_n(r) + A_2).
$$

ここで $A_2 = B_2(6/7)^4$．二つの不等式を辺々掛け合わせると，

$$
\begin{aligned}
&H_{n+1}(r) \leqq g(H_n(r))\,, \\
&g(x) = \frac{7}{9x}(a_1 x + A_1)(a_2 x + A_2)\,,
\end{aligned}
\tag{75}
$$

が成り立つ．また，命題 35 の左側の不等式で x と y を入れ換えたものを辺々掛け合わせると，

$$
H_{n+1}(r) \leqq \frac{9}{7}\,H_n(r)\,, \tag{76}
$$

も得る．(75) と (76) から

$$
\varlimsup_{n\to\infty} H_n(r) \leqq c
$$

を得る．c は g の唯一の正の固定点 ($g(c) = c > 0$)．$c < 4926$ はすぐ分かるので， 定理 34 の右側の不等式を得る．x 軸と y 軸の入れ替えを考えれば $H_n(r) = 1/H_n(1/r)$ が分かるので，定理 34 の左側の不等式も得る．

かくして，命題 35 から 定理 34 が証明できることが分かった．問題は 命題 35 をどうやって思いつくかである．その着想を整理すると，くりこみ群の思想が見えてくる． §E を参照.

6 Pre-Sierpiński gasket 上の self-avoiding walk.

6.1 問題の背景と全体像.

自分自身の軌跡が交わることを禁止した self-avoiding walk (SAW) については，一般には random walk と比較すると極めて弱い性質しか知られていないことを $\mathbb{Z}^d$ の場合に説明した (§3)．SAW には random walk と違ってマルコフ性がないからである．Pre-fractal 上の SAW についても事情は同様である．

フラクタル上の確率過程論における一つの問題として，$d = 2, 3, 4, \cdots$, に対して定義される d 次元ガスケット (dSG) とよばれるフラクタルの上の self-avoiding walk の漸近的性質を調べよ，という問題を考えることができる．$d = 2$ と $d = 3$ については 1980 年代に物理の論文があり，筆者も関係した一連の研究で詳しい数学的な結論も得られた．具体的には，歩数の母関数の scaling limit の特異性や端点間平均距離の指数の決定，また，random walk の連続極限としてブラウン運動があるように，Sierpiński gasket 上の self-avoiding walk にも連続極限が存在すること，それが self-avoiding であること，および path の Hausdorff 次元の決定，などである．Self-avoiding walk の非マルコフ性を考えると，得られた結果は極めて精密である．これは Sierpiński gasket の特性を，くりこみ群を通して生かし得たからである．$d \geqq 4$ についてはその後 10 数年間新たな展開が世界的になかったが，立教大学の大学院生津田稔朗君との共同研究によって $d = 4$ で「reduce されたモデル」の場合がほぼ解決した．

この問題に関しては次元 d についての一般論が見つかっていない．これはガスケットに限るものではなく，著しい空間次元依存性は一般的な self-avoiding walk の特徴と言うべきで，どの空間上の self-avoiding walk であるかによって，その漸近的な振る舞いも，それを研究する手段も大きく変わる．この点は「兄貴分」的な研究対象である random walk （およびその連続極限である拡散過程）と対照的である．後者はマルコフ性や調和関数論との関係など，恐ろしいほど深い一般論があり，その多くがどの空間上の random walk （または拡散過程）に対しても適用可能である．

Self-avoiding walk も $\mathbb{Z}^d$ 上では 50 年以上研究されてきた課題であるにも関わらず，random walk の研究に比べたときの進歩の遅さは驚くほどである．逆に，マルコフ性という強力な性質を持たない self-avoiding walk を考察することは,「自分の手を縛る」ことによって確率過程 (連鎖) に対して広く成り立つ新しい普遍的結果を目指すことであり，成功すれば新しい数学的解析手段を手に入れることになる．

既に言及したように， self-avoiding walk と random walk の漸近的性質は d 次元正方格子においては $d > 4$ で一致することが知られている (§3)．これは大きな進歩であった．問題は低次元 $\mathbb{Z}^d$ 上の SAW である．RW のアンチテーゼとしての SAW にこだわるならば，漸近的性質が RW と一致することが証明された高次元 SAW だけでなく，指数が異なると期待される低次元 SAW が重要である．d 次元ガスケットは，この意味では全ての d について 1 次元正方格子と 2 次元正方格子の「間」の次元に相当する．

フラクタルについてはもう一つの側面がある．正方格子ではフーリエ級数展開 (運動量表示) がもう一つの強力な武器であった．これは (離散) 並進対称性による．フラクタルという並進対称性のない空間上で考えることにより，フーリエ展開というもう一つの強力な解析手段を縛ることになる．このことの意義は十分くみ尽くし得ていないが，いつの日か重要になるかもしれない．

以下では，一般論には進まず，(2 次元)pre-Sierpiński gasket 上の SAW の解析についてのみ解説する．一般論に向けてのある本質的と考えられる問題については §F を，ここで記した SAW に関する興味と §F の問題の関連の概要については §F.9 を，それぞれ参照して頂きたい．

以下の内容は 3 次元 pre-Sierpiński gasket 上の self-avoiding walk (SAW) に関しても対応する結果が得られている [32]．4 次元 pre-Sierpiński gasket 上の SAW に関しても部分的に結果が得られている [37]．しかし，ここでは (2 次元)pre-Sierpiński gasket に限って [32] の論理構成に基づいて述べる．他の次元の場合に関しては文献を参照されたい．

6.2 Pre-Sierpiński gasket 上の SAW.

Pre-Sierpiński gasket の定義は §5.1，§5.2 に与えた．以下では（今までと同様）連続極限は考えないので，$\mathbb{Z}^d$ 上の walk との類推のきくように，単位構造を 1 に固定して外に広げて定義した F_n の定義の類推を採用する．§5.2 では原点で二つの正三角形をつないだ図形として pre-Sierpiński gasket F_n を定義したが，SAW は一度通った点を通らないので，原点から出発する SAW を考える際，一方の三角形のみを考えれば十分である．そこで以下では記号を少し乱用して， F_n で一辺 2^n の正三角形（に単位長さを最小単位とする Sierpiński gasket 型内部構造をつけた図形）を表すことにする．即ち， §5.2 で考えた F_n のうち第 1 象限にある三角形部分を以下では F_n と書く．なお，F_n は一応単位正三角形板をつないだものとして定義しているが，実際は，頂点と辺をつないだ network の構造しか見ていないので，以下では F_n を network とみなす．F_n の単位正三角形たちの頂点の集合を G_n とする．

念のため繰り返すと，$O = (0, 0)$, $a_0 = (1, 0)$, $b_0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，とし，$F_0$ を正三角形 Oa_0b_0 の頂点と辺からなる network とする．集合 $F_0 \subset F_1 \subset F_2 \cdots$ を

$$F_{n+1} = F_n \cup (F_n + 2^n a_0) \cup (F_n + 2^n b_0), \quad n = 0, 1, 2, \cdots,$$

で帰納的に定義する．ここで，$A+a=\{x+a \mid x\in A\}$ および $kA=\{kx \mid x\in A\}$ と書いた．

$F=\bigcup_{n=0}^{\infty} F_n$ が (2 次元)pre-Sierpiński gasket である．F の node (辺の交点) の集合を G，$a_n=2^n a_0$，$b_n=2^n b_0$，と書く．

$n\in\mathbb{Z}_+$ と $w:\ \mathbb{Z}_+\to G$ のうち，$w(0)=0$ を満たすものに対して，a_n の hitting time を $L_n(w)=\inf\{k>0 \mid w(k)=a_n\}$ とおく．原点を出発点とし，a_n を到着点とする G 上の self-avoiding path の集合を

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_n=\{w:\ \mathbb{Z}_+\to G \mid\ & w(0)=0,\\ & |w(i)-w(i+1)|=1,\ \overline{w(i)w(i+1)}\subset F_n,\ 0\leqq i\leqq L_n(w)-1,\ w(i)=a_n,\ i\geqq L_n(w),\\ & w(i_1)\neq w(i_2),\ 0\leqq i_1<i_2\leqq L_n(w)\}\end{aligned} \tag{77}$$

で定義する．最後の条件を除いて，SRW のときと同様である ($L_n(w)<\infty$ という条件は自動的に満たされる)．最後の条件が一度通った点を通らない，という self-avoiding 条件になっていることは $\mathbb{Z}^d$ のときと同様である．

以下の点についてこれから調べる．

(i) 全ての議論の本質的出発点として，L_n の母関数に関するくりこみ群解析を行う (§6.3).

(ii) $\mathcal{W}_n$ （‘Pinned’-SAW) の歩数 L_n の分布の $n\to\infty$ での漸近的な様子を見る (§6.4).

(iii) 歩数を固定した SAW の本数と到達点の位置 (mean square displacement) の漸近的な様子を見る (§6.5).

6.3 くりこみ群の軌道解析．

以下， L を $\mathcal{W}_n$ 上で $L=L_n$ と定義する．$\mathcal{W}_n$ の path を分類するために次の事実に注目する．

$\mathcal{T}$ を F の単位正三角形（F 上に辺を持つ一辺 1 の上向き正三角形）全てからなる集合とする．各正三角形 $\triangle\in\mathcal{T}$ を 各 $w\in\mathcal{W}_n$ が通る通り方は（通るとすれば），

(1): １辺だけ通って通り抜けるか,

(2): 続けざまに２辺を (三角形内で折れ曲がって) 通るか,（Self-avoiding なので，pre-Sierpiński gasket の構造上，一度三角形を出たら戻れない[50] .）

2 通りである．対応して，$S_i(w),\ i=1,2$ を

$$S_i(w)=\{\triangle\in\mathcal{T} \mid w \text{ は } \triangle \text{ を (1) 型で通る }\}$$

で定義し， $s_i(w)$ を $S_i(w)$ の元の数とする．

$$s_1+2s_2=L \tag{78}$$

である．

単位三角形の path の通り方を上のように 2 種類に分類したことに対応して，$\mathcal{W}_{n,i},\ i=1,2,\ n\in\mathbb{Z}$, を，$F_n$ の頂点 $O,\ a_n,\ b_n$ の通り方で 2 種類に分類して次を定義する．

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_{n,1}&=\{w\in\mathcal{W}_n \mid b_n\notin w(\mathbb{Z})\},\\ \mathcal{W}_{n,2}&=\{w\in\mathcal{W}_n \mid b_n\in w(\mathbb{Z})\}\}.\end{aligned} \tag{79}$$

$\mathcal{W}_n$ の部分集合 $\mathcal{W}$ の generating function $X(\mathcal{W}):\ \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ を

$$X(\mathcal{W})(\vec{x})=\sum_{w\in\mathcal{W}}\prod_{i=1}^{2} x_i^{s_i(w)},\quad \vec{x}=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2,$$

で定義し，

$$X_{n,i}=X(\mathcal{W}_{n,i}),\quad i=1,2\ n\in\mathbb{Z}_+, \tag{80}$$

とおく．

[50] この点は高次元 pre-gasket では複雑になる．

注 14 *§4.2* や *§5.2* では１種類の *path* の集合しか用意しなかったのに対して，ここでは２種類の *path* の集合を用意していることに注意．一般に，最終的にほしい *path* の集合を包含し，かつ，くりこみ群 *(recursion)* が閉じるだけの集合を用意しなければならない．閉じるための集合は，上でやったように，単位要素図形の *path* の通り方の種類で決まる[51]．

特に，*dSG* ($d \geqq 3$) 上の *SAW* では，最終的に原点から出発する１本の *path* しか考えなくても，くりこみ群は２本以上の *path* の列を考える（必然的に原点以外から出発するものも考える）必要がある． ◇

命題 36 (くりこみ群) $\vec{X}_n = (X_{n,1}, X_{n,2})$ は次の漸化式で決まる．

$$\begin{aligned} &\vec{X}_0(\vec{x}) = \vec{x}, \quad x \in \mathbb{R}^2, \\ &\vec{X}_{n+1}(\vec{x}) = \vec{\Phi}(\vec{X}_n(\vec{x})), \quad x \in \mathbb{R}^2,\ n \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

ここで $\vec{\Phi} = (\Phi_1, \Phi_2) = \vec{X}_1$ は次を満たす．

(i) 各 Φ_i, $i = 1, 2$, は 3 次の正係数多項式で，各項はそれぞれ 2 次，3 次以上．

(ii)
$$\Phi_1(x, 0) = x^2 + x^3, \tag{81}$$

(iii)
$$\begin{aligned} \Phi_1(\vec{x}) &= \Phi_{1,0}(\vec{x})x_1 + \Phi_{1,1}(\vec{x}), \\ \Phi_2(\vec{x}) &= \Phi_{1,0}(\vec{x})x_2 \end{aligned} \tag{82}$$

となる 0 でない正係数多項式 $\Phi_{1,0}$, $\Phi_{1,1}$ がある．

(iv) $\Phi_{1,1}(\vec{x})$ は x_1^2 という項を含む．

証明．主張の前半は，G_{n+1} のうち $2G_n$ だけを見ることで G_{n+1} に値を取る path $w \in \mathcal{W}_{n+1}$ から $2G_n$ に値を取る path を得て，図形を半分に縮小することで $\mathcal{W}_n$ の要素 $Q_n w$ (decimation) を §4.2 の (58) と同様に定義できる．対応させることができる (decimation)．この対応に応じて，命題 31 の証明と同様に $\mathcal{W}_1$ の path で分類することで，主張の前半 (くりこみ群) を得る．

もちろん $\vec{\Phi} = \vec{X}_1$ をあらわに求めるのも難しくはない．

$$\begin{aligned} \Phi_1(\vec{x}) &= x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + x_1^3 + 2x_1^2x_2\,, \\ \Phi_2(\vec{x}) &= (x_1^2 + 2x_1x_2)x_2\,, \end{aligned} \tag{83}$$

主張の後半はこれから明らか．

□

注 15 $d \geqq 3$ のとき *dSG* の $\vec{\Phi}$ を求めるのは手ではできない．$d \geqq 4$ ではパソコンでも完全に求めるのは楽ではない．

◇

問 11 *(i)* *(83)* を導け．

(ii) 命題 *36* の証明で「命題 *31* の証明と同様に」となっている部分を遂行せよ．

(iii) $\vec{X}_n(\vec{x})$, $n \in \mathbb{Z}_+$, をいろいろな $\vec{x}$ に対して計算機で計算して求め，*flow* の様子の概形を描け．

◇

$$D = \{\vec{x} \in \mathbb{R}_+^2 \mid \sup_{n \in \mathbb{Z}_+} \max_{i \in \{1,2\}} X_{n,i}(\vec{x}) < \infty\} \tag{84}$$

とおく．

---

[51] §5.4.2 で考えた非等方的な random walk の場合も，実は２つ以上の集合を考える必要があるが，この講義録の初期版ではその説明を省略しており，講義録としては不完全である．

命題 37 $D\subset\mathbb{R}_+^2$ は閉部分集合で，その $\mathbb{R}_+^2$ の中での外部，境界，内部をそれぞれ $D^c=\mathbb{R}_+^2\setminus\overline{D}$ ($\overline{D}$ は D の閉包), $\partial D=\overline{D}\cap\overline{D^c}$, $D^o=D\setminus\partial D$ とおくとき，

$$D=\{\vec{x}\in\mathbb{R}_+^2 \mid \sup_{n\in\mathbb{Z}_+}\max_{i\in\{1,2\}} X_{n,i}(\vec{x})\leqq 1\}, \tag{85}$$

および,

$$D^o=\{\vec{x}\in\mathbb{R}_+^2 \mid \lim_{n\to\infty}\max_{i\in\{1,2\}} X_{n,i}(\vec{x})=0\}. \tag{86}$$

さらに，

$$\vec{\Phi}(D^o)\subset D^o,\quad \vec{\Phi}(\partial D)\subset\partial D,\quad \vec{\Phi}(D^c)\subset D^c.$$

即ち，これらの集合は *invariant sets* になっている．

証明. (85) の右辺の集合を D' と書くとき，$D'\subset D$ は (条件が厳しくなるだけだから) 当然．$D'^c\subset D^c$ ($\mathbb{R}_+^2$ の中での補集合の意味) は Φ_1 が項 x_1^2, x_2^2 を含む係数 1 以上の多項式だから当然．

(86) の右辺の集合を $\tilde{D}$ と書く．先ず，$\epsilon>0$ に対して

$$D_\epsilon=\{\vec{x}\in\mathbb{R}_+^2 \mid \max_{i=1,2} x_i<\epsilon\}$$

とおくと，命題 36 の Φ_i の形から定数 $M>0$ を選んで，$0<\epsilon<1$ ならば $\Phi_i(\vec{x})\leqq M\epsilon(x_1+x_2)/2$, $i=1,2$, $\vec{x}\in D_\epsilon$, とできることに注意して，$\epsilon=\dfrac{1}{2M}\wedge\dfrac{1}{2}$ とおけば，$X_{n,1}+X_{n,2}\leqq 2^{-n}(x_1+x_2)$, $n\in\mathbb{Z}_+$, $\vec{x}\in D_\epsilon$, となるので，$D_\epsilon\subset\tilde{D}$ を得る．一方 $\tilde{D}$ の定義から $\vec{x}\in\tilde{D}$ ならば十分大きい n に対して $\vec{X}_n(\vec{x})\in D_\epsilon$ となる．$\vec{X}_n$ は連続関数で，D_ϵ は開集合なので，このとき $\vec{x}$ の近傍 U で $\vec{X}_n(U)\subset D_\epsilon$ となるものがとれる．これは $\tilde{D}\subset D^o$ を意味する．

逆の包含関係を言うのに，単調性,

$$\vec{x}\in D,\ \vec{x}'\in\mathbb{R}_+^2,\ x_i'<x_i \text{ または } x_i'=x_i=0\,,\ i=1,2,\ \Rightarrow\ \vec{x}'\in\tilde{D}$$

にまず注意する．これは $r=\displaystyle\max_{i;\,x_i\neq 0}\frac{x_i'}{x_i}$ とおくとき，命題 36 の Φ_i の形から $\vec{x}'\neq\vec{0}$ ならば $X_{n,i}(\vec{x}')\leqq r^{2^n}X_{n,i}(\vec{x})$ となることから分かる．そこで $\vec{x}'\in D^o$ とする．開集合なので $x_i'<x_i$, $i=1,2$, なる $\vec{x}\in D^o$ が存在する．単調性から $\vec{x}'\in\tilde{D}$. これは $\tilde{D}\supset D^o$ を意味する．

問題になっている集合たちが invariant sets になっていることは，定義と (86) から分かる．

□

問 12 D^o, ∂D, D^c が *invariant sets* になっていることを証明せよ． ◇

関数 $R:\mathbb{R}_{>0}^2\to\mathbb{R}$ を

$$R(\vec{x})=\frac{x_2}{x_1}$$

で定義し，

$$R_n(\vec{x})=R(\vec{X}_n(\vec{x})),\quad \vec{x}\in\mathbb{R}_{>0}^2,$$

で $R_n:\ \mathbb{R}_{>0}^2\to\mathbb{R}$ を定義する．

命題 38 各 $\vec{x}\in\mathbb{R}_{>0}^2$ に対し，$R_n(\vec{x})$ は n について非増加．特に,

$$R_\infty(\vec{x})=\lim_{n\to\infty}R_n(\vec{x})$$

が存在して非負．さらに，$\vec{x}\in D\cap\mathbb{R}_{>0}^2$ ならば，$R_\infty(\vec{x})=0$.

証明.

$$R_{n+1}(\vec{x})=R_n(\vec{x})\left(1-\frac{\Phi_{1,0}}{\Phi_1}(\vec{X}_n(\vec{x}))\right)$$

と 命題 36 の $\vec{\Phi}$ の性質から，前半は明らか.

$\vec{x}\in D\cap\mathbb{R}_{>0}^2$ とすると，(85) から $X_{n,1}(\vec{x})\leqq 1$, $n\in\mathbb{Z}_+$, なので,

$$\Phi_1(\vec{X}_n(\vec{x}))\leqq X_{n,1}(\vec{x})^2P(R_n(\vec{x}))$$

となる正係数多項式 P がある．命題 36 の $\Phi_{1,0}$ の性質から，

$$R_{n+1}(\vec{x}) \leqq R_n(\vec{x}) \left(1 - \frac{1}{P(R_n(\vec{x}))}\right), \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

R_n は n について減少するから

$$1 - \frac{1}{P(R_n(\vec{x}))} \leqq M < 1$$

なる n によらない定数 M が ($\vec{x}$ を固定する毎に) ある．よって R_n は悪くとも指数関数的に減少する．よって後半も成り立つ．

□

命題 39 $\vec{x} \in D^o \cap \Xi_1$ ならば

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ 2^{-n} \log X_{n,1}(\vec{x}) < 0\,.$$

証明. 命題 36 から定数項のない ($P_3(0,0) = 0$) 2 変数正係数多項式 P_3 がとれて，

$$\Phi_1(\vec{x}) \leqq x_1^2\,(1 + P_3(x_1, R(\vec{x})))\,.$$

これと 命題 36 から，

$$\log X_{n+1,1} \leqq 2\,\log X_{n,1} + \log(1 + P_3(X_{n,1}, R_n)). \tag{87}$$

これと 命題 37 と 命題 38 から

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,(\log X_{n+1,1} - \frac{3}{2}\log X_{n,1}) = -\infty.$$

これと 命題 37 から，

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,((\frac{2}{3})^n \log X_{n,1}) < 0\,.$$

これと (87) と 命題 38 を再度 命題 37 に使えば

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,(\log X_{n+1,1} - (2 - (\frac{2}{3})^n)\,\log X_{n,1}) < 0\,.$$

よって十分大きな N に対して，

$$\prod_{k=1}^{n}(1 - \frac{1}{2}(\frac{2}{3})^{k+N-1})^{-1}\,2^{-n}\,\log X_{n+N,1}(\vec{x}) \leqq \log X_{N,1}(\vec{x}).$$

これと 命題 37 から主張を得る．

□

命題 36 の $\vec{\Phi}$ の性質から，$\vec{\Phi}$ は x_1 軸を自分自身へ移すことが分かる．また命題 38 は，$\vec{x} \in D \cap \mathbb{R}^2_{>0}$ から出発すると，$n \to \infty$ で x_1 軸に近づくことを意味する．よって x_1 軸上のくりこみ群の軌道を調べる．

$$\phi(x) = x^2 + x^3, \quad x \geqq 0, \tag{88}$$

とおく． $\Phi_1(x, 0) = \phi(x)$ である．

命題 40 *(i)* $x \geqq 0$ における ϕ の固定点は 0 と $x_c = \dfrac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$ である．

(ii) $\begin{cases} 0 \leqq x < x_c \;\Rightarrow\; \phi(x) \in [0, x_c)\,, \\ \phi(x_c) = x_c\,, \\ x > x_c \;\Rightarrow\; \phi(x) \in (x_c, \infty). \end{cases}$

問 13 命題 *40* を証明せよ． ◇

注 16 統計力学とよばれる理論物理の一分野のアナロジーで言うと，$(0, x_c)$, x_c, (x_c, ∞) はそれぞれ低温相，臨界点，高温相に対応する *(*と思う*)*. ◇

2 次元空間のくりこみ群に戻る．母関数の漸近的振る舞いが D の内部か外部かで変わる．特に，∂D の近傍が歩数 L の分布の決定に重要になる．

定理 41

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty}\vec{X}_n(\vec{x}) = (0,0)\,, &&\vec{x}\in D^o\cap\mathbb{R}^2_{>0}\,,\\ &\lim_{n\to\infty}\vec{X}_n(\vec{x}) = (\infty,\infty)\,, &&\vec{x}\in D^c\cap\mathbb{R}^2_{>0}\,,\\ &\lim_{n\to\infty}\vec{X}_n(\vec{x}) = (x_c,0)\,, &&\vec{x}\in \partial D\cap\mathbb{R}^2_{>0}\,. \end{aligned}$$

ここで x_c は 命題 *1* のとおり．

証明．最初の二つの場合は 命題 37 からほとんど明らか．最後の場合について，∂D は閉集合なので，無限列 $\{\vec{X}_n(\vec{x})\}$ は ∂D に集積点 (x',y') を持つ．命題 38 と (85) から $\lim\limits_{n\to\infty} X_{n,2}=0$ を得るので $y'=0$．∂D の点で $y'=0$ となるのは $(x_c,0)$ だけである．よって，集積点は $(x_c,0)$ のみとなるので，この点に収束する．
□

これまで，くりこみ群が閉じるように s_1, s_2 という 2 種類の「拡張された歩数」の母関数を考えてきたが，総歩数 L の母関数

$$Z_{n,i}(\beta) = \sum_{w\in\mathcal{W}_{n,i}} \exp(-\beta\, L(w))\,,\quad \beta\in\mathbb{R},\ i=1,2,\ n\in\mathbb{Z}. \tag{89}$$

については (78) より，

$$\vec{Z}_n(\beta) = \vec{X}_n(\exp(-\beta), \exp(-2\beta))$$

となるので， 定理 41 を $\vec{Z}$ に関する結果に翻訳するのは容易である．

系 42 ある $\beta_c\in\mathbb{R}$ があって，以下が成り立つ．

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty}\vec{Z}_n(\beta) = (0,0), &&\beta>\beta_c\,,\\ &\lim_{n\to\infty}\vec{Z}_n(\beta) = (x_c,0), &&\beta=\beta_c\,,\\ &\lim_{n\to\infty}\vec{Z}_n(\beta) = (\infty,\infty), &&\beta<\beta_c\,. \end{aligned}$$

注 17 *(i)* 物理のくりこみ群の描像の一般論では ∂D が *critical surface* に相当する．

(ii) *dSG* において d についての一般論を構築するとき，最大の困難は固定点の決定と軌道の収束の証明である．その意味で， $d=2$ では極めて簡単であった以上の部分 *(*くりこみ群の軌道解析*)* が一般論では本質となる．

最大の本質的困難は，$d=2$ では ϕ が $\mathbb{R}$ 上の写像だったのに対して $d\geqq 3$ では高次元空間になるため，仮に期待通りに ϕ が Φ の定める力学系の軌道の漸近形の本質的部分を与えるとしても，可能な行き先が高次元で，一点だけではないから，定理 *41* のときのように収束を自明とできない．

(iii) *SRW* をくりこみ群で解析したときは軌道の収束を議論する必要がなかった．これは最初から固定点直上 *(*x_c*)* が *SRW* であったからである．伝統的な立場に則った研究はこのような固定点直上の解析になっている．逆にこのために，くりこみ群の難しさが今日まで数学において意識されにくかったのかもしれない[52]．

実際，等方性の回復においては軌道の解析を行っている．*Sierpiński carpet* 上の *random walk* では固定点への収束が完全には証明されていない，というのが弱い意味の等方性の回復の意味である．

SAW はここでの解析が示すとおり，一本を *relative weight* 1 で定義する本来の自然な *weight (micro canonical ensemble)* と，くりこみ群の解析に乗りやすい母関数 *(canonical ensemble)* が，自明でない．*SRW* は母関数の *weight* x^L が固定点で x_c^L となって，L が一定なら *weight* が共通だったが，*SAW* では x^L で始めても，くりこみ群は $x_1^{s_1}x_2^{s_2}$ でないと閉じず，固定点は $(x_c,0)$ なので z^L の形にはまとまらない．

[52] 先に考察する空間を定めて，そこで解の存在を言うという戦略は，固定点の存在範囲が最初から見えている面はあるのかもしれない．

もちろん，折れ線近似などは解への漸近ということを意識しているから，単純にくりこみ群の思想がこれまでなかったというのは論外である．むしろ，スケーリングは極限定理として，解析学の主要な題材である．

くりこみ群が数学としてどう新しいものでありうるのか，ということはまだ完全には分からない．当面は現に解かれていない典型的な問題を解いていくことで，一般論が見えてくるのを待つしかない．

(iv) x_c と違って β_c の値や領域 D の具体形は軌道の大局的な振舞に依存するため，求めにくい．そのため，通常これらの量の詳細研究は「後回し」になっている．

◇

6.4 歩数分布の極限定理．

母関数に対する recursion(くりこみ群のような) の漸近的性質から分布の漸近的性質を得るには，例えば §B のような基礎確率論の範疇だが一定の手続きが必要である．§B は 1 変数 ($\mathbb{R}_+$ 上の分布) の場合だが，ここでは 2 変数の結合分布が必要なので，別途手続きを踏む必要がある．

§6.3 の解析が (少なくとも現状では) d に著しく依存するのに対して，この節の議論は一般化しやすい部分が多い（きちんと定式化するのは手間がかかるが）．

6.4.1 固定点における平均歩数行列と，固定点への母関数の指数関数的収束．

$\vec{\Phi}$ の 1 階偏微分が平均歩数（のスケール辺りの増大度）を表す．$\vec{a} = (a_1, a_2) = (x_c, 0)$ とおき，平均歩数行列を

$$B = \left(\frac{\partial^t \vec{\Phi}}{\partial x_1}(\vec{a})\,,\ \frac{\partial^t \vec{\Phi}}{\partial x_2}(\vec{a}) \right) \tag{90}$$

で定義する．

命題 43 B は非負値行列で，

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & B_{21} \\ 0 & B_{22} \end{pmatrix},$$

という形をしている．ここで，

$$\lambda = 2x_c + 3x_c^2\,. \tag{91}$$

その固有値を $\lambda_1 \geqq \lambda_2$ とすると，

$$\lambda_1 = \lambda > 1 > \lambda_2 \geqq 0$$

を満たす．特に， B は正則行列 P で対角化可能である：$P^{-1}BP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$.

B の $\lambda_1 = \lambda$ に対する左固有ベクトル (α_1, α_2) は $\alpha_i > 0$, $i = 1, 2$, を満たす.

証明. $\vec{\Phi}$ の explicit な形 (83) から明らかであるが， 命題 36 の主張にまとめられている情報だけあれば十分である．

例えば $\lambda_2 < 1$ は

$$\lambda_2 = B_{22} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2}(x_c, 0) = \Phi_{1,0}(x_c, 0)$$

と

$$x_c = \Phi_{1,0}(x_c, 0)x_c + \Phi_{1,1}(x_c, 0) \geqq \Phi_{1,0}(x_c, 0)x_c + {x_c}^2$$

から得る．

□

問 14 命題 *43* の証明には， $\vec{\Phi}$ の性質のうち 命題 *36* の主張にまとめられているものと， $(x_c, 0)$ が $\vec{\Phi}$ の固定点であることのみで十分であることを確認せよ． ◇

$$\Xi_1 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}_+^2 \mid x_1 > 0,\ x_2 \geqq 0\} \subset \mathbb{R}_+^2 \tag{92}$$

とおく． 定理 41 (と，細かく言えば 命題 40) から，$\vec{x} \in \partial D \cap \Xi_1$ ならば $\lim\limits_{n\to\infty} \vec{X}_n(\vec{x}) = (x_c, 0)$ である．次の命題はこのときの収束の速さに関する結果である．

命題 44 各 $\vec{x} \in \partial D \cap \Xi_1$ に対して，

$$|\vec{X}_n(\vec{x}) - \vec{a}| < C\rho^n\,,\quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

を満たす $C > 0$ と $0 < \rho < 1$ が存在する．

証明. $\lim\limits_{n\to\infty} \vec{X}_n(\vec{x}) = (x_c, 0)$ と 命題 43 から，力学系の標準的な議論 命題 70 によって証明される． □

問 15 命題 *70* の証明を 命題 *44* の場合に，具体的に成分を書き下すことで，証明で新たに定義された *(*ユークリッド距離以外の*)* ノルムに対してノルムの一般論を使わずに証明せよ．

特に，$\|B_s\|^*$, $\left\|B_u^{-1}\right\|^*$ はそれぞれいくらか？

◇

6.4.2 固定点以外からの平均歩数行列の収束．

(77) の $\mathcal{W}_n$ と (79) の $\mathcal{W}_{n,1}$ の上に $\vec{x}=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}_+^2\setminus\{(0,0)\}$ をパラメータとする確率測度 $\mu_n(\vec{x})$ と $\mu_{n,1}(\vec{x})$ を以下で定義する．

$$\mu_n(\vec{x})[w]=\frac{1}{X_{n,1}(\vec{x})+X_{n,2}(\vec{x})}\prod_{i=1}^{2}x_i^{s_i(w)},\quad w\in\mathcal{W}_n\,,$$
$$\mu_{n,1}(\vec{x})[w]=\frac{1}{X_{n,1}(\vec{x})}\prod_{i=1}^{2}x_i^{s_i(w)},\quad w\in\mathcal{W}_{n,1}\,.$$

ここで， $s_i(w)$, $X_{n,i}(\vec{x})$ は §6.3 のとおり．この $\mu_n(\vec{x})$, $\mu_{n,1}(\vec{x})$ の下での L の分布の $n\to\infty$ での漸近形を求める．

$n\in\mathbb{Z}_+$ に対して 2×2 行列 ∂X_n を

$$\partial X_n(\vec{z})=(\frac{\partial}{\partial x_1}{}^t\vec{X}_n(\vec{z}),\frac{\partial}{\partial x_2}{}^t\vec{X}_n(\vec{z})),\ \vec{z}\in\mathbb{C}^2,$$

で定義し， $\partial\Phi=\partial X_1$ とおく．くりこみ群 (命題 36) から，

$$\partial X_{n+1}(\vec{z})=\partial\Phi(\vec{X}_n(\vec{z}))\,\partial\Phi(\vec{X}_{n-1}(\vec{z}))\cdots\partial\Phi(\vec{z}),\quad n\in\mathbb{Z}_+,\ \vec{z}\in\mathbb{C}^2. \tag{93}$$

(84) の D と (92) の Ξ_1 を用いて $\Gamma=\partial D\cap\Xi_1$ とおく．

命題 45 $\vec{x}=(x_1,x_2)\in\Gamma$ ならば $\Lambda(\vec{x})=\lim_{n\to\infty}\lambda^{-n}\partial X_n(\vec{x})$ が存在し，$i,j=1,2$ に対して $\Lambda_{ij}(\vec{x})\geqq 0$，かつ， $\Lambda_{11}(\vec{x})>0$ である．ここで λ は *(91)* で与えられている．

証明. $\vec{x}\in\Gamma$ をとる．平均値の定理から，$0<\theta<1$ が存在して，$\vec{u}=\vec{a}+\theta\,(\vec{x}-\vec{a})$ とおくとき，

$$(\partial\Phi)_{ij}(\vec{x})-(\partial\Phi)_{ij}(\vec{a})=\sum_{k=1}^{2}(\frac{\partial}{\partial x_k}\partial\Phi_{ij})(\vec{u})\,(x_k-a_k). \tag{94}$$

$\Gamma\subset\mathbb{R}^2$ は有界で $\dfrac{\partial}{\partial x_k}\partial\Phi_{ij}(\vec{x})$ は $\vec{x}$ の多項式なので， $M>0$ がとれて，

$$|\frac{\partial}{\partial x_k}\partial\Phi_{ij}(\vec{u})|\leqq M,\quad \vec{u}=\vec{a}+\theta\,(\vec{x}-\vec{a}),\ 0<\theta<1,\ \vec{x}\in\Gamma\,,\ i,j,k=1,2\,. \tag{95}$$

他方， 命題 44 から，各 $\vec{x}\in\partial D\cap\Xi_1$ に対して $C>0$ と $0<\rho<1$ がとれて，

$$|X_{n,i}(\vec{x})-a_i|\leqq C\rho^n,\ i=1,2,\ n\in\mathbb{Z}_+. \tag{96}$$

(94), (95), (96) から $C_1>0$ が存在して，

$$\left\|\partial\Phi(\vec{X}_n(\vec{x}))-\partial\Phi(\vec{a})\right\|\leqq C_1\rho^n,\ n\in\mathbb{Z}_+. \tag{97}$$

これと 補題 71 から $\lim_{n\to\infty}\lambda^{-n}\partial X_n(\vec{x})$ の存在を得る．補題 71 の Q は $\Lambda(\vec{a})$ なので， (136) から，m が十分大きければ $\left(\lim_{n\to\infty}\lambda^{-n}\ \partial\Phi(\vec{X}_{n+m}(\vec{x}))\cdots\partial\Phi(\vec{X}_{m+1}(\vec{x}))\right)_{11}>0$．他方，命題 36 から $\Phi_1(\vec{x})$ は x_1^2 という項を持つので，

$$\left(\partial\Phi(\vec{X}_k(\vec{x}))\right)_{11}>0,\quad k=1,\cdots,m,\ \vec{x}\in\partial D\cap\Xi_1\,.$$

よって $\Lambda_{11}(\vec{x})>0$．

□

6.4.3 特性関数と歩数分布のスケーリング極限．

$\vec{x} \in \Gamma$, $\vec{t} \in \mathbb{C}^2$, $i = 1, 2$, $n \in \mathbb{Z}_+$ に対して，

$$X_{n,i}(\vec{x}e^{\lambda^{-n}\vec{t}}) = X_{n,i}(x_1 e^{\lambda^{-n}t_1}, x_2 e^{\lambda^{-n}t_2}),$$

という略記法を用いる．

命題 46 *(i)* $\vec{x} \in \Gamma$ に対して，$X_{n,i}(\vec{x}e^{\lambda^{-n}\vec{t}})$, $i = 1, 2$, は $n \to \infty$ で $\vec{t} = (t_1, t_2) \in \mathbb{C}^2$ に関して広義一様にある整関数 $X_i^* \colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ に収束する．さらに， X_2^* は恒等的に 0 である．($\vec{X}^*$ は $\vec{x}$ 依存性を持つが，表記を略す.)

(ii) $\vec{X}^* = (X_1^*, 0)$ とおくとき，

$$\vec{X}^*(\lambda\vec{t}) = \vec{\Phi}(\vec{X}^*(\vec{t})), \quad \vec{t} \in \mathbb{C}^2. \tag{98}$$

さらに，

$$\frac{\partial}{\partial t_j} X_i^*(\vec{0}) = x_j \Lambda_{ij}(\vec{x}).$$

証明．命題 43 から $B = \partial\Phi(\vec{a})$ の最大固有値 p に対応する左固有ベクトルの各成分 α_i は正なので，$\vec{z} = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ に対して

$$|\vec{z}|_* = \alpha_1|z_1| + \alpha_2|z_2|$$

とおくと， $|\cdot|_*$ はノルムである．定義から，

$$|(\partial\Phi)(\vec{a})\ {}^t\vec{z}|_* \leqq \lambda|\vec{z}|_* \,. \tag{99}$$

$\vec{x} \in \Gamma$ を固定し， $\vec{w} \in \mathbb{R}^2$ とする．$\vec{v}_n = \vec{X}_n(\vec{x}) - \vec{a}$，および，$\vec{w}_n = \vec{X}_n(\vec{x} + \vec{w}) - \vec{X}_n(\vec{x})$ とおくと，

$$\vec{X}_n(\vec{x} + \vec{w}) = \vec{a} + \vec{v}_n + \vec{w}_n, \tag{100}$$

平均値の定理と (99) から $C_1 > 0$ がとれて，

$$|\vec{\Phi}(\vec{a} + \vec{v}_n + \vec{w}) - \vec{\Phi}(\vec{a} + \vec{v}_n)|_* \leqq \lambda(1 + C_1|\vec{v}_n|_*)(1 + C_1|\vec{w}|_*)|\vec{w}|_* \,, \quad |\vec{w}|_* \leqq 1, \ n \in \mathbb{Z}_+. \tag{101}$$

他方， 命題 44 から $C_2 > 0$ と $0 < \rho < 1$ が存在して，

$$|\vec{v}_n|_* \leqq C_2\rho^n, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{102}$$

$C_3 = C_1C_2$ とおいて，$b \displaystyle\prod_{k=0}^{\infty}(1 + C_3\rho^k)(1 + C_1\lambda^{-k}) \leqq 1$ を満たす $b > 0$ をとると，(101) と帰納法によって，

$$\begin{gathered} |\vec{w}_k|_* \leqq \lambda^k|\vec{w}|_* \prod_{j=0}^{k-1}(1 + C_3\rho^j)(1 + C_1\lambda^{-(n-j)}) \leqq \frac{1}{b}\lambda^k|\vec{w}|_*, \\ n = k, k+1, \cdots, \ k \in \mathbb{Z}_+, \ \vec{w} \in \mathbb{R}^2; \ |\vec{w}| \leqq b\lambda^{-n}. \end{gathered} \tag{103}$$

(100), (102), (103) から，$\delta > 0$ と $C_4 > 0$ が存在して，

$$|X_{n,i}(\vec{x}\, e^{\lambda^{-n}\vec{t}})|_* \leqq C_4, \quad \vec{t} \in \mathbb{R}^2; \ |\vec{t}|_* < \delta. \tag{104}$$

$X_{n,i}$ は正係数の多項式なので，必要ならば C_4 を少し大きくすることで，(104) は原点の複素近傍 $\Omega = \{\vec{t} \in \mathbb{C}^2 \mid |\vec{t}|_* < \delta\}$ でも成り立つ．よって，$\{\{X_{n,i}(\vec{x}\, e^{\lambda^{-n}\vec{t}}) \mid i = 1, 2, \ n = 1, 2, \cdots\}$ は Ω 上の正則関数の正規族をなす．従って，任意の部分列に対して広義一様収束部分列がとれるので，あとは，例えばテーラー係数が収束することを言えば，極限が部分列によらないことが言えて，極限 X_i^* の Ω における存在が言える．そこで次にこれを証明する．

$$X_{n,i}(\vec{x}\, e^{\lambda^{-n}\vec{t}}) = \sum_{\vec{k}=(k_1,k_2)\in\mathbb{Z}_+^2} a_{n,i}(\vec{k})t_1^{k_1}t_2^{k_2} \tag{105}$$

とおく．定理 41 から

$$\lim_{n\to\infty} a_{n,i}(\vec{0}) = a_i, \ i = 1, 2\,. \tag{106}$$

$i,j=1,2,$ に対して $e^{(i)}_j=\delta_{ij}$ (Kronecker のデルタ) とおいて $\vec{e}^{(i)}=(e^{(i)}_1,e^{(i)}_2)\in\mathbb{Z}^2$ を定義する．命題 45 から，

$$\lim_{n\to\infty} a_{n,i}(\vec{e}^{(j)})=x_j\Lambda_{ij}(\vec{x}),\quad i,j=1,2\,. \tag{107}$$

(105) をくりこみ群 (命題 36) に代入して $n\to\infty$ を考える．(106) と (107) から帰納的に，極限

$$a^*_i(\vec{k})=\lim_{n\to\infty} a_{n,i}(\vec{k}),\quad i=1,2,\ k\in\mathbb{Z}_+,$$

の存在が分かる．

以上から，整関数 $X^*_i:\ \Omega\to\mathbb{C}$ が存在して，$X_{n,i}(\vec{x}\,e^{\lambda^{-n}\vec{t}})$ は $\vec{t}\in\Omega$ に関して広義一様に $n\to\infty$ で $X^*_i(\vec{t})$ に収束する．(98) はくりこみ群で $n\to\infty$ とすれば (Ω では) 得られ，命題の主張の最後の微分に関する式は (107) から得られる．

あとは，収束範囲を全複素平面に拡張できればよいが，$R>0$ とし，$\lambda^{-m}R<\delta/2$ を満たす $m\in\mathbb{N}$ を選ぶと，

$$X_{n+m,i}(\vec{x}\,e^{\lambda^{-(n+m)}\vec{t}})=X_{m,i}(\vec{X}_n(\vec{x}\,e^{\lambda^{-n}(\lambda^{-m}\vec{t})}))\ \to\ X_{m,i}(\vec{X}^*(\lambda^{-m}\vec{t})),\quad n\to\infty,$$

が $\{\vec{t}\in\mathbb{C}^2\mid |\vec{t}|_*\leqq R\}$ で一様に成り立つので，問題ない．

最後に X^*_2 が恒等的に 0 であることを言う．$X_{n,2}$ は正係数多項式なので，$(t_1,t_2)\in\mathbb{R}^2$ に対して，

$$|X_{n,2}(\vec{x}\,e^{\sqrt{-1}\lambda^{-n}\vec{t}})|\leqq|X_{n,2}(\vec{x})|$$

となるので，定理 41 から，

$$\lim_{n\to\infty} X_{n,2}(\vec{x}\,e^{\lambda^{-n}(\sqrt{-1}\vec{t})})=0$$

を得る．このことと，X^*_2 が整関数であることから，恒等的に $\mathbb{C}^2$ 上で 0 であることが分かる． □

特性関数のスケーリング極限が分かったので，これを測度の極限に翻訳する．$\mu_n(\vec{x})$ と $\mu_{n,1}(\vec{x})$ の下での，$\lambda^{-n}L(w)$ の分布をそれぞれ $p_n(\vec{x})$ と $p^*_n(\vec{x})$ とおき，その母関数を，

$$g^{(n)}(t)=\int_0^\infty e^{t\xi}\,p_n(d\xi),\quad t\in\mathbb{C}, \tag{108}$$

および，

$$g^{(n)}_1(t)=\int_0^\infty e^{t\xi}\,p^*_n(d\xi),\quad t\in\mathbb{C}, \tag{109}$$

とおく．(以下，混乱がなければ，確率測度や母関数の $\vec{x}$ 依存性は書かない．)

$t\in\mathbb{C}$ に対して，$\vec{x}_{n,t}=(x_1e^{\lambda^{-n}t},x_2e^{2\lambda^{-n}t})$ とおくと，(78) と母関数の定義 (§6.3) から，

$$g^{(n)}(t)=\frac{X_{n,1}(\vec{x}_{n,t})+X_{n,2}(\vec{x}_{n,t})}{X_{n,1}(\vec{x})+X_{n,2}(\vec{x})}\,,$$
$$g^{(n)}_1(t)=\frac{X_{n,1}(\vec{x}_{n,t})}{X_{n,1}(\vec{x})}\,.$$

命題 47 $\vec{x}=(x_1,x_2)\in\partial D\cap\Xi_1$ とすると，整関数 $g:\ \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ が存在して，$t\in\mathbb{C}$ に関して広義一様に，

$$\lim_{n\to\infty} g^{(n)}(t)=\lim_{n\to\infty} g^{(n)}_1(t)=g(t).$$

g は以下の条件で一意的に決まる．(88) の ϕ に対して，

$$x_cg(\lambda t)=\phi(x_cg(t)),\quad t\in\mathbb{C}, \tag{110}$$

および，

$$\frac{\partial g}{\partial t}(0)=\frac{1}{x_c}(x_1\Lambda_{11}(\vec{x})+x_2\Lambda_{12}(\vec{x})). \tag{111}$$

証明. 定理 41 と 命題 46 から，$\vec{x}\in\partial D\cap\Xi_1$ ならば，$t\in\mathbb{C}$ に関して広義一様に，

$$\lim_{n\to\infty} g^{(n)}(t)=\frac{1}{x_c}X^*_1(t,2t),$$
$$\lim_{n\to\infty} g^{(n)}_1(t)=\frac{1}{x_c}X^*_1(t,2t).$$

これより主張を得る．

□

命題 47 と 命題 45 から，最終的に次を得る．

系 48 *(i)* $\vec{x} = (x_1, x_2) \in \partial D \cap \Xi_1$ に対して，$\mathbb{R}$ 上の確率測度 $p(\vec{x})$ が存在して，$n \to \infty$ のとき，$p_n(\vec{x})$ および $p_n^*(\vec{x})$ はともに $p(\vec{x})$ に弱収束する．

その母関数は，$g(t) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{t\xi}\, p(\vec{x})(d\xi)$ で与えられる．

(ii) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \xi\, p(\vec{x})(d\xi) > 0$.

(iii) $p(\vec{x})$ は単位分布ではない *(*分散正である*)*.

6.4.4 極限分布の密度の存在．

極限分布の性質を調べること自体も，SAW の漸近的な振る舞いを調べる上で意味があるが，特に以下の事実は mean square displacement の指数の存在を証明する際に必要になる．

(91) の λ を用いて

$$\nu = \frac{\log 2}{\log \lambda} \tag{112}$$

とおく．

命題 49 $C_i > 0,\ i = 1, 2,$ が存在して，

$$|g(\sqrt{-1}t)| \leqq C_2 e^{-C_1 |t|^{\nu}}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

証明．命題 47 から

$$g(\sqrt{-1}\lambda t) = \frac{1}{x_c}\phi(x_c g(\sqrt{-1}t)),\ t \in \mathbb{R}, \tag{113}$$

なので，$G(t) = -|t|^{-\nu} \log |g(\sqrt{-1}t)|$ とおいて $|g(\sqrt{-1}t)| \leqq 1$ に注意すると，(88) から

$$G(\lambda t) \geqq G(t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{114}$$

他方，系 48 から，$\delta > 0$ と $0 < C < 1$ が存在して，

$$0 < |g(\sqrt{-1}t)| < C, \quad t \in \mathbb{R};\ \lambda^{-1}\delta \leqq |t| < \delta.$$

よって， $C_1 = -\delta^{-\nu} \log C\ (> 0)$ とおけば，(114) から， $G(t) \geqq C_1,\ t \geqq \delta$．従って，

$$|g(\sqrt{-1}t)| \leqq e^{-C_1 |t|^{\nu}}, \quad t \geqq \delta.$$

$C_2 > e^{C_1 \delta^{\nu}}$ にとれば主張を得る．

□

命題 50 p は C^{∞} 密度関数 ρ を持ち，$\rho(\xi) = 0,\ \xi \leqq 0,$ と $\rho(\xi) > 0,\ \xi > 0,$ を満たす．

証明. g が C^{∞} 密度関数を持つことは 命題 49 から得られる（定理 65 参照）．よって (110) と (88) から，

$$\lambda^{-1}\rho(\lambda^{-1}\xi) = x_c \rho * \rho(\xi) + 2x_c^2 \rho * \rho * \rho(\xi) + 2x_c^3 \rho * \rho * \rho * \rho(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}\,. \tag{115}$$

ここで $*$ は convolution．ρ の support を A とすると， $A \in [0, \infty)$ であることは明らか．さらに， (115) から， $x, y, z \in A$ ならば $\lambda^{-1}(x+y),\ \lambda^{-1}(x+y+z) \in A$．系 48 から $0 \neq x_0 \in A$ なる x_0 がある．よって，$(2\lambda^{-1})^n x_0 \in A,\ n \in \mathbb{Z}_+$．$2 < \lambda < 3$ かつ A が閉集合であることから $0 \in A$．よって， $0, \lambda^{-1}x_0\,, 2\lambda^{-1}x_0\,,$ $3\lambda^{-1}x_0 \in A$．帰納法と A が閉集合であることによって，主張を得る．

□

(89) の総歩数 L の母関数 $Z_{n,i}(\beta)$ に対応する測度 μ_n^* は $\vec{x}_c = (\exp(-\beta_c),\ \exp(-2\beta_c))$ としたときの $\mu_n(\vec{x}_c)$ に等しい．(β_c の定義から $\vec{x}_c \in \Gamma$.) 系 48 and 命題 50 をこれに即して述べることも容易である．

問 16 μ_n^* のスケーリング極限に対する主張を書き下せ．

◇

注 18 総歩数に対する母関数は，くりこみ群のパラメータ空間で曲線 $x_2 = x_1^2$ に対応する．この部分空間はくりこみ群の物理学でいう *canonical surface* のアナロジーになっている． ◇

6.5 SAW の本数と mean square displacement．

§6.3 と §6.4 では，端点を固定した SAW を考察したが，mean square displacement の指数は，歩数を固定したときに到達点の分布を問題にする．以下，(2 次元)Sierpiński gasket の場合を [32] に即して説明する ([35] も参照) が，§6.3 と §6.4 に相当する結果があれば一般の dSG でも同様の結論が得られる ([37]) という意味で，この節の議論の一般化も可能である．

途中点でとまることになるが，Sierpiński gasket の自己相似性を利用して，$\mathcal{W}_n$ の path をつないだものとみなして，前節の結果を利用する．これで path の本数に関する estimate が可能になる．さらに，到達点に比べて長い path と短い path が，同様の recursion で少ないことを示し，最後に reflection principle を SRW のときのように使う (例えば定理 5) ことで目標に至る．

(77) では端点を固定したが，ここでは，$k \in \mathbb{N}$ に対して，歩数が k の SAW の集合，

$$\begin{aligned}\mathcal{W}^{(k)} = \{ & w:\ \mathbb{Z}_+ \to G \mid w(0)=0, \\ & |w(i)-w(i+1)|=1,\ \overline{w(i)w(i+1)} \subset F,\ 0 \leqq i \leqq k-1,\ \ w(i)=w(k),\ i=k+1,k+2,\cdots, \\ & w(i_1) \neq w(i_2),\ 0 \leqq i_1 < i_2 \leqq k\}\end{aligned}$$

を考え， $N(k) = \sharp\mathcal{W}^{(k)}$ とおく．また，$\tilde{P}_k$ を

$$\tilde{P}_k[A] = \frac{1}{N(k)} \sharp A,\ \ A \subset \mathcal{W}^{(k)},$$

で定義される $\mathcal{W}^{(k)}$ の一様分布とする．$w \in W^{(k)}$ に対して $\|w\| = \max\{|w(\ell)|;\ \ell = 1,2,\cdots,k\}$ とおく．ここで， $|\cdot|$ は $F \subset \mathbb{R}^2$ のユークリッド距離．

主要な結論は以下の通りである．

定理 51 *(i)* $\displaystyle\lim_{k\to\infty} k^{-1}\log N(k) = \beta_c$ *(*命題 *53).*

(ii) $\tilde{P}_k$ に関する期待値を $\mathrm{E}_k[\ ]$ と書くとき，

$$\lim_{k\to\infty} (\log k)^{-1} \log \mathrm{E}_k[\ |w(k)|^s\ ] = s\nu\,,\ s \in \mathbb{R}.$$

即ち， *Sierpiński gasket* 上の *SAW* の *mean square displacement* の指数は *(*$\approx$ の意味で*)* ν である．

6.5.1 SAW の本数．

命題 52 $b>0$ とし，$n \in \mathbb{Z}$ と $\xi \in \mathbb{R}$ に対して，$h_n = b\,\lambda^{-n}\sqrt{n}$ および $g_n(\xi) = (\sqrt{2\pi}h_n)^{-1}\exp(-\xi^2/(2h_n^2))$ とおく．b が十分大きければ $\xi \in \mathbb{R}$ に関して一様に

$$\lim_{n\to\infty} (p_n^*(\vec{x}_c) * g_n)(\xi) = \rho(\vec{x}_c)(\xi)$$

ここで，

$$(p_n^*(\vec{x}_c) * g_n)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} g_n(\xi-\eta)\, p_n^*(\vec{x}_c)(d\eta).$$

ここで λ は *(91)*， p_n^* は 系 *48*，ρ は 命題 *50* のとおり．また， $\vec{x}_c = (\exp(-\beta_c), \exp(-2\beta_c))$ で β_c は 系 *42* のとおり．

証明．

$$\phi_n(t) = \int_{\mathbb{R}} \exp(\sqrt{-1}\xi t)\,(p_n^*(\vec{x}_c) * g_n)(\xi)\,d\xi,\ t \in \mathbb{R},$$

とおくと，

$$\phi_n(t) = \frac{Z_{n,1}(\beta_c - \sqrt{-1}\lambda^{-n}t)}{Z_{n,1}(\beta_c)} \exp(-h_n^2t^2/2) = g_1^{(n)}(\sqrt{-1}t)\exp(-h_n^2t^2/2).$$

ここで，$Z_{n,1}$ は (89) のとおり，$g_1^{(n)}$ は (109) で $\vec{x} = \vec{x}_c$ としたもの．$\vec{x}_c \in \partial D \cap \Xi_1$ に注意．

$$A = \{t \in \mathbb{C} \mid \mathbf{Im}t \geqq 0\,,\ \lambda^{-1} \leqq |t| \leqq \lambda^2\}$$

とおく．命題 50 から，$\displaystyle\sup_{t\in A}|g(\sqrt{-1}t)| < 1$ なので，命題 47 と 系 42 から，$\epsilon > 0$ と $n_1 \in \mathbb{N}$ がとれて，

$$|Z_{n,1}(\beta_c - \sqrt{-1}\lambda^{-n}t)| = |Z_{n,1}(\beta_c)\ g_1^{(n)}(\sqrt{-1}t)| \leqq x_c - \epsilon,\ \ n \geqq n_1,\ t \in A.$$

命題 37 から $(x_c-\epsilon,0)\in D^o$ であり，$D^o\subset\mathbb{R}_+^2$ は開集合なので，$\delta>0$ がとれて，$(x_c-\epsilon,\delta)\in D^o$ とできる．$|Z_{n,i}(\beta_c-\sqrt{-1}\lambda^{-n}t)|\leqq|Z_{n,i}(\beta_c)|$, $t\in\mathbb{R}$, に注意すると，系 42 から $n_0\geqq n_1$ なる自然数がとれて，$n\geqq n_0$ で $|Z_{n,2}(\beta_c-\sqrt{-1}\lambda^{-n}t)|\leqq\delta$．よって，

$$|Z_{n+m,1}(\beta_c-\sqrt{-1}\lambda^{-n}t)|\leqq X_{m,1}(x_c-\epsilon,\delta)\,,\quad n\geqq n_0\,,\ m\geqq1\,,\ t\in A\,.$$

これと 命題 39 から $C>0$ と $\gamma>0$ が存在して，

$$|Z_{n+m,1}(\beta_c-\sqrt{-1}\lambda^{-n}t)|\leqq C\exp(-\gamma\,2^m)\,,\quad n\geqq n_0\,,\ m\geqq1,\ t\in A, \tag{116}$$

および，

$$Z_{n+m,2}(\beta_c+\lambda^{-n})\leqq C\exp(-\gamma\,2^m)\,,\quad n\geqq n_0\,,\ m\geqq1\,,\ t\in A\,. \tag{117}$$

n_0 を上記のものにとり，$n>n_0$ とする．$t\in\mathbb{R}$ を $|t|\in[1,\lambda^{n-n_0-1}]$ を満たすものとし，$m=\left[\dfrac{\log|t|}{\log\lambda}\right]+1$ ($[\cdot]$ は整数部分) とおくと，$n-m\geqq n_0$ かつ $\lambda^{-1}\leqq\lambda^{-m}|t|<1$ を満たす．よって，

$$\begin{aligned}|\phi_n(t)|&\leqq\frac{|Z_{n,1}(\beta_c-i\lambda^{-n}t)|}{Z_{n,1}(\beta_c)}=\frac{|Z_{n-m+m,1}(\beta_c-i\lambda^{-(n-m)}(\lambda^{-m}t))|}{Z_{n,1}(\beta_c)}\\&\leqq C\frac{\exp(-\gamma\,2^m)}{Z_{n,1}(\beta_c)}\leqq C\frac{\exp(-\gamma\,|t|^\nu)}{Z_{n,1}(\beta_c)}\,.\end{aligned}$$

その上，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}Z_{n,1}(\beta_c)=x_c$ と $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\phi_n(t)=g(\sqrt{-1}t)$ だから，命題 49 と優収束定理から，

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}|\chi_{[0,\lambda^{n-n_0-1}]}(|t|)\phi_n(t)-g(\sqrt{-1}t)|dt=0\,.$$

他方，

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}}|\chi_{[0,\lambda^{n-n_0-1}]}(|t|)\phi_n(t)-\phi_n(t)|dt\\&\leqq2\int_{\lambda^{n-n_0-1}}^\infty\exp(-h_n^2t^2/2)dt\\&\leqq2\,(h_n^2\lambda^{n-n_0-1})^{-1}\exp(-(h_n\lambda^{n-n_0-1})^2/2)\\&=2\lambda^{n_0-1}b^{-2}\lambda^nn^{-1}\exp(-\lambda^{-2n_0+2}b^2n/2),\end{aligned}$$

となるが，b が十分大きければ，右辺は $n\to\infty$ で 0 に収束する．即ち，

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}|\phi_n(t)-g(\sqrt{-1}t)|dt=0$$

を得るので，主張は証明された．　□

命題 53 正定数 C_1, C_2, および実定数 γ_1 γ_2 が存在して，

$$C_1\,k^{\gamma_1}\exp(\beta_c\,k)\leqq N(k)\leqq C_2\,k^{\gamma_2}\exp(\beta_c\,k),\quad k\in\mathbb{N}.$$

証明. $W^{(0)}=\displaystyle\bigcup_{k=0}^\infty\mathcal{W}^{(k)}$ とおき，$D:\ W^{(0)}\to\mathbb{Z}$ を，

$$D(w)=\min\{n\in\mathbb{Z}_+\mid w(i)\in F_n,\ i=0,1,\cdots,L(w)\} \tag{118}$$

で定義する．

$$M_n=\sum_{w\in W^{(0)}\,,\ D(w)\leqq n}\exp(-\beta_c\,L(w)),\quad n\in\mathbb{Z}_+\,,$$

とおいて，くりこみ群 (命題 36) を証明したときのように M_{n+1} の和を分類すると，2 変数正係数多項式 f_1 があって，

$$M_{n+1}\leqq f_1(\vec{Z}_n(\beta_c))M_n\,,\quad n\in\mathbb{Z}_+, \tag{119}$$

と書けることが分かる．系 42 から $\vec{Z}_n(\beta_c)$ は $n\to\infty$ で収束するから，$A_1>0$ と $A_2>1$ がとれて，

$$M_n\leqq A_1\,A_2^n\,,\quad n\in\mathbb{Z}_+. \tag{120}$$

定義から $2^{D(w)-1} \leqq L(w)$ なので，

$$\exp(-\beta_c k)N(k) \leqq M_{[\log k/\log 2]+1} \leqq A_1\, A_2^2\, A_2^{\log k/\log 2}$$

となって，主張の上からの評価を得る．

下からの評価を得るために， b を 命題 52 が成り立つ (十分大きな) 数とする．$k_n = \sqrt{2\log\lambda}bn\lambda^{-n}$ とおくと，

$$(p_n^*(\vec{x}_c) * g_n)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} g_n(\xi-\eta)p_n^*(\vec{x}_c)(d\eta)$$

において

$$\int_{\mathbb{R}\setminus[\xi-k_n,\xi+k_n]} g_n(\xi-\eta)p_n^*(\vec{x}_c)(d\eta) \leqq g_n(k_n) = (2\pi b^2 n)^{-1/2} \to 0, \quad n\to\infty,$$

となるので，命題 52 から，

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{\xi\in\mathbb{R}} |\rho(\vec{x}_c)(\xi) - \int_{[\xi-k_n,\xi+k_n]} g_n(\xi-\eta)p_n^*(\vec{x}_c)(d\eta)| = 0.$$

これと 命題 50 から，自然数 n_2 と $\epsilon > 0$ がとれて，

$$h_n^{-1}p_n^*(\vec{x}_c)([\xi-k_n,\xi+k_n]) \geqq \epsilon, \quad n \geqq n_2\,,\ \xi\in[\lambda^{-1},\lambda^2].$$

$k\in\mathbb{N}$ とする．n を，$\lambda^{-n}k\in[1,\lambda]$ なる自然数とする．k が十分大きければ $n\geqq n_2$ となり，$k_n \leqq 1-\lambda^{-1}$ が従うので，

$$p_n^*(\vec{x}_c)([\lambda^{-n}k-2k_n,\lambda^{-n}k]) \geqq h_n\epsilon.$$

$w\in W_1^{(n)}$ かつ $L(w)\leqq k$ ならば，まっすぐ外に延長することで $L=k$ なる $W^{(0)}$ の path を得ることができることを合わせると，

$$Z_{n,1}(\beta_c)h_n\epsilon \leqq \sum_{w\in W_1^{(n)},\ k-2k_n\lambda^n\leqq L(w)\leqq k} \exp(-\beta_c L(w)) \leqq \exp(\beta_c 2k_n\lambda^n)\exp(-\beta_c k)N(k)\,.$$

よって

$$N(k) \geqq Z_{n,1}(\beta_c)\,\epsilon b\lambda^{-n}n^{1/2}\exp(-2\beta_c b\,(2\log\lambda)^{1/2}n)\exp(\beta_c k).$$

$n \leqq \dfrac{\log k}{\log\lambda}$ なので，これは主張の下からの評価を意味する． □

問 17 *(119)* の証明を図を書いて確認せよ．特に f_1 を具体的に与えよ． ◇

注 19 次節の *mean square displacement* の結果を強化するためには，*path* の本数の漸近評価 *(*命題 *53)* も *sub-leading order* まで強化しないといけない． ◇

6.5.2 大偏差型評価と reflection principle．

自然数 n,m に対して，

$$U_{n,m} = \sum_{w\in W^{(0)},\ D(w)\leqq n,\ L(w)\geqq\lambda^{n+m/2}} \exp(-\beta_c L(w)),$$
$$V_{n,m} = \sum_{w\in W^{(0)},\ D(w)=n+1,\ L(w)\leqq\lambda^{n-m}} \exp(-\beta_c L(w)),$$

とおく．

命題 54 正数 $A_2\,, C,\, \gamma$ が存在して，

$$U_{n,m} \leqq CA_2^n\exp(-\gamma\lambda^{m/2}),$$
$$V_{n,m} \leqq CA_2^n\exp(-\gamma 2^m), \quad n\in\mathbb{N},\ m\in\mathbb{N}.$$

A_2 は *(120)* と共通にとれる．

証明. $r=(\lambda-\sqrt{\lambda})/4$ とおいて,

$$S_{n,m,i}=\sum_{w\in\mathcal{W}_{n,i},\ L(w)\geqq\lambda^{n+m/2}r}\exp(-\beta_c L(w)),\quad n\in\mathbb{N},\ m\in\mathbb{N},\ i=1,2,$$

を定義する. (119) のときの類似の図形的考察により, そこでの f_1 (2 変数の正係数多項式, $f(0,0)=1$) を用いて,

$$U_{n+1,m}\leqq f_1(\vec{Z}_n(\beta_c))U_{n,m+1}+\left(\sum_{i=1}^{2}S_{n,m,i}\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(\vec{Z}_n(\beta_c))\right)M_n\,,$$

を得る. (120) を得たときと同様に, 自然数 n_1 が存在して $f_1(\vec{Z}_n(\beta_c))\leqq A_2\,,\,n\geqq n_1$, を得る. ここで A_2 は (120) と同じもの. 系 42 と (120) から $C_1>0$ がとれて,

$$A_2^{-(n+1)}U_{n+1,m}\leqq A_2^{-n}U_{n,m+1}+C_1\sum_{i=1}^{2}S_{n,m,i}\,,\quad n\geqq n_1\,,\ m\geqq 0\,. \tag{121}$$

$L(w)\leqq 2\cdot 3^{D(w)}$ に注意すると, $\lambda^{n+m/2}>2\cdot 3^n$ ならば $U_{n,m}=0$ となるが, 条件は $m\geqq 2n$ かつ $n>1$ ならば満たされる. $n_1>1$ ととってよい. これより,

$$A_2^{-n}U_{n,m}\leqq C_1\sum_{k=0}^{[\frac{2}{3}n]}\sum_{i=1}^{2}S_{n-k-1,m+k,i}\,,\quad n\geqq 4n_1\,,\ m\geqq 0\,. \tag{122}$$

他方,

$$S_{n,m,i}\leqq\exp(-r\lambda^{m/2})\sum_{w\in\mathcal{W}_{n,i}}\exp(-(\beta_c-\lambda^{-n})L(w))=\exp(-r\lambda^{m/2})Z_{n,i}(\beta_c-\lambda^{-n}). \tag{123}$$

系 42 と 命題 47 から $C_2>0$ がとれて,

$$Z_{n,1}(\beta_c-\lambda^{-n})=g_1^{(n)}(1)Z_{n,1}(\beta_c)\leqq C_2\,,\quad n\in\mathbb{Z}_+.$$

また, 命題 38 から, $x_{c,n}=\exp(-\beta_c+\lambda^{-n})$ および $\vec{x}_{c,n}=(x_{c,n},x_{c,n}^2)$ とおくと,

$$Z_{n,2}(\beta_c-\lambda^{-n})\leqq R_n(\vec{x}_{c,n})Z_{n,1}(\beta_c-\lambda^{-n})\leqq R_0(\vec{x}_{c,n})C_2=x_{c,n}C_2\,.$$

よって, $Z_{n,i}(\beta_c-\lambda^{-n}),\,i=1,2,\,n\in\mathbb{Z}_+$, は有界である. これを (122), (123) と合わせると, $U_{n,m}$ についての主張を得る.

$V_{n,m}$ の評価を得るには,

$$T_{n,m,i}=\sum_{w\in\mathcal{W}_{n+1,i},\ L(w)\leqq\lambda^{n-m}}\exp(-\beta_c L(w)),\quad n\in\mathbb{N},\ m\in\mathbb{N},\ m\leqq n,\ i=1,2,$$

とおく. 上と同様の図形的考察から, $\vec{T}_{n,m}=(T_{n,m,1},T_{n,m,2})$ とおくと,

$$V_{n,m}\leqq f_1(\vec{T}_{n,m})M_n-M_n=(f_1(\vec{T}_{n,m})-f_1(0,0,0,0))M_n\,.$$

$L(w)\leqq\lambda^{n-m}$ ならば $1-\lambda^{m-n}L(w)\geqq 0$ となることに注意. これより,

$$T_{n,m,i}\leqq\sum_{w\in\mathcal{W}_{n,i}}\exp(-(\beta_c+\lambda^{m-n})L(w)+1)=e\,Z_{n,i}(\beta_c+\lambda^{m-n}),\quad i=1,2,\ n,m\in\mathbb{N},\ n\geqq m.$$

これと (117) と (120) から $V_{n,m}$ についての主張を得る. □

問 18 命題 *54* の主張を一般の dSG に一般化し, 証明も一般化せよ. (r の定義の分母, $S_{n,m,i}$, $T_{n,m,i}$ の i の種類, *(121)* の下から *(122)* までの数値, 等が変わる. また, $Z_{n,i}(\beta_c-\lambda^{-n})$ が有界である理由は i によって違うが, この部分は, 仮定した上で証明してみよ.) ◇

定理 *51* の証明. 定理 51 の前半は 命題 53 で証明されたので，後半を証明する．

$k \in \mathbb{N}$ に対して $K(k) = \left[\dfrac{\log k}{\log \lambda}\right]$ とおくと，$\lambda^{K(k)} \leqq k < \lambda^{K(k)+1}$ である．命題 54 から，$m \leqq K(k)$ を満たす $m \in \mathbb{N}$ と $k \in \mathbb{N}$ に対して，

$$\begin{aligned}&\sharp\{w \in W^{(0)} \mid L(w) = k,\ D(w) \leqq K(k) - m\} \leqq \exp(\beta_c k) U_{K(k)-m,2m}\\ &\leqq C \exp(\beta_c k + (K(k) - m)\log A_2 - \gamma\lambda^m)\\ &\leqq C \exp(\beta_c k + \log_\lambda A_2 \, \log k - \gamma\lambda^m)\,.\end{aligned}$$

これと 命題 53 から，十分大きな α に対して，

$$\begin{aligned}&\tilde{P}_k[D(w) \leqq K(k) - \alpha \log\log k]\\ &\leqq C\, C_1^{-1} \exp((\log_\lambda A_2 - \gamma_1)\log k - \gamma(\log k)^{\alpha\log\lambda}) \leqq C' \exp(-(\log k)^3)\,.\end{aligned}$$

定義から， $2^{D(w)-1} \leqq \|w\| \leqq 2^{D(w)}$ である．よって十分大きな α に対して，[53]

$$\lim_{k\to\infty} \tilde{P}_k[\,\|w\| < (\log k)^{-\alpha} k^\nu\,]\ \exp((\log k)^2) = 0\,.$$

次に， $m, \ell \in \mathbb{N}$ に対して 命題 54 から，

$$\begin{aligned}&\sharp\{w \in W^{(0)} \mid L(w) = k,\ D(w) = K(k) + m + \ell + 2\} \leqq \exp(\beta_c k) V_{K(k)+m+\ell+1,m+\ell}\\ &\leqq C \exp(\beta_c k) A_2^{K(k)+m+\ell+1} \exp(-\gamma 2^{m+\ell})\\ &\leqq C A_2 \exp(\beta_c k + K(k)\log A_2 + m\log A_2 - \gamma 2^{m-1}) A_2^\ell \exp(-\gamma 2^{\ell-1}).\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned}&\tilde{P}_k[D(w) \geqq K(k) + (\alpha/\log 2)\log\log k] = \sum_{\ell=0}^{\infty} \tilde{P}_k[D(w) = K(k) + \ell + (\alpha/\log 2)\log\log k]\\ &\leqq C\,(C_1 A_2)^{-1} \sum_{\ell=0}^{\infty} A_2^\ell \exp(-\gamma 2^{\ell-1})\\ &\quad \times \exp((\log_\lambda A_2 - \gamma_1)\log k + \alpha\log_2 A_2 \log\log k - \frac{\gamma}{8}(\log k)^\alpha)\,.\end{aligned}$$

よって，十分大きな α に対して，

$$\lim_{k\to\infty} \tilde{P}_k[\,\|w\| > (\log k)^{\alpha} k^\nu\,]\ \exp((\log k)^2) = 0\,.$$

以上より，$\alpha > 0$ が存在して，

$$\lim_{k\to\infty} \tilde{P}_k[\,\|w\| < (\log k)^{-\alpha} k^\nu \text{ または } \|w\| > (\log k)^{\alpha} k^\nu\,]\ \exp((\log k)^2) = 0\,. \tag{124}$$

$k \in \mathbb{N}$ および $s > 0$ とする．Reflection principle ([35, Lemma (4.2)]) により，

$$\mathrm{E}_k[\,2^{(D(w)-1)s},\ |w(k)| \leqq 2^{D(w)-1}\,] \leqq \mathrm{E}_k[\,2^{(D(w)-1)s},\ |w(k)| \geqq 2^{D(w)-1}\,].$$

これと $|w(L(w))| \leqq \|w\| \leqq 2^{D(w)}$ から，

$$2^{-s-1}\mathrm{E}_k[\,2^{sD(w)}\,] \leqq \mathrm{E}_k[\,|w(k)|^s\,] \leqq \mathrm{E}_k[\ \|w\|^s\ ] \leqq \mathrm{E}_k[\,2^{sD(w)}\,]. \tag{125}$$

次に，

$$\mathrm{E}_k[\ \|w\|^s\ ] \geqq ((\log k)^{-\alpha} k^\nu)^s (1 - \tilde{P}_k[\,\|w\| \leqq (\log k)^{-\alpha} k^\nu\,])\,.$$

これと (124) から，

$$\varliminf_{k\to\infty} (\log k)^{s\alpha} k^{-s\nu} \mathrm{E}_k[\ \|w\|^s\ ] > 0\,. \tag{126}$$

同様に，

$$\mathrm{E}_k[\ \|w\|^s\ ] \leqq\ ((\log k)^{\alpha} k^\nu)^s + k^s \tilde{P}_k[\,\|w\| \geqq (\log k)^{\alpha} k^\nu\,]\,,$$

を得て，これと (124) から，

$$\varlimsup_{k\to\infty}\ (\log k)^{-s\alpha} k^{-s\nu} \mathrm{E}_k[\ \|w\|^s\ ] < \infty\,. \tag{127}$$

(125), (126), (127) から主張を得る．

□

[53] [32] では ν は κ と書かれているが，序章の定理の主張では $1/\kappa$ となっていたため，証明中の以下の部分では $1/\kappa$ となっていて，誤って，証明中の以上の部分と逆数になっていた．

注 20 *(i) Mean square displacement* の指数は，*Flory* の議論と呼ばれる「物理的近似」（近似の数学的意味や精度に関する数学的保証のない近似）の数値が $\mathbb{Z}^d$ では良い値を与えているとされる．この議論を *dSG* に拡張したものと厳密な結果の数値比較を *§A.11* に掲げておく．

(ii) Sierpiński gasket 上の *self-avodiding walk* の連続極限についてはこの講義では触れないので，*[29, 32]* を参照されたい．

$\diamond$

問 19 *(i)* 定理 *51* の証明中で引用した *reflection principle* を *(*必要ならば *[35, Lemma (4.2)]* を参考にして*)* 詳しく説明せよ．

(ii) 一般の *dSG* 上の *SAW* についてくりこみ群軌道の存在と唯一性を証明せよ[54]．

(iii) Sierpiński gasket 上の *SAW* について，*mean square displacement* の指数を $\sim$ の意味で *(*既に知られている $\approx$ の意味より強く*)* 証明せよ[55]．

$\diamond$

補遺．

A 初等的事項の補遺．

A.1 Stirling の公式．

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{B_n}=1$ なることを $A_n\sim B_n$, $(n\gg 1)$ と書くとき，$n!\sim\sqrt{2\pi n}n^ne^{-n}$, $n\gg 1$, となる．これは非常によく知られた公式で，その導出方法も初等的教科書に種々ある．例えば $\log n!$ を $\int\log x dx$ と比較する [10, vol. 1 §II.9]，[2, §5.1] など．ここでは $n!$ の積分表示を直接評価する方法を紹介する．前提とするのはガウス積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{-y^2/2}\,dy=\sqrt{2\pi}$.

アイデア１ (CLT)． $f(x)=x-n\log x$ とおくと，

$$n!=\int_0^\infty x^ne^{-x}\,dx=\int_0^\infty e^{-f(x)}\,dx.$$

$f'(x)=1-\dfrac{n}{x}$, $f''(x)=\dfrac{n}{x^2}$ より，f は $x=n$ で最小値をとり，その周辺で $f(x)\fallingdotseq f(n)+\dfrac12 f''(n)(x-n)=n-n\log n+\dfrac{1}{2n}(x-n)^2$ を得る．よって，$x=n+y\sqrt{n}$ として

$$n!\fallingdotseq n^ne^{-n}\int_0^\infty e^{-(x-n)^2/2}\,dx\fallingdotseq n^ne^{-n}\sqrt{n}\int_{-\infty}^\infty e^{-y^2/2}\,dy=n^ne^{-n}\sqrt{2\pi n}$$

が期待される．

（以上の手法は鞍点法と呼ばれていて，積分の漸近形を評価するのに有効である．但し，上下からの評価をきちんと行わないと証明としては完結しない．一般にそのためには，あとで見るようにもう一つアイデアが必要になる.）

証明前半． $\displaystyle n!=\int_0^\infty x^ne^{-x}\,dx$ において $x=n+y\sqrt{n}$ として

$$n!=n^ne^{-n}\sqrt{n}\int_{-\sqrt{n}}^\infty(1+y/\sqrt{n})^ne^{-y\sqrt{n}}\,dy.$$

よって

$$F_m=\int_{-m}^\infty\left(e^{-y}(1+y/m)^m\right)^m\,dy$$

[54] 博士論文のレベルをはるかに超える極めて高度な問題.
[55] 博士論文のレベルをはるかに超える高度な問題.

とおくとき，$\lim_{m\to\infty} F_m = \sqrt{2\pi}$ を言えばよい．**アイデア１**から $-y + m\log(1+y/m) \fallingdotseq -y^2/(2m)$ が期待されるので，$m > 1$ と $\alpha > 0$ に対して

$$f(y) = -y + m\log(1+y/m) + \frac{\alpha y^2}{2m}, \quad y > -m,$$

とおくと，

$$F_m = \int_{-m}^{\infty} e^{mf(y)} e^{-\alpha y^2/2} dy.$$

$$f'(y) = -\frac{\alpha}{m(m+y)}\, y(y - \frac{1-\alpha}{\alpha} m)$$

だから $\alpha > 1$ と $\alpha < 1$ に分けて増減表を書く．

$\alpha > 1$ **のとき．**

y	$-m$		$-(1-1/\alpha)m$		0		∞
$f(y)$	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$	0	$\nearrow$	∞

よって，$y \geqq -(1-1/\alpha)m$ のとき $f(y) \geqq 0$．これより，

$$F_m \geqq \int_{-(1-1/\alpha)m}^{\infty} e^{-\alpha y^2/2} dy = \sqrt{2\pi/\alpha} - \int_{-\infty}^{-(1-1/\alpha)m} e^{-\alpha y^2/2} dy = \sqrt{2\pi/\alpha} - \int_{(1-1/\alpha)m}^{\infty} e^{-\alpha y^2/2} dy.$$

ここで，$m > 1$ のとき

$$\int_{(1-1/\alpha)m}^{\infty} e^{-\alpha y^2/2} dy \leqq \int_{(1-1/\alpha)m}^{\infty} y e^{-\alpha y^2/2} dy = -\frac{1}{\alpha}\, e^{-\alpha y^2/2}\Big|_{(1-1/\alpha)m}^{\infty} = \frac{1}{\alpha} e^{-m^2(\alpha-1)^2/(2\alpha)}$$
$$\to 0, \quad m \to \infty,$$

だから $\alpha > 1$ のとき

$$\varliminf_{m\to\infty} F_m \geqq \sqrt{2\pi/\alpha}.$$

よって

$$\varliminf_{m\to\infty} F_m \geqq \sup_{\alpha>1} \sqrt{2\pi/\alpha} = \sqrt{2\pi}.$$

あとは $\varlimsup_{m\to\infty} F_m \leqq \sqrt{2\pi}$ が言えればよい．

$0 < \alpha < 1$ **のとき．**

y	$-m$		0		$m(1-\alpha)/\alpha$		∞
$f(y)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$		$\nearrow$	∞

よって，$-m \leqq y \leqq m(1-\alpha)/\alpha$ のとき $f(y) \leqq 0$．これより，$\alpha > 1$ のときと同様に

$$\begin{aligned} F_m &\leqq \int_{-m}^{m(1-\alpha)/\alpha} e^{-\alpha y^2/2} dy + \int_{m(1-\alpha)/\alpha}^{\infty} \left(e^{-y}(1+y/m)^m\right)^m dy \\ &\leqq \sqrt{2\pi/\alpha} + \int_{m(1-\alpha)/\alpha}^{\infty} \left(e^{-y}(1+y/m)^m\right)^m dy. \end{aligned}$$

もし

$$\lim_{m\to\infty} \int_{m(1-\alpha)/\alpha}^{\infty} \left(e^{-y}(1+y/m)^m\right)^m dy = 0 \tag{128}$$

が言えれば，$\alpha > 1$ のときと同様の議論で

$$\varlimsup_{m\to\infty} F_m \leqq \inf_{0<\alpha<1} \sqrt{2\pi/\alpha} = \sqrt{2\pi}$$

が言えるので証明が終わる．そこで (128) を証明する．

以下，$\delta = (1-\alpha)/\alpha\ (>0)$ とおく．

アイデア２（LDP）． $-y+m\log(1+y/m)$ を $y>m\delta$ で上から押さえたい．しかし，２次式では，今までの増減表から分かるように，y の大きいところで上から押さえきれない．主要な寄与を与えるはずの $y=0$ から $O(m)$ 離れたところなので，粗く１次式で押さえても悪すぎないことを期待して，$g(y)=-y+m\log(1+y/m)+\epsilon y$ とおいてみると，

$$g'(y)=-\frac{1-\epsilon}{m+y}\,y\Big(y-m\frac{\epsilon}{1-\epsilon}\Big).$$

$0<\epsilon<1$，かつ，$\dfrac{\epsilon}{1-\epsilon}<\delta$ となるように ϵ をとる．即ち， $0<\epsilon<\dfrac{\delta}{1+\delta}$ とする．

y	0		$m\frac{\epsilon}{1-\epsilon}$		$m\delta$		∞
$f(y)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	$-m((1-\epsilon)\delta-\log(1+\delta))$	$\searrow$	$-\infty$

よって $g(m\delta)\leqq 0$ すなわち $0<\epsilon\leqq 1-\dfrac{1}{\delta}\log(1+\delta)$ が選べれば，$g(y)\leqq 0,\ y\geqq m\delta,$ となって，ほしい方向の評価がほしい y の範囲で得られる．

証明後半． 容易に分かる事実 $x>\log(1+x),\ x>0,$ から，任意の $\delta>0$ に対して $0<\epsilon<(1-\dfrac{1}{\delta}\log(1+\delta))\wedge(\dfrac{\delta}{1+\delta})$ を満たす ϵ が存在する．このとき，**アイデア２**の計算によって，$-y+m\log(1+y/m)\leqq-\epsilon y$, $y\geqq m\delta$ を得るから，

$$\int_{m\delta}^{\infty}\left(e^{-y}(1+y/m)^m\right)^m dy\leqq\int_{m\delta}^{\infty}e^{-m\epsilon y}\,dy=\frac{1}{m\epsilon}e^{-m^2\delta\epsilon}$$
$$\to\ 0,\quad m\to\infty.$$

よって，(128) が証明できた．

A.2 誤差関数の漸近形．

命題 55 $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^{\infty}e^{-y^2/2}\,dy\sim\frac{1}{x}e^{-x^2/2}.$

証明．[10, §VII.1] の証明はすばらしい．

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{x}e^{-x^2/2}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^{\infty}e^{-y^2/2}\left(1+\frac{1}{y^2}\right)dy,$$
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right)e^{-x^2/2}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^{\infty}e^{-y^2/2}\left(1-\frac{3}{y^4}\right)dy,$$

が両辺を微分することにより得られるので主張が証明された． □

A.3 Borel–Cantelli の定理．

Law of iterated logarithm の証明 (§D) に Borel–Cantelli の定理を使うので，初等的確率論の講義の範囲の事項だが，結果のみ引用しておく．

定理 56 (Borel–Cantelli 第１定理) 事象列 $\{A_k\}$ に対して $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{P}[\,A_k\,]<\infty$ ならば $\mathrm{P}[\ \overline{\lim_{k\to\infty}}\,A_k\,]=0$，即ち，殆ど全ての $\omega\in\Omega$ に対して，ある $k_0(\omega)$ 以降の k について $\omega\notin A_k$.

定理 57 (Borel–Cantelli 第２定理) 独立な事象列 $\{A_k\}$ に対して

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{P}[\,A_k\,]=\infty$$

ならば $\mathrm{P}[\ \overline{\lim_{k\to\infty}}\,A_k\,]=1$, 即ち，殆ど全ての $\omega\in\Omega$ に対して，$\omega\in A_k$ が無限個の k に対して成り立つ．

定理 57 は独立事象列という極めて強い制限がある．無条件に成り立たないのは明らかだが，マルコフ性という若干弱い仮定の下でも成り立つことを注意しておく．

定理 58 (Borel–Cantelli 第２定理の拡張) 事象列 $\{A_k\}$ が，次のいずれか少なくとも一方を満たすとする：

(i) $\mathrm{P}[\ A_n \mid \sigma[A_{n+1},\cdots,A_N]\ ] = \mathrm{P}[\ A_n \mid \sigma[A_{n+1}]\ ]$, $N>n$, と

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{P}[\ A_k \cap {A_{k+1}}^c\ ] = \infty, \tag{129}$$

または，

(ii) $\mathrm{P}[\ A_N \mid \sigma[A_{N-1},\cdots,A_n]\ ] = \mathrm{P}[\ A_N \mid \sigma[A_{N-1}]\ ]$, $N>n$, と

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{P}[\ A_{k+1} \cap {A_k}^c\ ] = \infty.$$

このとき，$\mathrm{P}[\ \overline{\lim_{k\to\infty}}\ A_k\ ] = 1$, 即ち，殆ど全ての $\omega\in\Omega$ に対して，$\omega\in A_k$ が無限個の k に対して成り立つ．

注 21 *(i)* 条件の２つの選択肢のうち，マルコフ性と言うときは，最初の条件を指すが，*random walk* の *law of iterated logarithm* をくりこみ群の解析から得るときは第２の条件を用いるので，それも掲げた．

(ii) *(129)* は，実際は証明で分かるように *(130) (*第１選択肢の場合*)* で十分．使いやすい形で主張を書いた．

◇

証明. 第１選択肢の場合を証明する．第２選択肢は添字の順序を入れ替えれば同様に証明できる．

先ず，(129) から

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{P}[\ A_k \mid {A_{k+1}}^c\ ] = \infty \tag{130}$$

を導く．実際，

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{P}[\ A_k \mid {A_{k+1}}^c\ ] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathrm{P}[\ A_k \cap {A_{k+1}}^c\ ]}{\mathrm{P}[\ A_{k+1}\ ]^c} \geqq \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{P}[\ A_k \cap A_{k+1}\ ]^c = \infty.$$

よって (130) が示された．

次に，(マルコフ性の) 仮定から $n<N$ に対して

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}[\ \Bigl(\bigcup_{k=n}^{N} A_k\Bigr)^c\ ] \\
&= \mathrm{P}[\ {A_n}^c \mid \bigcap_{k=n+1}^{N} {A_k}^c\ ]\cdot \mathrm{P}[\ {A_{n+1}}^c \mid \bigcap_{k=n+2}^{N} {A_k}^c\ ]\cdots \mathrm{P}[\ {A_{N-2}}^c \mid \bigcap_{k=N-1}^{N} {A_k}^c\ ]\cdot \mathrm{P}[\ {A_{N-1}}^c \mid {A_N}^c\ ]\cdot \mathrm{P}[\ {A_N}^c\ ] \\
&= \mathrm{P}[\ {A_N}^c\ ]\cdot \prod_{k=n}^{N-1} \mathrm{P}[\ {A_k}^c \mid {A_{k+1}}^c\ ] = \mathrm{P}[\ {A_N}^c\ ]\cdot \prod_{k=n}^{N-1} (1-\mathrm{P}[\ A_k \mid {A_{k+1}}^c\ ]) \\
&\leqq \exp(-\sum_{k=n}^{N-1} \mathrm{P}[\ A_k \mid {A_{k+1}}^c\ ]) \ \to\ 0, \quad N\to\infty.
\end{aligned}$$

最右辺は (130) による．

これより，

$$\mathrm{P}[\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\ A_n\ ] = \mathrm{P}[\ \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\ ] = \lim_{n\to\infty}\lim_{N\to\infty}(1-\mathrm{P}[\ \Bigl(\bigcup_{k=n}^{N} A_k\Bigr)^c\ ]) = 1\,.$$

□

問 20 第２選択肢の場合の証明を確認せよ． ◇

A.4 マルコフ連鎖の遷移確率の漸近形．

A.4.1 $p_n(0,0)$ の漸近形．

共分散行列 $V=(V_{ij})_{1\leqq i,j\leqq d}$ を $V_{ij}=\sum_{x\in S} x_i x_j p_1(0,x)$ で定義する．ここで p_1 は 1 歩の推移確率 (14).

命題 59 *(i)* $\sum_{x\in\mathbb{Z}^d} x_i p_1(0,x)=0,\ i=1,\cdots,d,$ および $\operatorname{tr} V=\sum_{x\in\mathbb{Z}^d} |x|^2 p_1(0,x)<\infty.$

(ii) $V=(V_{ij})_{1\leqq i,j\leqq d}$ は対称正定値 *(* 特に，正則 *)*.

(iii) $t\in[-\pi/2,3\pi/2]^d\setminus\{0,\ (\pi,\cdots,\pi)\}$ ならば $|\varphi(t)|\neq 1$.
ここで φ は $p_1(0,x)$ の特性関数 *(28)*.

(iv) $\lim_{t\to 0}|t|^{-2}(\varphi(t)-(1-\frac{1}{2}t\cdot V\,t))=0,$ ここで $V\,t$ は行列とベクトルの積.

(v) $\lim_{n\to\infty}\varphi(t/\sqrt{n})^n=\exp(-\frac{1}{2}t\cdot V\,t),\ t\in\mathbb{R}^d.$

(vi) $|\varphi(t)|\leqq\exp(-\frac{1}{4}t\cdot V\,t),\ |t|<\delta,$ となる $\delta>0$ が存在する．

注 22 V の非負定値性は $\sum_{i,j}V_{ij}\xi_i\xi_j=\sum_x(\xi\cdot x)^2 p_1(0,x)\geqq 0$ から明らかだが，正定値性 *(* 正則性 *)* は，*random walk* が d 次元的に運動することを意味する．というのは，任意の $\mathbb{Z}^d$ の $d-1$ 次元部分加群 U に対して直交するベクトル ξ をとると，正則性から

$$\sum_{x\notin U}(\xi\cdot x)^2 p_1(0,x)=\sum_{i,j}V_{ij}\xi_i\xi_j>0$$

だから $q=\sum_{x\in U}p_1(0,x)<1$ となるが，マルコフ性から $\mathrm{P}_0[\,W_m\in U,\ m=1,\cdots,n\,]=q^n$ となるので，$\mathrm{P}_0[\,W_m\in U,\ m\in\mathbb{N}\,]=0$ を得る． ◇

証明． (i) 最初の性質は対称性 $p_1(0,x)=p_1(0,-x)$ から明らか．後の性質も，具体的に計算すると，$\sum_{x\in\mathbb{Z}^d}|x|^2 p_1(0,x)=1<\infty.$

(ii) 具体的に計算すると $V_{ij}=\delta_{ij}\frac{1}{d}$.

(iii) 具体形 (28) から $|\varphi(t)|=1$ となるのは $\cos t_i=1,\ i=1,\cdots,d,$ または $\cos t_i=-1,\ i=1,\cdots,d,$ のとき．主張の範囲では，前者は $t=0$，後者は $t=(\pi,\cdots,\pi)$ のとき．

(iv) (28) の具体形から，

$$|\varphi(t)-(1-\frac{1}{2}t\cdot V\,t)|\leqq\frac{1}{d}\sum_{i=1}^d|\cos t_i-1+\frac{1}{2}t_i^2|$$

だから主張が成り立つ.

(v) 上の結果で $t\mapsto t/\sqrt{n}$ として

$$\epsilon_n=n(1-\varphi(\frac{t}{\sqrt{n}}))-\frac{1}{2}t\cdot V\,t\to 0,\quad n\to\infty.$$

よって e の定義から主張を得る.

(vi) 上と同様に

$$\lim_{t\to 0}\frac{t\cdot V\,t}{|t|^2}(\frac{1-\varphi(t)}{t\cdot V\,t}-\frac{1}{2})=0\,.$$

これと V の対称正定値性から括弧内が極限で 0 になる.

$$\frac{1-|\varphi(t)|}{t\cdot V\,t}=\frac{(1-\varphi(t))\bar{\varphi}(t)+1-\bar{\varphi}(t)}{t\cdot V\,t(1+|\varphi(t)|)}$$

と $\lim_{t\to 0}\varphi(t)=1$ も用いれば，$\lim_{t\to 0}\frac{1-|\varphi(t)|}{t\cdot V\,t}=\frac{1}{2}$ ．これを $|x|\leqq e^{|x|-1}$ に用いればよい.

□

注 23 特性関数の漸近形は *(28)* の具体形を用いなくても証明できる．実際， $a(\xi)=e^{\sqrt{-1}\xi}-(1+\sqrt{-1}\xi-\frac{1}{2}\xi^2)=\int_0^{\xi}\int_0^s(1-e^{\sqrt{-1}u})du\,ds$ とおくと，$|1-e^{\sqrt{-1}u}|\leqq 2|\sin\frac{u}{2}|\leqq 2\wedge|u|$ から，$|a(\xi)|\leqq\xi^2(1\wedge\frac{|\xi|}{6})$，$\xi\in\mathbb{R}$．定義と第 1 の主張から

$$\varphi(t)-(1-\frac{1}{2}t\cdot V\,t)=\sum_{x\in\mathbb{Z}^d}a(t\cdot x)p_1(0,x)$$

となることと，ルベーグの収束定理から第 4 の主張を得る．

その他についても *[3, §6.4]* 参照. ◇

定理 60 $\mathbb{Z}^d$ 上の *simple random walk* について $n+\sum_{i=1}^d x_i$ が偶数のとき，

$$p_n(0,x)\sim 2/\sqrt{(2\pi n)^d\det V}=2\sqrt{\frac{d}{2\pi n}}^{\,d}\,.$$

注 24 奇数の時は 0 である．
これより，特に， $d\leqq 2$ のときは再帰的， $d>2$ ならば過渡的であることが分かる． *Walk* の，図形としての漸近的性質が，空間次元によって定性的にも定量的にも大きく変わる．

◇

証明．命題 22 で $A=[-\pi/2,3\pi/2]^d$ とおいて，$p_n(0,x)=I_1+I_2+I_3$ とわける．ここで，

$$\begin{aligned}
I_1&=(2\pi\sqrt{n})^{-d}\int_{|t|<\delta\sqrt{n}}e^{-\sqrt{-1}t\cdot x/\sqrt{n}}\varphi(t/\sqrt{n})^n dt_1\cdots dt_d\,,\\
I_2&=(2\pi\sqrt{n})^{-d}\int_{|t-(\pi,\cdots,\pi)\sqrt{n}|<\delta\sqrt{n}}e^{-\sqrt{-1}t\cdot x/\sqrt{n}}\varphi(t/\sqrt{n})^n dt_1\cdots dt_d\,,\\
I_3&=(2\pi)^{-d}\int_{\substack{\{t\in A\,|\,|t|\geqq\delta,\\ |t-(\pi,\cdots,\pi)|\geqq\delta\}}}e^{-\sqrt{-1}t\cdot x}\varphi(t)^n dt_1\cdots dt_d\,.
\end{aligned}$$

まず，具体形から $\varphi(t+(\pi,\cdots,\pi))=-\varphi(t)$ に注意すると，

$$I_2=(-1)^{n+\sum_{i=1}^d x_i}I_1$$

なので，

$$I_1+I_2=\begin{cases}2I_1\,, & n+\sum_{i=1}^d x_i \text{ が偶数,}\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

さらに，命題 59 の $|\varphi(t)|\leqq\exp(-\frac{1}{4}t\cdot V\,t)$, $|t|<\delta$, において，この右辺が $\mathbb{R}^d$ で可積分なことから優収束定理が使えることに注意すると，命題 59 の $\lim_{n\to\infty}\varphi(t/\sqrt{n})^n=\exp(-\frac{1}{2}t\cdot V\,t)$ から，

$$\lim_{n\to\infty}(2\pi\sqrt{n})^d I_1=\int_{\mathbb{R}^d}\exp(-\frac{1}{2}t\cdot V\,t)\,dt_1\cdots dt_d=\sqrt{\frac{(2\pi)^d}{\det V}}\,.$$

次に，命題 59 から

$$\eta=\sup\{|\varphi(t)|\mid t\in A,\ |t|\geqq\delta,\ |t-(\pi,\cdots,\pi)|\geqq\delta\}<1$$

に注意すると

$$\varlimsup_{n\to\infty}|I_3|\leqq\lim_{n\to\infty}\eta^n(2\pi\sqrt{n})^d=0$$

なので，定理を得る．

□

A.4.2 （２次元）三角格子上の simple random walk の再帰性．

§A.4.1 の応用を述べる．§2.3 では正方 (立方) 格子上の simple random walk，即ち，格子の辺に沿っての遷移のみを考えてきた．このような遷移確率の詳細が再帰性に影響しないことを（規則格子の範囲ではあるが）三角格子について調べる．

ベクトル $(1,0)$ と $(\frac12,\frac{\sqrt3}{2})$ が生成する加群の要素を頂点とし，各点から距離 1 の点全てに等確率で飛ぶマルコフ連鎖を三角格子上の simple random walk と言おう．

上の２つのベクトルをそれぞれ $(1,0)$ と $(0,1)$ に写像する斜交座標で格子点を $\mathbb{Z}^2$ と同一視すると，(斜交座標上の random walk の) $p_1(0,x)=\mathrm{P}_0[\,W_1=x\,]$ は

$$p_1(0,x)=\begin{cases}1/6, & x\in\{(\pm1,0),(0,\pm1),\pm(1,-1)\},\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

これについて (27) の特性関数 φ は

$$\varphi(t)=\frac13(\cos t_1+\cos t_2+\cos(t_1-t_2))$$

命題 22，命題 59 はそのまま成り立つ．特に， $|\varphi(t)|=1$ となるのは，具体形から，$t_1=t_2=0$ の場合のみ．また， $V_{11}=V_{22}=\dfrac23$, $V_{12}=V_{21}=-\dfrac13$．従って，定理 60 と同様に，次を得る[56]．

定理 61 三角格子上の *simple random walk* について，

$$p_n(0,x)\sim 1/\sqrt{(2\pi n)^2\det V}=\frac{\sqrt3}{2\pi n}\,.$$

注 25 *(i)* V で書いたときの定理 *60* の結果との違いは，n の偶数奇数に関係ないこと（これは，$t=(\pi,\cdots,\pi)$ で $|\varphi(t)|=1$ とならないことに由来），従って係数が半分になること，だけである．

(ii) 以上は斜交座標で書いた時の漸近形だが，右辺は x によらないので，座標とは関係ない結果である．（但し， x に関する一様性がないことは 定理 *60* のときに注意したとおり.）

(iii) 係数自体は正方格子の $p_n(0,x)\sim\dfrac{2}{\pi n}$ と異なるが，斜交座標だったことを思い出すと，単位面積当たりでは 2 倍になっている．これは上で注意した奇数時刻の因子 2 に対応している．

◇

Mean square displacement の exponent という言葉を定義したが，同様に， $p_n(0,0)$ の漸近形の n の指数に注目する．定理 60 から，再帰確率の指数は $-d/2$ となって，次元 d だけで決まる．これは正方格子の場合だが，三角格子でも -1 となって， $d=2$ の場合は格子の形によらない．証明をさかのぼれば，既約時間一様マルコフ性と空間的一様性と対称性があればこの指数は変わらないことが読みとれる．このような，確率連鎖の状態空間の形の詳細によらずに，次元などの大局的な幾何的な量だけで確率連鎖に関連する量の漸近形の指数が決まることを，理論物理用語で universality と呼ぶことがある．

三角格子の例は universality の簡単な例である．

このような性質が，例えばマルコフ性を落としても成り立つかどうか，というのが self-avoiding walk を考える重要な動機あるいは研究指針になる．

A.5 Basic facts related to weak convergence of probability measures.

定理 62 ([5, §5.4]) *(i) Let P_n, $n=1,2,3,\cdots$, be a sequence of Borel probability measures on reals, and P a Borel probability measure on reals. Then the following are equivalent (and if they hold then we say that P_n converges to P weakly as $n\to\infty$).*

(a) For all real valued, bounded, continuous function g on reals, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int g\,dP=\int g\,dP.$

(b) For all real valued, continuous function f on reals with compact support, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int f\,dP=\int f\,dP.$

(c) For all open set G, $\displaystyle\varliminf_{n\to\infty}P_n(G)\geqq P(G).$

[56] 以上については，各自確かめよ．

(d) *For all closed set* F, $\overline{\lim_{n\to\infty}} P_n(F) \leqq P(F)$.

(e) *For all Borel set* A *satisfying* $P(\partial A) = 0$, $\lim_{n\to\infty} P_n(A) = P(A)$, *where* $\partial A = A \cap A^c$ *denotes the boundary set of* A.

(ii) *Let* $\mathcal{M}$ *be a family of Borel probability measures on reals. A necessary and sufficient condition for* $\mathcal{M}$ *to be tight is*

$$(\forall \epsilon > 0)\ \exists F \subset \mathbb{R}:\ \textit{compact};\ (\forall n = 1, 2, 3, \cdots) P_n(F) > 1 - \epsilon.$$

(By tightness we mean that for any sequence in $\mathcal{M}$*, there exists a subsequence converging weakly to a Borel probability measure (not necessarily in* $\mathcal{M}$*.))*

(iii) *For a Borel probability measure on* P*, denote its characteristic function by* $\varphi_P(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{\sqrt{-1}\xi t} P(d\xi)$*, which is a complex valued function defined on reals, and satisfies* $|\varphi_P(t)| \leqq 1$, $t \in \mathbb{R}$*. Then the following hold.*

(a) *For* $a < b$,

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-\sqrt{-1}bt} - e^{-\sqrt{-1}at}}{-\sqrt{-1}t} \varphi_P(t)\, dt$$
$$= P((a,b)) + \frac{1}{2}(P(\{a\}) + P(\{b\})).$$

(Levi's inversion formula.)

(b) *Characteristic functions determine probability measure. Namely, if, for Borel probability measures* P *and* P', $\varphi_P = \varphi'_P$ *hold, then* $P = P'$.

(c) *For a sequence of Borel probability measures* P_n, $n = 1, 2, 3, \cdots$*, and a Borel probability measure* P,

i. *if* P_n *converges to* P *weakly, then* $\lim_{n\to\infty} \varphi_{P_n}(t) = \varphi_P(t)$ *uniformly in* t *on compact sets of reals, and*

ii. *if* $\lim_{n\to\infty} \varphi_{P_n}(t) = \varphi_P(t)$*, pointwise in* $t \in \mathbb{R}$*, then* P_n *converges to* P *weakly.*

(d) *For a sequence of Borel probability measures* P_n, $n = 1, 2, 3, \cdots$*, and for a function defined on reals* f*, if*

i. $f(t)$ *is continuous at* $t = 0$ *and* $\lim_{n\to\infty} \varphi_{P_n}(t) = f(t)$ *pointwise in* $t \in \mathbb{R}$*, or*

ii. *if* $\lim_{n\to\infty} \varphi_{P_n}(t) = f(t)$ *pointwise in* $t \in \mathbb{R}$ *and uniformly in a neighborhood of* $t = 0$,

then P_n *converges to a Borel probability measure* P*, and* $f = \varphi_P$.

A.6 Existence of density and its analytic properties from decay of characteristic function.

Here we focus on a sufficient condition for an exponential decay of a characteristic function, which implies existence of smooth density.

In the following, $\mathcal{U}$ denotes arbitrary set, not necessarily the one specified in the main sections. In particular, one may take $\mathcal{U} = \{1\}$ which results in the case of probability measures without parameters.

The next theorem says that positive variance implies that the absolute value of characteristic function is strictly less than 1 in a neighborhood of 0 .

定理 63 *Let* $\{P_u \mid u \in \mathcal{U}\}$ *be a family of Borel probability measures supported on non-negative reals, and for each* $u \in \mathcal{U}$*, let*

$$G_u(s) = \int_{[0,\infty)} e^{-s\xi} P_u(d\xi),$$

be its generating function, defined (according to 命題 *75) on* $\mathbf{Re(s)} \geqq \mathbf{0}$ *. Assume the following properties.*

(i) *There exists a positive constant* C *such that*

$$\sup_{u\in\mathcal{U}} G_u(-C) = \sup_{u\in\mathcal{U}} \int_0^\infty e^{C\xi} P_u(d\xi) < \infty.$$

(ii) The variances v_u, $u \in \mathcal{U}$ *satisfy* $v_- = \inf_{u\in\mathcal{U}} v_u > 0$.

Then there exists $a > 0$ *(independent of* $u \in \mathcal{U}$*) such that the characteristic functions* φ_u, $u \in \mathcal{U}$*, satisfy*

$$|\varphi_u(t)| < 1, \quad 0 < |t| \leqq a, \; u \in \mathcal{U}.$$

As an explicit choice of a*, one may take*

$$a = \sqrt{\frac{2}{v_+}} \wedge \frac{\epsilon}{K + m_+},$$

where $m_+ = \sup_{u\in\mathcal{U}} m_u$ *and* $v_+ = \sup_{u\in\mathcal{U}} v_u$ *are the superemums of the mean* m_u *and variance* v_u *of* P_u, $u \in \mathcal{U}$*, and* K *is a number such that*

$$\int_{|\xi|\geqq K} (\xi - m_u)^2 P_u(d\xi) \leqq \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}, \quad u \in \mathcal{U},$$

where

$$\epsilon = 2 \wedge \frac{v_-}{2(1+\sqrt{2}v_-)} \; (> 0).$$

(It holds that m_+, v_+*, and* K *exist (are finite), hence* a *chosen as above is positive.)*

For the case without parameters, i.e, for $\mathcal{U} = \{1\}$, the theorem reads as follows (with weaker assumptions; actually, the original theorem assumed more than necessary to simplify the statement).

系 64 *If a Borel probability measure on reals* P *has finite expectation* $m = \int \xi P(d\xi)$ *and non-zero variance* $v = \int (\xi - m)^2 P(d\xi)$*, then there exists* $a > 0$ *such that the characteristic function* φ_P *satisfies* $|\varphi_P(t)| < 1$, $0 < |t| \leqq a$.

As an explicit choice of constants, one may take $m_+ = m_u = m$ *and* $v_+ = v_- = v$ *in* 定理 *63*

証明. Note first that 命題 76 implies that m_+ and v_+ are finite.

Using Taylor's Theorem for real valued functions, we see that there exist functions $\theta_{u,1,t} : \mathbb{R} \to (0,1)$ and $\theta_{u,2,t} : \mathbb{R} \to (0,1)$ such that

$$\begin{aligned}
&e^{-\sqrt{-1}m_u t}\varphi_u(t) - 1 + \frac{1}{2}v_u t^2 \\
&= \int [\cos((\xi - m_u)t) - 1 + \frac{1}{2}t^2(\xi - m_u)^2 + \sqrt{-1}(\sin((\xi - m_u)t) - t(\xi - m_u))] P_u(d\xi) \\
&= \frac{t^2}{2} \int [(\xi - m_u)^2(1 - \cos(\theta_{u,1,t}(\xi)\,(\xi - m_u)t) - \sqrt{-1}\sin(\theta_{u,2,t}(\xi)\,(\xi - m_u)t))] P_u(d\xi).
\end{aligned}$$

Therefore

$$\begin{aligned}
&|\varphi_u(t)| - |1 - \frac{1}{2}v_u t^2| \leqq |e^{-\sqrt{-1}m_u t}\varphi_u(t) - 1 + \frac{1}{2}v_u t^2| \\
&\leqq \frac{1}{2}t^2 \int (\xi - m_u)^2 \sqrt{(1 - \cos(\theta_{u,1,t}(\xi)\,(\xi - m_u)t))^2 + (\sin(\theta_{u,2,t}(\xi)\,(\xi - m_u)t))^2} P_u(d\xi) \\
&\leqq \frac{1}{2}t^2 \Bigg(\sqrt{2} \int_{|\xi|\geqq K} (\xi - m_u)^2 P_u(d\xi) \\
&\quad + \int_{|\xi|<K} (\xi - m_u)^2 \sqrt{(1 - \cos(\theta_{u,1,t}(\xi)\,(\xi - m_u)t))^2 + (\sin(\theta_{u,2,t}(\xi)\,(\xi - m_u)t))^2} P_u(d\xi) \Bigg),
\end{aligned}$$

for any $K > 0$.

Let $\epsilon > 0$. 命題 76 implies that there exists $K > 0$ (independent of u) such that

$$\sqrt{2} \int_{|\xi|\geqq K} (\xi - m_u)^2 P_u(d\xi) < \epsilon, \quad u \in \mathcal{U}.$$

(For the case $\mathcal{U} = \{1\}$, this is implied by existence of variance, hence 命題 76 is unnecessary.) Put $t_0 = \dfrac{\epsilon}{K + m_+}$ (> 0). Note that this is independent of u. Then noting that

$$|\theta_{u,j,t}(\xi)\,(\xi - m_u)t| \leqq \epsilon, \quad |\xi| \leqq K, \; |t| \leqq t_0, \; j = 1, 2,$$

we have

$$\begin{aligned}&\int_{|\xi|<K}(\xi-m_u)^2\sqrt{(1-\cos(\theta_{u,1,t}(\xi)\,(\xi-m_u)t))^2+(\sin(\theta_{u,2,t}(\xi)\,(\xi-m_u)t))^2}P_u(d\xi)\\&\leqq\epsilon\sqrt{1+\frac14\epsilon^2}\int_{|\xi|<K}(\xi-m_u)^2P_u(d\xi)\leqq\epsilon\sqrt{1+\frac14\epsilon^2}v_+,\quad u\in\mathcal{U}.\end{aligned}$$

Combining all the estimates,

$$|\varphi_u(t)|-|1-\frac12 v_u t^2|\leqq\frac12\epsilon t^2\left(1+v_+\sqrt{1+\frac14\epsilon^2}\right),\ |t|\leqq t_0\,,\quad u\in\mathcal{U}.$$

Taking $\epsilon>0$ small enough so that

$$\epsilon\left(1+v_u\sqrt{1+\frac14\epsilon^2}\right)<v_u\,,\quad u\in\mathcal{U},\tag{131}$$

we have

$$|\varphi_u(t)|<1,\quad u\in\mathcal{U},\ 0<|t|\leqq t_0\wedge\sqrt{\frac{2}{v_+}}\,.$$

If, for example, we take

$$\epsilon=2\wedge\frac{v_-}{2(1+\sqrt2 v_-)}\ (>0)\,,$$

then (131) holds, because,

$$\epsilon\left(1+v_u\sqrt{1+\frac14\epsilon^2}\right)\leqq\epsilon\left(1+\sqrt2 v_u\right)\leqq\frac{v_u}{2}<v_u,$$

so that we can adopt this value. This leads to the explicit value of a in the statement. □

Let P be a Borel probability measure on reals, and let $\varphi_P(t)=\int e^{\sqrt{-1}\xi t}P(d\xi)$, $t\in\mathbb{R}$, be its characteristic function.

定理 65 *Assume the following.*

(i) P has finite expectation m and non-zero variance v.

(ii) φ_P satisfies $|\varphi_P(\lambda t)|\leqq|\varphi_P(t)|^b$, $t\in\mathbb{R}$, for constants $\lambda>1$ and $b>1$.

Then the following hold.

(i) There exists $C_1>0$ and $C_2>0$ such that

$$|\varphi_P(t)|\leqq C_2e^{-C_1|t|^\nu},\quad t\in\mathbb{R}\,,\tag{132}$$

where $\nu=\dfrac{\log b}{\log\lambda}$ (>0).

C_1 and C_2 can be chosen to be $C_2=\dfrac{1}{|\varphi_P(t_1)|}$ and $C_1=\left(\dfrac{\lambda}{a}\right)^\nu\log\dfrac{1}{|\varphi_P(t_1)|}$ for some $t_1\in[a/\lambda,a]$, and

$$a=\sqrt{\frac2v}\wedge\frac{\epsilon}{K+m}\,,$$

where

$$\begin{aligned}&K=\inf\left\{L>0\mid\int_{|\xi|\geqq L}(\xi-m)^2P(d\xi)\leqq\frac{\epsilon}{\sqrt2}\right\},\\&\epsilon=2\wedge\frac{v}{2(1+\sqrt2 v)}\,.\end{aligned}$$

(ii) There exists a non-negative valued C^∞ function ρ on $\mathbb{R}$ such that

(a) $P(d\xi) = \rho(\xi)d\xi$,

(b) $\lim_{|\xi|\to\infty} \rho(\xi) = 0$,

(c) ρ *is supported on* $[0, \infty)$.

定理 65 の証明. (i) Since dominated convergence theorem implies that $\varphi_P(t)$ is continuous, 系 64 implies that there exists $a > 0$ and t_1 satisfying $a/\lambda \leqq |t_1| \leqq a$ such that

$$\sup_{a/\lambda \leqq |t| \leqq a} |\varphi_P(t)| = |\varphi_P(t_1)| < 1\,.$$

Put $\nu = \dfrac{\log b}{\log \lambda}$ (> 0), and $h(t) = -|t|^{-\nu} \log |\varphi_P(t)|$, $t \in \mathbb{R}$. Then the assumptions imply

$$h(\lambda t) \geqq h(t),\ \ t \in \mathbb{R}.$$

For $|t| \geqq \dfrac{a}{\lambda}$, let n be the integer satisfying $\dfrac{a}{\lambda} \leqq |t|\lambda^{-n} < a$. Then

$$h(t) \geqq h(\lambda^{-n}t) = -b^n |t|^{-\nu} \log |\varphi_P(\lambda^{-n}t)| \geqq -b^n |t|^{-\nu} \log |\varphi_P(t_1)| \geqq -\left(\frac{\lambda t}{a}\right)^{\nu} |t|^{-\nu} \log |\varphi_P(t_1)|.$$

Therefore

$$|\varphi_P(t)| \leqq e^{-C_1 |t|^{\nu}},\quad |t| \geqq \frac{a}{\lambda}\,,$$

with $C_1 = \left(\dfrac{\lambda}{a}\right)^{\nu} \log \dfrac{1}{|\varphi_P(t_1)|}$. For $|t| \leqq \dfrac{a}{\lambda}$, a trivial estimate $|\varphi_P(t)| \leqq 1$ is sufficient for the statement to hold.

(ii) Since (132) implies that φ_P is integrable,

$$\rho(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-\sqrt{-1}t\xi} \varphi_P(t)\, dt,\quad \xi \in \mathbb{R},$$

exists, bounded and continuous. Riemann-Lebesgue theorem also implies $\lim_{|\xi|\to\infty} \rho(\xi) = 0$. Fubini's theorem and dominated convergence theorem implies, for $a < b$,

$$\begin{aligned}\int_a^b \rho(\xi)\, d\xi &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\sqrt{-1}bt} - e^{-\sqrt{-1}at}}{-\sqrt{-1}t} \varphi_P(t)\, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-\sqrt{-1}bt} - e^{-\sqrt{-1}at}}{-\sqrt{-1}t} \varphi_P(t)\, dt \\ &= P((a,b)) + \frac{1}{2}(P(\{a\}) + P(\{b\})).\end{aligned}$$

where we used Levi's inversion formula in the last line. Since the left hand side is continuous in a and b, we see that $P(\{a\}) = 0$, $a \in \mathbb{R}$, and $\rho(\xi)d\xi = P(d\xi)$. Since P is supported on $[0, \infty)$, so is ρ. The exponential decay of φ_P (132) also implies by induction in k, together with dominated convergence theorem, that

$$\frac{d^k \rho}{d\xi^k}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} (-\sqrt{-1}t)^k e^{-\sqrt{-1}t\xi} \varphi_P(t)\, dt$$

exists and is finite, for all $k = 1, 2, 3, \cdots$.

□

With extra assumptions on continuity and some bounds on φ_u, the consequences of 定理 65 can be made uniform in u.

定理 66 *Let, as in 定理 63, $\{P_u \mid u \in \mathcal{U}\}$ be a family of Borel probability measures supported on non-negative reals, and assume the following.*

(i) *The assumptions of 定理 65 hold for $P = P_u$ for each $u \in [0, 1]$.*

(ii) *The variances v_u, $u \in \mathcal{U}$ satisfy $v_- = \inf_{u\in\mathcal{U}} v_u > 0$.*

(iii) The consequence of 定理 *63 holds; namely, there exists $a > 0$ (independent of $u \in \mathcal{U}$) such that the characteristic functions φ_u , $u \in \mathcal{U}$, satisfy*

$$|\varphi_u(t)| < 1, \quad 0 < |t| \leqq a, \ u \in \mathcal{U}.$$

(iv) $\varphi_u(t)$ is continuous in $(u,t) \in [0,1] \times \mathbb{R}$.

Then the constants ν, C_1, C_2 in (132) can be chosen to be independent of $u \in [0,1]$.

In particular,

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}} \sup_{u \in [0,1]} \rho_u(\xi) < \infty.$$

証明. We proceed with our proof by reconsidering the proof of 定理 65 with extra attention on uniformity of bounds in u.

定理 63 and the continuity of $\varphi_u(t)$ in (u,t) implies that there exist $a > 0$ and t_1 and u_1 , satisfying $a/\lambda_u \leqq |t_1| \leqq a$ and $0 \leqq t_1 \leqq 1$, such that

$$\sup_{a/\lambda_u \leqq |t| \leqq a,\ u \in [0,1]} |\varphi_u(t)| = |\varphi_{u_1}(t_1)| < 1\,.$$

Put $\rho = |\varphi_{u_1}(t_1)|$.

For each $u \in [0,1]$, put $\nu_u = \dfrac{\log 2}{\log \lambda_u}$ (> 0), and $h_u(t) = -|t|^{-\nu_u} \log |\varphi_u(t)|$, $t \in \mathbb{R}$. Then the assumptions imply

$$h_u(\lambda_u t) \geqq h_u(t), \ t \in \mathbb{R}.$$

For $|t| \geqq \dfrac{a}{\lambda_u}$, let n be the integer satisfying $\dfrac{a}{\lambda_u} \leqq |t| \lambda_u^{-n} < a$. Then

$$h_u(t) \geqq h_u(\lambda_u^{-n} t) = -2^n |t|^{-\nu_u} \log |\varphi_u(\lambda_u^{-n} t)| \geqq 2^n |t|^{-\nu_u} (-\log \rho) \geqq \left(\frac{\lambda_u t}{a}\right)^{\nu_u} |t|^{-\nu_u} \log \frac{1}{\rho}.$$

Therefore

$$|\varphi_u(t)| \leqq e^{-C_1 |t|^{\nu_-}}, \quad |t| \geqq \frac{a}{\lambda_-}, \ u \in [0,1],$$

where $\nu_- = \inf_{u \in [0,1]} \nu_u$, $\lambda_- = \inf_{u \in [0,1]} \lambda_u$, and $C_1 = \left(\dfrac{\lambda_-}{a}\right)^{\nu_-} \log \dfrac{1}{\rho}$, are positive constants independent of u.

For $|t| \leqq \dfrac{a}{\lambda_-}$, a trivial estimate $|\varphi_u(t)| \leqq 1$ is sufficient for the statement to hold.

The claim $\sup_{\xi \in \mathbb{R}} \sup_{u \in [0,1]} \rho_u(\xi) < \infty$ is an easy consequence of the inversion formula

$$\rho_u(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-\sqrt{-1}\xi t} \varphi_u(t)\, dt$$

and the uniform estimate we have just proved. □

A.7 抵抗回路網と Dirichlet form と最小発熱の原理.

§2.5 で紹介したグリーン関数

$$G(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{P}_x[\, W_n = y\,] = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x,y), \quad x, y \in \mathbb{Z}^d,$$

は (34) ($(\Delta G)(x,y) = -\delta_{x,y}$) を満たす．ここで ΔG は (33) で定義した離散ラプラス演算子 $(\Delta f)(x) = \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} p_1(x,z)(f(z) - f(x))$ である．(34) を一般化して，以下の問題を考える [7][57] .

$\mathbb{Z}^d$ を一般化して高々可算個の点 G を考え，$x \in G$ から $y \in G$ への遷移確率 $p_1(x,y)$ を一般化して，対称非負値 $g(x,x) = 0$, $x \in G$, なる g : $G \times G \to \mathbb{R}$ を考える．G と g が定義するグラフ (G を頂点の集

[57] Green 関数は transient なときしか存在しないから，(34) を一般化した，という言い方は抵抗がある．以下の電流問題で，集合 A を「無限遠点」に飛ばした極限の場合の $I = R\,\mathrm{grad}\,v$ のポテンシャル v が G という関係，という意味の一般化.

合， $B=\{(x,y)\in G\times G\mid g(x,y)>0\}$ を辺の集合とするグラフ）は連結とする．向きを入れて定義したが，実際は g の対称性から，

$$(x,y)\in B \ \Leftrightarrow\ (y,x)\in B. \tag{133}$$

(G,g) に対応する Dirichlet form を， $f:\ G\to\mathbb{R}$ に対して

$$\mathcal{E}(f,f)=\frac{1}{2}\sum_{x\in G}\sum_{y\in G}g(x,y)(f(x)-f(y))^2$$

とおいて定義する．さらに $h:\ G\to\mathbb{R}$ に対して

$$\mathcal{E}(f,h)=\frac{1}{2}\sum_{x\in G}\sum_{y\in G}g(x,y)(f(x)-f(y))(h(x)-h(y))$$

とすれば $\mathcal{E}(\cdot,\cdot)$ は双線形になる．

$\mathcal{E}(f,f)$ は，電位分布が f，$(x,y)\in B$ の抵抗が $g(x,y)$ のときの（仮想的な）発熱（ジュール熱）を与えている．

$A,D\subset G$, $A\cap D=\emptyset$, に対して，A と D の間の実効抵抗 (effective resistance) を

$$R(A,D)^{-1}=\inf\{\mathcal{E}(f,f)\mid f|_A=0,\ f|_D=1\}$$

で定義する．この式の境界条件を満たす $f:\ G\to\mathbb{R}$ を potential 問題 $pot(G,A,D)$ の feasible potential, この式の inf を与える $f=u_G$ を $pot(G,A,D)$ の optimum potential と言う．Optimal potential は存在すればただ一つであることを示す．[58]

$N(x)=\{y\in G\mid (x,y)\in B\}$ とおき，$J:\ B\to\mathbb{R}$ に対して $(\operatorname{div}J)(x)=\displaystyle\sum_{y\in N(x)}J(x,y)$ と書く．A から D への G の電流とは，$I:\ B\to\mathbb{R}$ であって，$I(x,y)=-I(y,x)$, $(x,y)\in B$, かつ， $x\notin A\cup D$ のとき $(\operatorname{div}I)(x)=0$ なるものを言う．I の全電流は $T(I,A,B)=\sum_{x\in A}\operatorname{div}I(x)=-\sum_{x\in D}\operatorname{div}I(x)$ である．最後の等号は I の反対称性と (133) から $\displaystyle\sum_{x\in G}\operatorname{div}I(x)=0$ となることから．

$f:\ G\to\mathbb{R}$ に対して $(\Delta f)(x)=\sum_{x\in G}g(x,y)(f(y)-f(x))$ とおく (差分 Laplacian).

命題 67 (最小発熱の原理１) *A,D が空でないとき，$pot(G,A,D)$ の feasible potential であって，$\Delta v(x)=0$, $x\notin A\cup D$ を満たす v が存在することを仮定する．このとき， v は $pot(G,A,D)$ の optimum potential, 即ち， $R(A,D)^{-1}=\mathcal{E}(v,v)$ である．Optimum potential は v に限る．*

証明．$f:\ G\to\mathbb{R}$ に対して $\operatorname{grad}f(x,y)=g(x,y)(f(y)-f(x))$ と書くと，$\operatorname{div}\operatorname{grad}f=\Delta f$ である．仮定から $I=\operatorname{grad}v$ は A から D への電流になる．

u を $pot(G,A,D)$ の feasible function とすると，

$$\mathcal{E}(u,v)=\frac{1}{2}\sum_{x\in G}\sum_{y\in N(x)}(u(y)-u(x))I(x,y)=-\sum_{x\in G}u(x)\operatorname{div}I(x)=-\sum_{x\in D}\operatorname{div}I(x), \tag{134}$$

となるが，右辺は u によらないから，特に $\mathcal{E}(u,v)=\mathcal{E}(v,v)$．よって

$$\mathcal{E}(u,u)-\mathcal{E}(v,v)=\mathcal{E}(u-v,u-v)+2\mathcal{E}(u-v,v)=\mathcal{E}(u-v,u-v)\geqq 0.$$

よって， v は optimum potential である．

等号は B の連結性から $u-v$ が G 上一定のときのみ．$A\cap D$ では $u=v$ だから $u=v$．即ち，optimum potential はただ一つしかない． □

電流 I によるエネルギー損失を

$$E(I,I)=\frac{1}{2}\sum_{(x,y)\in B}g(x,y)^{-1}I(x,y)^2$$

で定義する．

命題 68 (最小発熱の原理２) *$R(A,D)=\inf\{E(I,I)\mid I$ は A から D への電流で全電流 $1\}$*
$I=R(A,B)\operatorname{grad}v$ は右辺の infimum を与える唯一の A から D への全電流 1 の電流.

[58] g の漸近的振る舞いについての適当な仮定の下で存在も言えると思うが，無条件かどうかが分からなかったので，存在については今回は触れないことにする．有限系なら問題ない．

証明. $I = R(A,B)\,\mathrm{grad}\, v$ が A から D への G の電流であることは v の定義から明らか. I の全電流は (134) から,

$$T(I,A,B) = -\sum_{x\in D} \mathrm{div}\, I(x) \frac{1}{2} \sum_{x\in G} \sum_{y\in N(x)} (v(y)-v(x)) I(x,y) = R(A,B)\mathcal{E}(v,v) = 1\,.$$

J も A から D への電流で全電流 1 とすると

$$E(I,J) = R(A,D)\frac{1}{2} \sum_{(x,y)\in B} (v(y)-v(x))J(x,y) = -R(A,D) \sum_{x\in G} v(x)\,\mathrm{div}\, J(x) =$$
$$= -R(A,D) \sum_{x\in D} \mathrm{div}\, J(x) = R(A,D)$$

なので, $E(I,I) = E(I,J)$. よって, $E(J,J) - E(I,I) = E(I-J, I-J) \geqq 0$ となるから, I は命題の右辺を最小にする. しかも, 等号は $I = J$ が B 上で成り立つときだから I はただ一つに決まる. □

2つの命題から $R(A,B)$ を上下から bound することができる. フラクタルなどのようにフーリエ級数が使えないけれども, 自己相似性があるときにこの手法は有効になる.

G 上の randomw walk との関係については §5.3 も参照.

A.8 Subadditivity argument.

定理 69 非負実数列 $\{a_n\}$ が $a_{n+m} \leqq a_n + a_m$, $n, m \geqq 1$, を満たせば,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} a_n\,.$$

即ち, 特に, 極限が存在する.

証明. N を自然数とすると任意の自然数 n に対して, $n = Nk + r$ となる $r \in \{1,\cdots,N\}$ と非負整数 k が唯一存在する. 仮定から

$$\frac{1}{n}a_n \leqq \frac{k}{n}a_N + \frac{1}{n}a_r \leqq (1-\frac{r}{n})\frac{1}{N}a_N + \frac{1}{n}\max\{a_1,\cdots,a_N\} \leqq \frac{1}{N}a_N + \frac{1}{n}\max\{a_1,\cdots,a_N\}\,.$$

よって,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n}a_n \leqq \frac{1}{N}a_N\,, \quad N \in \mathbb{N},$$

だから,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n}a_n \leqq \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}a_n$$

となるので両者は等しく, 従って $\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{1}{n}a_n$ とも等しくなるので, 極限が存在して主張の右辺に等しい. □

A.9 固定点への収束の速さ（微分写像の固有値の絶対値が 1 でない場合）.

この節は 命題 44 で用いる.

命題 70 d を自然数とし, $\vec{\Phi}:\ \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ は $\vec{a} \in \mathbb{R}^d$ を固定点 ($\vec{\Phi}(\vec{a}) = \vec{a}$) にもつ写像で,

$${}^t\vec{\Phi}(\vec{x}) = {}^t\vec{a} + B\,{}^t(\vec{x}-\vec{a}) + {}^t\vec{\theta}(\vec{x}-\vec{a}), \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^d,$$

と書けるとする. ここで, B は $d\times d$ 行列で正則行列 P で対角化可能 : $P^{-1}BP = \mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_d)$ とし, 固有値はいずれも絶対値が 1 と異なるとする. また, $\vec{\theta}:\ \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ は, $C_1 > 0$ が存在して, $|\vec{x}-\vec{a}| \leqq 1$ を満たす $\vec{x} \in \mathbb{R}^d$ に対して

$$|\vec{\theta}(\vec{x}-\vec{a})| < C_1 |\vec{x}-\vec{a}|^2, \tag{135}$$

を満たすとする. ($|\cdot|$ はユークリッド距離 (ℓ^2 ノルム) とする.)

このとき, $\vec{X}_n = \vec{\Phi}^n$ ($\vec{\Phi}$ の n 回合成), $n \in \mathbb{Z}_+$, に対して, もし, $\lim_{n\to\infty} \vec{X}_n(\vec{x}) = \vec{a}$ ならば,

$$|\vec{X}_n(\vec{x}) - \vec{a}| \leqq C\rho^n, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

を満たす定数 $C > 0$ と $0 < \rho < 1$ がとれる（$\vec{x}$ によるかもしれないが n によらない）.

証明. $\mathbb{R}^d$ を $\vec{\Phi}$ の $\vec{a}$ における接写像 (B が定義する写像) に関して安定部分空間 V_s と不安定部分空間 V_u に分解する：$\mathbb{R}^d = V_s \oplus V_u$．ここで，$V_s$ は絶対値が 1 より大きい B の固有値に対応する固有ベクトルが張る空間，V_u は絶対値が 1 より小さい固有値に対する空間である．B の V_s, V_u への制限を B_s, B_u とする．

$\vec{x} \in \mathbb{R}^d$ に対して

$$|\vec{x}|^* = |P^{-1}\vec{x}|,$$

$$|\vec{x}|_o = \max\{|\vec{x}_s|^*, |\vec{x}_u|^*\},$$

とおくと，$|\cdot|^*, |\cdot|_o$ はノルムになる．さらに $d \times d$ 行列 A に対して

$$\|A\|^* = \sup_{|\vec{x}|^*=1} |A\vec{x}|^*$$

と定義する．$\alpha = \|B_s\|^* \vee \left\|B_u^{-1}\right\|^*$ とおくと，仮定より $\alpha < 1$ なので，$\alpha + \kappa < 1$ を満たす $\kappa > 0$ がとれる．このとき (135) から $0 < \delta < 1$ なる δ がとれて

$$|\vec{\theta}(\vec{x} - \vec{a})|_o < \kappa |\vec{x} - \vec{a}|_o, \quad |\vec{x} - \vec{a}|_o < \delta.$$

仮定から，自然数 n_0 が存在して，

$$|\vec{X}_n(\vec{x}) - \vec{a}|_o < \delta, \quad n \geqq n_0 \,.$$

$\vec{x}_0 = \vec{X}_{n_0}(\vec{x})$ とおく．$\vec{x}_0 = \vec{a}$ ならば主張の結論は自明に成り立つので，以下，$\vec{x}_0 \neq \vec{a}$ を仮定する．

$$\vec{\Phi}(\vec{x}_0) - \vec{a} = (\vec{\Phi}(\vec{x}_0) - \vec{a})_s + (\vec{\Phi}(\vec{x}_0) - \vec{a})_u$$

において，

$$|(\vec{\Phi}(\vec{x}_0) - \vec{a})_s|^* \leqq \|B_s\|^* \, |(\vec{x}_0 - \vec{a})_s|^* + \kappa |\vec{x}_0 - \vec{a}|_o \leqq (\alpha + \kappa)|\vec{x}_0 - \vec{a}|_o.$$

仮に，$|\vec{x}_0 - \vec{a}|_o = |(\vec{x}_0 - \vec{a})_u|^*$ とすると，

$$|(\vec{\Phi}(\vec{x}_0) - \vec{a})_u|^* \geqq (\alpha^{-1} - \kappa)|\vec{x}_0 - \vec{a}|_o > (\alpha + \kappa)^{-1}|\vec{x}_0 - \vec{a}|_o$$

となるので，帰納的に，

$$|\vec{X}_n(\vec{x}_0) - \vec{a}|_o \geqq (\alpha + \kappa)^{-n}|\vec{x}_0 - \vec{a}|_o\,, \quad n \in \mathbb{N},$$

となるが，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} (\alpha + \kappa)^{-n} = \infty$ となるから矛盾．よって $|\vec{x}_0 - \vec{a}|_o = |(\vec{x}_0 - \vec{a})_s|^*$.

同様に $|\vec{\Phi}(\vec{x}_0) - \vec{a}|_o = |(\vec{\Phi}(\vec{x}_0) - \vec{a})_s|^*$ となるので，$|\vec{\Phi}(\vec{x}_0) - \vec{a}|_o \leqq (\alpha + \kappa)|\vec{x}_0 - \vec{a}|_o$．$\rho = \alpha + \kappa$ とおくと，$0 < \rho < 1$ であって，帰納的に，

$$|\vec{X}_n(\vec{x}_0) - \vec{a}|_o \leqq \rho^n |\vec{x}_0 - \vec{a}|_o, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

となるので，主張を得る．

□

A.10 行列の積の収束に関するある補題．

次の補題は 命題 45 で用いる．

補題 71 ([31, Lemma (3.1)]) $N \times N$ 行列 A, A_n $n = 1, 2, \cdots$, に対して，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \|A_n - A\| < \infty$，かつ，$A$ は正則行列 P で対角化されて，固有値は非負で，固有値の最大値 λ_1 は正とする．*(* $\|\cdot\|$ は，行列の標準的なノルム，即ち，$\|AB\| \leqq \|A\|\,\|B\|$ を満たし，対角行列に対してはその固有値の絶対値のうち最大の値を与えるノルム．*)*

このとき，

$$\lim_{m\to\infty} \varlimsup_{n\to\infty} \left\| \lambda_1^{-n} (A_{n+m} A_{n+m-1} \cdots A_{m+1}) - Q \right\| = 0\,. \tag{136}$$

ここで，Q は $P^{-1}QP = \mathrm{diag}(q_1, \cdots, q_N)$，かつ，$(P^{-1}AP)_{ii} = \lambda_1$ のとき $q_i = 1$，そうでなければ $q_i = 0$ となる行列である．

さらに，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \lambda_1^{-n} A_n \cdots A_1$ が存在する．

証明. 先ず,

$$\lambda_1{}^{-n}\|A_n\cdots A_1\| \leqq \|P\|\left\|P^{-1}\right\|\prod_{k=1}^{n}(\lambda_1{}^{-1}\left\|PAP^{-1}\right\| + \lambda_1{}^{-1}\left\|P(A_k-A)P^{-1}\right\|)$$
$$\leqq \|P\|\left\|P^{-1}\right\|\exp\left(\lambda_1{}^{-1}\|P\|\left\|P^{-1}\right\|\sum_{k=1}^{n}\|A_k-A\|\right),\quad n\in\mathbb{Z}_+.$$

さらに,

$$\lambda_1{}^{-n}\|A_{m+n}\cdots A_{m+1}-A^n\| \leqq \lambda_1{}^{-n}\sum_{k=1}^{n}\left\|P^{-1}(PAP^{-1})^{n-k}P(A_{m+k}-A)A_{m+k-1}\cdots A_{m+1}\right\|$$
$$\leqq \lambda_1{}^{-n}\|P\|^2\left\|P^{-1}\right\|^2\sum_{k=1}^{n}\|A_{m+k}-A\|\exp\left(\lambda_1{}^{-1}\|P\|\left\|P^{-1}\right\|\sum_{\ell=1}^{k}\|A_{m+\ell}-A\|\right),\quad n,m\in\mathbb{Z}_+.$$

これより,A の 2 番目に大きい固有値を λ_2 $(<\lambda_1)$ とおくと,

$$\begin{aligned}&\left\|\lambda_1{}^{-n}A_{m+n}\cdots A_{m+1}-Q\right\|\\ &\leqq \lambda_1{}^{-n}\|P\|^2\left\|P^{-1}\right\|^2\left(\sum_{k=m+1}^{\infty}\|A_k-A\|\right)\exp\left(\lambda_1{}^{-1}\|P\|\left\|P^{-1}\right\|\sum_{\ell=m+1}^{\infty}\|A_\ell-A\|\right)\\ &+\|P\|\left\|P^{-1}\right\|\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n.\end{aligned}$$

よって (136) を得る.(136) から

$$\lim_{m\to\infty}\overline{\lim_{n\to\infty}}\left\|\lambda_1{}^{-n}A_n\cdots A_2A_1-\lambda_1{}^{-m}QA_m\cdots A_1\right\|=0\,.$$

を得るので,$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\lambda_1^{-n}A_n\cdots A_1$ が存在する.

□

問 21 補題 *71* の $\|\cdot\|$ と $N\times N$ 行列の列 $B_m,\ m\in\mathbb{Z}_+,$ に対して

$$\lim_{m\to\infty}\overline{\lim_{n\to\infty}}\|B_n-B_m\|=0$$

が成り立てば,$\displaystyle\lim_{n\to\infty}B_n$ が存在することを証明せよ. ◇

A.11 SAW の mean square displacement の指数に関する Flory の議論.

化学者 P. J. Flory が 1949 に与えた議論である.この節は,全く正当化されていない,いい加減な話「しか」ない!結論は偶然あっていただけという意見がある上,$d=3$ では間違っていると言われている.しかし,精密かつ厳密な話が全て複雑な上に,低次元では分かっていることがほとんどないという SAW の状況では,研究上の目標ないしは作業仮説(何を思っているのか)を示す点で教育的であろう.厳密な話ではないことを,どう受け止めるかが難しいかもしれない.

この節に限り,$\sim$ はその都度都合良く解釈する.Flory の値 $\nu_F\approx\nu$ を次のように定める.
d 次元 simple random walk が n 歩で x にいる確率 $p_n(0,x)$ は (40) より,$\mathrm{P}_0[\,w(n)=x\,]=p_n(0,x)\sim n^{-d/2}\exp(-|x|^2/n)$ であった.(Flory の議論と同程度の直感的議論による導出を下記に補足する.)この P は SRW の確率.$|x|=L$ となる x について和をとると,

$$\bar p(n,L)=\mathrm{P}_0[\,|w(n)|=L\,]\sim L^{d-1}n^{-d/2}\exp(-L^2/n).$$

(指数しか問題にしないので,L の正べきがあることは重要だが,$d-1$ 乗であること自体は重要ではない.)
SAW では, SRW に比べて小さな L で大きな n の path が少ないはずである.なぜなら,そのような SRW は自己交差が多いだろうから.どの程度減るか?n 個の点を L^d の範囲に一様分布に従って独立にばらまいたとき,一つも重ならない確率は

$$\prod_{k=1}^{n}(1-(k-1)L^{-d})\sim\exp(-L^{-d}\sum_{k=1}^{n}(k-1))\sim\exp(-n^2/(2L^d))=\exp(-V(n,L)).$$

即ち， n 歩で $|x| \approx L$ 程度の範囲に SAW がいる確率は $\exp(-V(n,L))\bar{p}(n,L)$ の程度である．(物理では，この対数

$$F_n(L) = -\log \bar{p}(n,L) + V(n,L) = -(d-1)\log L + \frac{d}{2}\log n + \frac{L^2}{n} + \frac{n^2}{2L^d}$$

を自由エネルギーとよぶ.) SAW が n 歩で到達する範囲 L の推量値 $L_F(n)$ として，$n \gg 1$ で確率最大（自由エネルギー最小）となる L をとるのが妥当だろう：

$$-\frac{(d-1)}{L_F(n)} + \frac{2L_F(n)}{n} - \frac{dn^2}{2L_F(n)^{d+1}} = 0\,.$$

そのとき ν の推量値 ν_F が $L_F(n) \sim n^{\nu_F}$ で決まる：

$$(d-1)n^{1-2\nu_F} + \frac{d}{2}n^{3-(d+2)\nu_F} = 2,\quad n \gg 1\,.$$

$1 < L < n$ だから $0 \leqq \nu_F \leqq 1$ だが，左辺が発散しないためにはさらに $\nu_F \geqq \frac{3}{d+2} \vee \frac{1}{2}$. もしさらに $\nu_F > \frac{3}{d+2} \vee \frac{1}{2}$ だと左辺が漸近的に 0 になるのでこれも不可．よって

$$\nu_F = \frac{3}{d+2} \vee \frac{1}{2} = \begin{cases} \dfrac{3}{d+2}, & d < 4, \\ \dfrac{1}{2}, & d \geqq 4\,. \end{cases} \tag{137}$$

予想されている値 §3.2.1 と極めて近いことは注目に値する．

$d = 4$ が境目の次元になっている点も重要である．$d > 4$ では V の項が効かないので， 1/2 の値は SRW の指数を再現している．即ち，$d > 4$, $n \gg 1$ では self-avoiding の効果が指数には影響しない．つまり元々 SRW 自体が長い歩数をかけて自分自身に戻ってくることがないことを表す.

上の議論では (40) の漸近形の具体形 $P_0[\,w(n) = x\,] \sim n^{-d/2}\exp(-|x|^2/n)$ を用いた．ν_F の算出に効いたのは指数関数の部分である．この形を直感的に，しかも，フラクタル次元 d_f，SRW の次元 (mean square displacement の指数の逆数) d_w が定まっていて，１点からの分岐数が上下に有界なフラクタル格子上の SAW で成り立つ一般形で導出する．(以下の導出は，証明されているケースでは証明の構造をなぞっているという意味で，正しい直感である.)

n を固定して x を $L = |x| \gg n^{1/d_w}$ にとる．即ち，SRW のうち遠くに押し出されている path を考える．(ここは SAW ではなく SRW の遷移確率を考えている．L が小さいところは $|x| = L$ 依存性はあまりないことが予想されるので，L の大きいところで上記漸近形を得たい．) この path は典型的には距離 ℓ_0 程度のスケール以下 $\ell \leqq \ell_0$ では「普通に」ふらふらする確率が高く，$\Delta n \sim \Delta\ell^{d_w}$ のように動き，それより大きいスケールでは $L \gg n^{1/d_w}$ なのでまっすぐ進むだろう．即ち， $n \sim L/\ell_0 \cdot \ell_0^{d_w}$. これより，$\ell_0 \sim (n/L)^{1/(d_w-1)}$ と定まる．

L/ℓ_0 箇所の分岐点でまっすぐ進む選択をしているので，その都度分岐数 c の逆数だけ確率を損しているから，$p(n,x) \sim c^{-(L/\ell_0)}$. これに ℓ_0 の推定値を代入すると，

$$p(n,x) \sim C(n)\exp\{-C'(|x|n^{-1/d_w})^{2r}\},\quad r = d_w/(2d_w-2)\,.$$

$\mathbb{Z}^d$ 上の SRW では $d_w = 2$, $d_f = d$ なので，(40) を再現する．

SAW については，これより $\bar{p}(n,L) = P_0[\,|w(n)| = L\,] = L^{d_f-1}p(n,x)|_{|x|=L}$ も定まるので，ν_F を定める議論は上記と同様に (L によらない項は無視して)

$$F_n(L) = -\log \bar{p}(n,L) + V(n,L) = -(d_f-1)\log L + \left(\frac{L}{n^{1/d_w}}\right)^{2r} + \frac{n^2}{2L^{d_f}}$$

を最小化する $L = n^{\nu_F}$ を求めればよい [36]：

$$\nu_F(r) = 2\frac{1+r/d_w}{d_f+2r} \vee \frac{1}{d_w},\quad r = d_w/(2d_w-2)\,.$$

$d = 2,3,4$ における d 次元 Sierpiński gasket($d_f = \log(d+1)/\log 2$, $d_w = \log(d+3)/\log 2$) 上の self avoiding walk の厳密かつ正確な値 [31, 32, 37] と比べてみるのも一興かと思う．

d	$\nu(dSG)$	$\nu_F(r)$	$\nu_F(1)$	$\nu_F(r)/\nu(dSG)-1$	$\nu_F(1)/\nu(dSG)-1$	$1/d_w$
2	0.79862	0.824937	0.798154	3.3%	–0.06%	0.43067656
3	0.67402	0.724588	0.693426	7.5%	2.9%	0.38685281
4	0.6003	0.658877	0.6275936	9.8%	4.5%	0.35620719

($\nu(2SG) = \frac{\log 2}{\log(7-\sqrt{5})/2}$，$\nu(3SG)$ は 12 次?多項式の根．)

Flory の値は，$\mathbb{Z}^d$ のときは $d=3$ でも 1.7% しか誤差がないと期待されているのに対して，dSG ではそこまで成績がよくない．d とともに悪化している．$r=1$ とおくことは根拠がないが，そのほうがよい．$d_w > 2$ なので $r < 1$，よって，空間次元が上がって SRW に近づくほど r を RW の本来の値より大きくしないといけないことになる．理由は分かっていないが，Sierpiński gasket は原点を含む任意の有限体積に対して，2 個の点をうまく選んでそこで gasket を切れば，与えられた有限体積を含む領域と無限遠点を切り離せるので，SAW は SRW に比べて著しく戻りにくい（ℓ_0 内でも $1/d_w$ ほどの指数が持てない）のかもしれない．

B Uniform weak convergence of probability measures on positive reals, which are defined by iteration.

[59]

B.1 Main results.

A notion of uniform weak convergence of probability measures on reals are defined, and an example is presented. The example is based on properties of (i) probability measures supported on non-negative reals, (ii) analytic properties of generating functions, and (ii) iterative definitions. Many of the results in the example are along the line of [42, §3]. Emphasis on uniformness of convergences with respect to a parameter is the main new ingredient.

B.1.1 Uniform convergence of a sequence of analytic functions defined by iteration.

Let λ_u, $u \in \mathcal{U}$, be real numbers indexed by a parameter set $\mathcal{U}$ with a property

$$\lambda_- = \inf_{u\in\mathcal{U}} \lambda_u > 1\,.$$

Let $g_{n,u}$ be complex valued functions of complex variables indexed by $n = 1, 2, 3, \cdots$ and $u \in \mathcal{U}$, satisfying the following:

(i) There exist positive constants C and M, such that for any $u \in \mathcal{U}$, $g_{1,u}(s)$ is regular on $|s| \leqq C$, and satisfies

$$|g_{1,u}(s) - s| \leqq M|s|^2, \quad |s| \leqq C. \tag{138}$$

(By a function being regular on a (not necessarily open) set, we imply that there exists an open set containing the original set such that the function is defined and regular on the open set. Estimate of a form (138) always exists for a function regular and vanishing at 0, but we are also interested in estimates uniform in $u \in \mathcal{U}$.)

(ii) For $u \in \mathcal{U}$ and $n = 1, 2, 3, \cdots$,

$$g_{n+1,u}(s) = g_{1,u}(\lambda_u g_{n,u}(s/\lambda_u)), \tag{139}$$

wherever the right hand side is defined and regular.

We prove that the above assumptions imply the following regularity estimates on $g_{n,u}$, uniform in n and u.

定理 72 *There exist positive constants C_∞ and M_∞ such that for any $u \in \mathcal{U}$ and any $n = 1, 2, 3, \cdots$, $g_{n,u}(s)$ is regular on $|s| \leqq C_\infty$, and satisfies*

$$|g_{n,u}(s) - s| \leqq M_\infty |s|^2, \quad |s| \leqq C_\infty. \tag{140}$$

定理 72 implies that the family of regular functions

$$\{g_{n,u} \mid n = 1, 2, 3, \cdots,\ u \in \mathcal{U}\}$$

is normal on $|s| < C_\infty$. This is due to the following.

[59] regular.tex, ver. 20010110.

定理 73 ([4, §XI.3, Theorem XI.3]) *A family of uniformly bounded regular functions on a domain is normal. Namely, for any sequence of functions in the family, there exists a subsequence which is uniformly converging (to a regular function on the domain) on every compact sets.*

The defining recursion (139) furthermore implies the following.

定理 74 *(i) Assume that $\{g_{n,u}\}$ satisfies the assumptions given in the beginning of §B.1.1. Then for each $u \in \mathcal{U}$, $g_{n,u}$, $n = 1, 2, 3, \cdots$, uniformly converges on every compact sets in $|s| < C_\infty$ to a regular function g_u^* on $|s| < C_\infty$. g_u^* satisfies*

$$g_u^*(s) = g_{1,u}(\lambda_u g_u^*(s/\lambda_u)), \quad |s| < C_\infty, \tag{141}$$

and

$$|g_u^*(s) - s| \leqq M_\infty |s|^2, \quad |s| < C_\infty. \tag{142}$$

Here C_∞ and M_∞ are constants defined by (160).

(ii) The two equations (141) and (142) uniquely determine g_u^*. Namely, if there is a regular function h on $|s| < C_\infty$ which satisfies (141) and (142) (with h in place of g_u^*), then $h = g_u^*$.

B.1.2 Weak convergence of a sequence of probability measures on non-negative reals defined by iteration.

Let P be a Borel probability measure supported on non-negative reals $[0, \infty)$, and define its generating function by

$$G(s) = \int_{[0,\infty)} e^{-s\xi} P(d\xi). \tag{143}$$

In general, for a Borel probability measure on reals, (143) is defined when s is pure imaginary (characteristic function), but as P is supported on non-negative reals, G has a wider domain.

命題 75 *$G(s)$ is defined on complex s satisfying $\mathbf{Re(s)} \geqq \mathbf{0}$, analytic on $\mathbf{Re(s)} > \mathbf{0}$ and continuous on $\mathbf{Re(s)} \geqq \mathbf{0}$.*

証明. Assume that $\mathbf{Re(s)} \geqq \mathbf{0}$. Since P is supported on $[0, \infty)$, $|e^{-s\xi}| \leqq 1$, $P(d\xi)$–a.s.. Hence $|G(s)| \leqq 1$. Therefore $G(s)$ exists, and dominated convergence theorem implies continuity with respect to s:

$$\lim_{s \to s_0} G(s) = G(s_0), \quad \text{if } \mathbf{Re(s)} \geqq \mathbf{0} \text{ and } \mathbf{Re(s_0)} \geqq \mathbf{0}.$$

Also if $\mathbf{Re(s)} > \mathbf{0}$, then

$$\frac{\partial e^{-s\xi}}{\partial \mathbf{Re(s)}} = -\xi e^{-s\xi}, \quad \frac{\partial e^{-s\xi}}{\partial \mathbf{Im}(s)} = -i\xi e^{-s\xi},$$

is bounded uniformly in $\xi \geqq 0$, hence dominated convergence theorem implies that $\dfrac{\partial G(s)}{\partial \mathbf{Re(s)}}$ and $\dfrac{\partial G(s)}{\partial \mathbf{Im}(s)}$ exist on $\mathbf{Re(s)} > \mathbf{0}$. Obviously Cauchy-Riemann equations hold, implying regularity of G on $\mathbf{Re(s)} > \mathbf{0}$. □

For later applications, We note a basic implication of regularity of genrating function at 0.

命題 76 *Let $\{P_u \mid u \in \mathcal{U}\}$ be a family of Borel probability measures supported on non-negative reals indexed by an arbitrary set $\mathcal{U}$, and for each $u \in \mathcal{U}$, let*

$$G_u(s) = \int_{[0,\infty)} e^{-s\xi} P_u(d\xi),$$

be its generating function, defined (according to 命題 75) on $\mathbf{Re(s)} \geqq \mathbf{0}$. If there exists a positive constant C such that

$$\sup_{u \in \mathcal{U}} G_u(-C) = \sup_{u \in \mathcal{U}} \int_0^\infty e^{C\xi} P_u(d\xi) < \infty,$$

then the family of Borel probability measures $\{P_{n,u} \mid u \in \mathcal{U}\}$ is tight, and all the moments are uniformly bounded, and uniformly integrable. Namely, for each $p \geqq 0$,

$$\sup_{u \in \mathcal{U}} \int_0^\infty \xi^p P_u(d\xi) < \infty, \quad \lim_{K \to \infty} \sup_{u \in \mathcal{U}} \int_K^\infty \xi^p P_u(d\xi) = 0.$$

証明. For each $p \geqq 0$ there exists $\xi_p > 0$ such that if $\xi \geqq \xi_p$ then $e^{C\xi} \geqq \xi^p$. Hence

$$\sup_{u\in\mathcal{U}} \int_0^\infty \xi^p P_u(d\xi) \leqq \sup_{u\in\mathcal{U}} \int_0^\infty e^{C\xi}\ P_u(d\xi) + \xi_p^p < \infty.$$

Next, put

$$M = \sup_{u\in\mathcal{U}} \int_0^\infty \xi^{p+1} P_u(d\xi) \quad (<\infty).$$

Note that if $K > 0$, then

$$\sup_{u\in\mathcal{U}} \int_{\xi\geqq K} \xi^p P_u(d\xi) \leqq \frac{1}{K} \sup_{u\in\mathcal{U}} \int_{\xi\geqq K} \xi^{p+1} P_u(d\xi) \leqq \frac{M}{K}.$$

Hence

$$\lim_{K\to\infty} \sup_{u\in\mathcal{U}} \int_K^\infty \xi^p P_u(d\xi) = 0.$$

□

注 26 *An alternative proof of tightness.*

Put

$$M = \sup_{u\in\mathcal{U}} \int_0^\infty e^{C\xi} P_u(d\xi),$$

and for $\epsilon > 0$ define a constant independent of u by $K = \dfrac{1}{C}\log\dfrac{M-1+\epsilon}{\epsilon}$. If $\xi = 0$, $P_u(d\xi)$–a.s., for all $u \in \mathcal{U}$, then the claim trivially holds. Otherwise $M > 1$, hence $K > 0$. Then, since P_u is supported on non-negative reals,

$$M - 1 \geqq \int_K^\infty (e^{C\xi} - 1) P_u(d\xi) = (e^{KC} - 1) P_u((K,\infty)) = \frac{M-1}{\epsilon} P_u((K,\infty)),$$

which implies $P_u((K,\infty)) \leqq \epsilon$ for all $u \in \mathcal{U}$. □

In the following, we will use several basic facts related to weak convergence of probability measures, which we summarize in §A.5.

We also note an elementary property.

命題 77 *Let P_n, $n = 1, 2, 3, \cdots$, be a sequence of Borel probability measures on reals, and assume that it converges weakly to a probability measure P^*. If P_n is supported on non-negative reals for all n, then P^* is also supported on non-negative reals.*

注 27 *The proof below obviously holds also when the index n is a continuous parameter. It also holds (with a standard generalization) when the space in consideration is any topological space and the probability measures are supported on any closed subset.* ◇

証明. Weak convergence implies

$$P^*((-\infty, 0)) \leqq \varliminf_{k\to\infty} P_{n_k,u}((-\infty, 0)) = 0,$$

which implies that P_u^* is supported on non-negative reals. □

We are interested in the case where §B.1.1 is applicable.

定理 78 *For $n = 1, 2, 3, \cdots$, let P_n be a Borel probability measure supported on non-negative reals $[0, \infty)$, and let G_n be its generating function*

$$G_n(s) = \int_0^\infty e^{-s\xi} P_n(d\xi),$$

defined, according to 命題 75, on $\mathbf{Re(s)} \geqq \mathbf{0}$. Assume that there exists $C > 0$ such that G_n, $n = 1, 2, 3, \cdots$, are regular functions on $|s| < C$, and also assume that there exists a regular function G^* on $|s| < C$ such that

$$\lim_{n\to\infty} G_n(s) = G^*(s), \quad |s| < C, \tag{144}$$

pointwise.

Then P_n converges weakly to a Borel probability measure supported on non-negative reals, whose generating function is defined both on $\mathbf{Re(s)} \geqq \mathbf{0}$ and $|s| < C$, and is equal to G^* on $|s| < C$.

Furthermore, if we denote the analytic continuation of G^* to $\mathbf{Re(s)} \geqq \mathbf{0}$ also by G^*, then $G_n(s)$ converges to $G^*(s)$ uniformly on compact sets in $\{s \in \mathbb{C} \mid \mathbf{Re(s)} \geqq \mathbf{0}\}$.

B.1.3 Uniform weak convergence.

The estimates given by 定理 72 is uniform in $u \in \mathcal{U}$. This implies further uniformity results in u, when $\mathcal{U}$ is a topological space. In this section we focus on uniformity in u.

To be specific, let $\mathcal{U}$ be a complex neghborhood of a finite closed interval on reals, say $[0,1]$, in the following.

First we introduce a new notion of uniform weak convergence. Let $P_{n,u}$, $n \in \mathbb{N}$, $u \in [0,1]$, be a family of Borel probability measures on reals. We say that $P_{n,u}$ converges weakly as $n \to \infty$ to a Borel probability measure P_u^* **uniformly in** $u \in [0,1]$, if

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{u\in[0,1]} |P_{u,n}(A) - P_u^*(A)| = 0, \tag{145}$$

for all Borel set A, satisfying $P_u^*(\partial A) = 0$, $u \in [0,1]$.

The following theorem gives a sufficient condition for a family of measures to converge uniformly, of which we will give an application in the later sections.

定理 79 *Let $\phi_{u,n}$, $n = 1,2,3,\cdots$, ϕ_u^*, $u \in [0,1]$, be the characteristic functions of $P_{u,n}$, $n = 1,2,3,\cdots$, P_u^*, $u \in [0,1]$, and assume that the following hold.*

(i) For each t, $\phi_{u,n}(t)$ converges as $n \to \infty$ uniformly in u to $\phi_u^*(t)$:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{u\in[0,1]} |\phi_{u,n}(t) - \phi_{u,*}(t)| = 0, \quad t \in \mathbb{R},$$

(ii) For each n and t, $\phi_{u,n}(t)$ is continuous in u:

$$\lim_{u'\to u} |\phi_{u',n}(t) - \phi_{u,n}(t)| = 0, \quad t \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N},$$

(iii) $\{P_u^* \mid u \in [0,1]\}$ is tight:

$$\lim_{K\to\infty} \sup_{u\in[0,1]} P_u^*([-K,K]^c) = 0,$$

(iv) P_u^*, $u \in [0,1]$, has density functions ρ_u, $u \in [0,1]$, which are uniformly bounded:

$$P_u^*(dx) = \rho_u(x)dx, \qquad \sup_{x\in\mathbb{R},\ u\in[0,1]} \rho_u(x) < \infty.$$

Then $P_{n,u}$ converges weakly as $n \to \infty$ to P_u^* uniformly in $u \in [0,1]$.

We are interested in the case where the results in §B.1.1 are applicable to deduce uniformity in u.

定理 80 *Assume, as in 定理 74, that for each $u \in \mathcal{U}$ $\{g_{n,u}\}$ satisfies the assumptions given in the beginning of §B.1.1. Assume furthermore, that $g_{1,u}(s)$ is regular in $u \in \mathcal{U}$ for each s.*

Then, in addition to all the consequences in 定理 74, the convergence of $g_{n,u}(s)$ to $g_u^*(s)$ is uniform in $(s,u) \in K \times [0,1]$ for any compact set $K \subset \{s \in \mathbb{C} \mid |s| < C_\infty\}$.

定理 74 and 定理 80 can be rewritten in exponentiated form.

系 81 *Let λ_u, $u \in \mathcal{U}$, be real numbers satisfying*

$$\lambda_- = \inf_{u\in\mathcal{U}} \lambda_u > 1\,. \tag{146}$$

Let $G_{n,u}$ be complex valued functions of complex variables, indexed by $n = 1,2,3,\cdots$ and $u \in \mathcal{U}$, satisfying the following.

(i) $G_{1,u}(0) = 1$ and $G'_{1,u}(0) = -1$, $u \in \mathcal{U}$.

(ii) There exists $C_0 > 0$ such that for any $u \in \mathcal{U}$, $G_{1,u}(s)$ is regular on $|s| \leqq C_0$, and

$$\sup_{|s|\leqq C_0,\ u\in\mathcal{U}} |G_{1,u}(s) - 1| < 1\,. \tag{147}$$

(iii) *For* $u \in \mathcal{U}$ *and* $n = 1, 2, 3, \cdots$,

$$G_{n+1,u}(s) = G_{1,u}(-\lambda_u \log G_{n,u}(s/\lambda_u)), \tag{148}$$

wherever the right hand side is defined and regular.

(iv) $G_{1,u}(s)$ *is regular in* $u \in \mathcal{U}$ *for each* s,

Then there exists $C_\infty > 0$ *such that for each* $u \in \mathcal{U}$,

$$\lim_{n\to\infty} G_{n,u}(s) = G_u^*(s),$$

uniformly in $(s,u) \in K \times [0,1]$ *for any compact set* $K \subset \{s \in \mathbb{C} \mid |s| < C_\infty\}$, *where* G_u^* *is a regular function on* $|s| < C_\infty$ *satisfying the defining equations* ${G_u^*}'(0) = -1$ *and*

$$G_u^*(s) = G_{1,u}(-\lambda_u \log G_u^*(s/\lambda_u)). \tag{149}$$

$G_{n,u}$ *and* G_u^* *satisfy*

$$\begin{aligned} &|-\log G_{n,u}(s) - s| \leqq M_\infty |s|^2, \quad |s| \leqq C_\infty\,,\ n = 1,2,3,\cdots,\ u \in \mathcal{U}, \\ &|-\log G_u^*(s) - s| \leqq M_\infty |s|^2, \quad |s| < C_\infty\,,\ u \in \mathcal{U}, \end{aligned}$$

for some positive constant M_∞ , *and*

$$\begin{aligned} &|G_{n,u}(s) - 1 + s| \leqq M'|s|^2, \quad |s| \leqq C'\,,\ n = 1,2,3,\cdots,\ u \in \mathcal{U}, \\ &|G_u^*(s) - 1 + s| \leqq M'|s|^2, \quad |s| \leqq C'\,,\ u \in \mathcal{U}, \end{aligned}$$

for some $C' > 0$ *and* $M' > 0$.

定理 82 *For* $n = 1, 2, 3, \cdots$ *and* $u \in \mathcal{U}$, *let* $P_{n,u}$ *be a Borel probability measure supported on non-negative reals* $[0, \infty)$, *and let* $G_{n,u}$ *be its generating function*

$$G_{n,u}(s) = \int_0^\infty e^{-s\xi} P_{n,u}(d\xi). \tag{150}$$

Assume that all the assumptions in 系 *81 hold for* $G_{n,u}$ *and* λ_u, $u \in \mathcal{U}$.

Then, (148) holds also on $\mathbf{Re(s)} \geqq \mathbf{0}$, *and for each* $u \in \mathcal{U}$, $P_{n,u}$ *converges weakly as* $n \to \infty$ *to a Borel probability measure* P_u^* , *supported on non-negative reals, whose generating function* $G_u^*(s)$ *is defined and satisfies (149) both on* $\mathbf{Re(s)} \geqq \mathbf{0}$ *and in a neighborhood of* 0, *say* $|s| < C_\infty$. ${G_u^*}'(0) = -1$ *and (149) uniquely determines* G_u^* .

$G_{n,u}$ *and* G_u^* *satisfy*

$$\begin{aligned} &|-\log G_{n,u}(s) - s| \leqq M_\infty |s|^2, \quad |s| \leqq C_\infty\,,\ u \in \mathcal{U}, \\ &|-\log G_u^*(s) - s| \leqq M_\infty |s|^2, \quad |s| < C_\infty\,,\ u \in \mathcal{U}, \end{aligned}$$

for some positive constant M_∞ , *and*

$$|G_{n,u}(s) - 1 + s| \leqq M'|s|^2, \quad |s| \leqq C'\,,\ n = 1,2,3,\cdots,\ u \in \mathcal{U}, \tag{151}$$

and a similar uniform estimate for G_u^* , *for some* $C' > 0$ *and* $M' > 0$. *In particular, the family of measures* $\{P_u^* \mid u \in \mathcal{U}\} \cup \{P_{n,u} \mid u \in \mathcal{U},\ n \in \mathbb{N}\}$ *is tight.*

Also,

$$\lim_{n\to\infty} G_{n,u}(s) = G_u^*(s),$$

(i) *uniformly in* $(s,u) \in K \times [0,1]$ *for any compact set* $K \subset \{s \in \mathbb{C} \mid |s| < C_\infty\}$,

(ii) *uniformly on compact sets in* $\mathbf{Re(s)} \geqq \mathbf{0}$, *for each* $u \in \mathcal{U}$,

(iii) *with additional assumption* $\sup_{u\in[0,1]} \lambda_u < \infty$, *uniformly in* $u \in [0,1]$, *for each* s *satisfying* $\mathbf{Re(s)} \geqq \mathbf{0}$.

If $\lim_{u\to u_0} G_{1,u}(s) = G_{1,u_0}(s)$ *uniformly on* $|s| \leqq C_0$ *for a* $u_0 \in \mathcal{U}$, *and* $\lim_{u\to u_0} \lambda_u = \lambda_{u_0}$, *then* $P_u^* \to P_{u_0}^*$ *weakly as* $u \to u_0$. *In particular, the characteristic function* $\varphi_u^*(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{\sqrt{-1}\xi t} P_u^*(d\xi)$ *satisfies* $\lim_{u\to u_0} \varphi_u^*(t) = \varphi_{u_0}^*(t)$, *for each* $t \in \mathbb{R}$.

注 28 *(i) Note that* $G'_{n,u}(0) = -\displaystyle\int_{[0,\infty)} \xi P_{n,u}(d\xi)$*, hence for a Borel probability measure with finite non-zero mean* m*,* $G'_{n,u}(0) = -1$ *is possible by scale transformation, i.e., by defining* $P_{n,u}$ *as an image measure of* $\xi \to \xi/m$*. Thus the assumption* $G'_{1,u}(0) = -1$ *is not an essential restriction.*

(ii) We stated uniformity in u *of the convergene of* $G_{n,u}(s)$ *for* ***each*** s *satisfying* $\mathbf{Re(s)} \geqq \mathbf{0}$ *(with additional assumption). It may be possible that we may also have uniformity in* (u, s) *on compact sets on* $\mathbf{Re(s)} \geqq \mathbf{0}$*, similarly as we stated for* $|s| < C_\infty$ *. This is left open.*

◇

B.1.4 Canonical ensemble defined by iteration.

We now give a situation where all the assumptions in the previous theorems hold, with additional properties of exponential decays of characteristic functions and the existence of smooth densities, for which we summarize some basic facts in §A.6.

Let $\mathcal{U}$ be a bounded open complex neighborhood of closed interval on reals, say $[0, 1]$, and for each $u \in \mathcal{U}$ let $\Phi_{1,u}$ be a regular function defined by power series:

$$\Phi_{1,u}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{k,u} z^k, \tag{152}$$

with following properties among the coefficients:

(i) $c_{k,u} \geqq 0$, $k = 1, 2, 3, \cdots$,

(ii) $c_{0,u} = c_{1,u} = 0$,

(iii) $\inf\limits_{u\in\mathcal{U}} c_{2,u} > 0$,

(iv) There exists $k > 2$ such that $\inf\limits_{u\in\mathcal{U}} c_{k,u} > 0$,

(v) The radius of convergence r_u of (152) is uniformly positive in u; $\inf\limits_{u\in\mathcal{U}} r_u > 0$.

(vi) r_u is continuous in $u \in \bar{\mathcal{U}}$, $\Phi_{1,u}(z)$ is continuous on $\{(u, z) \in \bar{\mathcal{U}} \times \mathbb{C} \mid |z| < r_u\}$, where $\bar{\mathcal{U}}$ is the closure of $\mathcal{U}$, and $\Phi'_{1,u}(x)$ is continuous on $\{(u, x) \in \mathcal{U} \times \mathbb{R} \mid 0 < x < r_u\}$.

(Polynomial is not excluded for $\Phi_{1,u}$. $r_u = \infty$ is also allowed.)

注 29 *(i) Uniform positivity of* $c_{2,u}$ *and* $c_{k,u}$ *are used only to prove uniform positivity of variance of characteristic functions in* 定理 *87, which in turn is used to prove that their density functions are bounded uniformly in* u*.*

(ii) Continuity of $\Phi_{1,u}(z)$ *on* (u, z) *with* $u \in \bar{\mathcal{U}}$ *is used in the proof of* 定理 *85 to prove (147). To prove continuity in* u *of* $x_{c,u}$ *and* λ_u *in* 命題 *83, continuity in* $u \in \mathcal{U}$ *and real* z *suffices.*

◇

Note the following simple properties.

命題 83 *For each* $u \in \mathcal{U}$ *the following holds.*

(i) $|\Phi_{1,u}(z)| \leqq \Phi_{1,u}(|z|)$, $|z| < r_u$.

(ii) For each $u \in \mathcal{U}$ *there exists a unique positive real* $x_{c,u} < r_u$ *such that*

$$\Phi_{1,u}(x_{c,u}) = x_{c,u} . \tag{153}$$

(iii) $\lambda_u = \Phi'_{1,u}(x_{c,u}) \geqq 2$, $u \in \mathcal{U}$.

(iv) $x_{c,u}$ *and* λ_u *are continuous in* $u \in \mathcal{U}$.

証明. The first claim is obvious from the definition.

It also obviously holds that $\Phi_{1,u}(0) = \Phi'_{1,u}(0) = 0$, $\inf_{x \geqq 0} \Phi''_{1,u}(x) = \Phi''_{1,u}(0) = c_{2,u} > 0$. Therefore $\Phi'_{1,u}(x) - 1$ is increasing in $x \geqq 0$, negative at $x = 0$ and diverges to $+\infty$ as $x \to r_u$. Existence and uniqueness of fixed point follows.

Since the terms in (152) are degree 2 or higher, we have

$$\Phi'_{1,u}(x) \geqq \frac{2}{x}\Phi_{1,u}(x), \quad 0 \leqq x \leqq r_u\,.$$

Therefore $\lambda_u \geqq 2\dfrac{\Phi_{1,u}(x_{c,u})}{x_{c,u}} = 2$.

Note that continuity of $\Phi_{1,u}(x)$ in $\{(u,x) \in \mathcal{U} \times \mathbb{R} \mid 0 < x < r_u\}$ and $\lambda_u = \Phi'_{1,u}(x_{c,u}) \geqq 2$ imply that $x_{c,u}$ is continuous in u. In fact, if not, then there exists $u_0 \in \mathcal{U}$, a sequence $u'_n \in \mathcal{U}$, $n = 1,2,3,\cdots$, $y \in [0, r_{u_0}]$ such that $\lim_{n\to\infty} u'_n = u_0$, $\lim_{n\to\infty} x_{c,u'_n} = y \neq x_{c,u_0}$. Continuity of $\Phi_{1,u}(x)$ then implies, by letting $n \to \infty$ in $\Phi_{1,u'_n}(x_{c,u'_n}) = x_{c,u'_n}$, $\Phi_{1,u_0}(y) = y$, which contradicts $\Phi_{1,u_0}(x_{c,u_0}) = x_{c,u_0}$, $x_{c,u_0} \neq y$, and uniqueness of the fixed point.

Since $x_{c,u}$ is continuous in u and, by assumption, $\Phi'_{1,u}(x)$ is continuous in (u,x), $\lambda_u = \Phi'_{1,u}(x_{c,u})$ is also continuous in u.

□

Let $\Phi_{n,u}$, $n = 1,2,3,\cdots$, be a series of functions defined inductively by

$$\Phi_{n+1,u}(z) = \Phi_{1,u}(\Phi_{n,u}(z)), \quad n = 1,2,3,\cdots, \tag{154}$$

wherever the right hand side is defined and regular. There are many nice estimates [31, 35, 32] on asymptotics of $\Phi_{n,u}$, among which we note the following.

定理 84 *For each $u \in \mathcal{U}$ the following holds.*

(i) For each $n = 1,2,3,\cdots$, $\Phi_{n,u}(x_{c,u}) = x_{c,u}$ and $\Phi'_{n,u}(x_{c,u}) = \lambda_u^n$.

(ii) If $0 \leqq x < x_{c,u}$, then
$$\lim_{n\to\infty} \Phi_{n,u}(x) = 0\,. \tag{155}$$

(iii) If $0 \leqq x < x_{c,u}$, then
$$\varlimsup_{n\to\infty} 2^{-n} \log \Phi_n(x) < 0\,. \tag{156}$$

注 30 *The last claim (156) is used in (159).* ◇

Put

$$G_{n,u}(s) = \frac{1}{x_{c,u}}\Phi_{n,u}(e^{-\lambda_u^{-n} s} x_{c,u}), \quad n = 1,2,3,\cdots,\ u \in \mathcal{U}, \tag{157}$$

whenever the right hand side is defined and regular in s.

定理 85 *The following holds.*

(i) Each $G_{n,u}$ is a generating function of a Borel probability measure supported on non-negative reals $[0,\infty)$. Namely, there exists a Borel probability measure $P_{n,u}$ supported on $\{k\lambda_u^{-n} \mid k = 0,1,2,\cdots\} \subset [0,\infty)$ such that (150) holds.

(ii) $G_{n,u}$ satisfies all the assumptions in 定理 82 (except those assumed in the last half of 定理 82 as additional assumptions), with λ_u defined in 命題 83.

In particular, all the results in 定理 82 that are derived without additional assumptions hold.

(iii) Put $\varphi^*_u(t) = G^*_u(-\sqrt{-1}t)$, $t \in \mathbb{R}$, where G^*_u is that given in the consequences of 定理 82. Then P^*_u (also given by 定理 82) and φ^*_u satisfy all the assumptions in 定理 65 with $P = P^*_u$ and $\varphi_P = \varphi^*_u$, and $b = 2$, $\lambda = \lambda_u$.

In particular, all the corresponding results in 定理 65 hold. Namely,

(a) *There exists* $C_{1,u} > 0$ *and* $C_{2,u} > 0$ *such that*

$$|\varphi_u^*(t)| \leqq C_{2,u} e^{-C_{1,u}|t|^{\nu_u}}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{158}$$

where $\nu_u = \dfrac{\log 2}{\log \lambda_u}$.

(b) *There exists a non-negative valued* C^∞ *function* ρ_u *on* $\mathbb{R}$ *such that* $P_u^*(d\xi) = \rho_u(\xi)d\xi$ *and* ρ_u *is supported on* $[0, \infty)$.

To obtain uniform bound of density ρ_u, we need uniform lower bound of variance. Note that $m_u = \displaystyle\int \xi P_u^*(d\xi) = 1$.

命題 86 *The variance* v_u *of* P_u^*, *defined by* $v_u = \displaystyle\int (\xi-1)^2 P_u^*(d\xi) = 1$, *is uniformly positive;* $\displaystyle\inf_{u\in[0,1]} v_u > 0$.

証明. By differentiating (185) twice, putting $t = 0$, and using ${\varphi_u^*}'(0) = \sqrt{-1}m_u = \sqrt{-1}$, and $\Phi'_{1,u}(x_{c,u}) = \lambda_u$, we have

$$v_u\lambda_u(\lambda_u - 1) = x_{c,u}\Phi''_{1,u}(x_{c,u}) - \lambda_u(\lambda_u - 1).$$

Using (152), and noting

$$x_{c,u} = \Phi_{1,u}(x_{c,u}) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{k,u} x_{c,u}^k,$$

and

$$\lambda_u = \Phi'_{1,u}(x_{c,u}) = \sum_{k=0}^{\infty} k c_{k,u} x_{c,u}^{k-1},$$

we further have

$$v_u\lambda_u(\lambda_u - 1) = \frac{1}{2}\sum_{n,m\geqq 0}(n-m)^2 c_{n,u}c_{m,u}x_{c,u}^{n+m-2}.$$

By assumption, there exists $k > 2$ such that $\displaystyle\inf_{u\in[0,1]} c_{k,u} > 0$, hence

$$\inf_{u\in[0,1]} v_u \geqq \frac{1}{(k-2)^2 \displaystyle\sup_{u\in[0,1]}\lambda_u(\sup_{u\in[0,1]}\lambda_u - 1)} \inf_{u\in[0,1]}(c_{2,u}c_{k,u}x_{c,u}^k) > 0.$$

($\inf_{u\in[0,1]} x_{c,u} > 0$ holds because $x_{c,u}$ is continuous in u.)

□

注 31 *The proof relates scaling limit to statistical expectations. In other words, the proof shows that (185) implies that the expectations with respect to* P_u^* *can be rewritten as the expectations with respect to another probability measure on non-negative integers, which is formally directly seen from the original setting (152) and (157).* ◇

定理 87 (i) *There exists* $C > 0$ *such that*

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}} e^{C\xi}\rho_u(\xi) < \infty, \quad u \in \mathcal{U}.$$

(C can be chosen to be independent of u, i.e., we have uniform decay of $\rho(\xi)$ *as* $\xi \to \infty$*. However, note that this claim does not imply that* ρ *is bounded uniformly in u. We have to prove the latter property separately.)*

(ii) $\rho_u(\xi) > 0$, $\xi > 0$, $u \in \mathcal{U}$.

(iii) *For* $b > 0$ *and* $n = 1, 2, 3, \cdots$, *put* $h_n = h_{n,u} = b\lambda_u^{-n}\sqrt{n}$ *and* $g_n(\xi) = g_{n,u}(\xi) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}h_{n,u}} e^{-\xi^2/(2h_{n,u}^2)}$, $\xi \in \mathbb{R}$. *Then for each* $u \in \mathcal{U}$. *there exists* $b_0 > 0$ *such that if* $b > b_0$ *then*

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} g_{n,u}(\xi - \eta)P_{n,u}(d\eta) = \rho_u(\xi), \tag{159}$$

uniformly in $\xi \in \mathbb{R}$.

(iv) $\varphi_u^*(t)$ *is continuous in* $(u,t) \in [0,1] \times \mathbb{R}$.

(v) The constants ν_u, $C_{1,u}$, $C_{2,u}$ *in (158) can be chosen to be independent of* $u \in [0,1]$. *In particular,*

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}} \sup_{u\in[0,1]} \rho_u(\xi) < \infty.$$

注 32 *(i) Possibly, the constant* b_0 *in the theorem can be chosen to be independent of* $u \in \mathcal{U}$*, and the convergence in (159) may be uniform in* u*. This is left open.*

(ii) Is it possible that (158) and related assumptions (originally from the second assumption in 定理 65) would imply $P(\{0\}) = 0$ *and the tightness of* $\{P_n\}$ *on* $(0,\infty)$ *(namely, the mass of* P_n *do not accumulate at* $\{0\}$*), and consequently uniformity of convergence* $\lim_{n\to\infty} G_n(s) = G(s)$ *on* $\mathbf{Re(s)} \geqq \mathbf{K}$*, which did not hold in general from the assumptions in 定理 78?*

◇

The following is a direct consequence of 定理 85, 定理 87, and 定理 79.

系 88 $P_{n,u}$ *in 定理 85 converges weakly as* $n \to \infty$ *to* P_u^* *uniformly in* $u \in [0,1]$.

B.2 Proofs.

定理 *72* の証明. Fix $\epsilon > 0$ (one may take $\epsilon = 1$, see [19]), and put

$$M_\infty = \frac{M(1+\epsilon)^2}{1-\frac{1}{\lambda_-}},\quad C_\infty = \frac{\epsilon\lambda_-}{M_\infty} \wedge \tilde{C}, \tag{160}$$

where $\tilde{C}$ is a positive constant defined by

$$\tilde{C}\left(1+\frac{\tilde{C}M_\infty}{\lambda_-}\right) = C. \tag{161}$$

Note that $C_\infty \leqq \tilde{C} < C$.

Define a sequence M_n, $n = 1,2,3,\cdots$, by

$$M_n = M_\infty\left(1-\frac{1}{\lambda_-^n}\right) - \frac{M\epsilon(2+\epsilon)}{\lambda_-^{n-1}}.$$

It is straightforward to see that

$$\begin{aligned} M_n &< M_\infty,\quad n = 1,2,3,\cdots, && (162)\\ M_1 &= M, && (163)\\ M_{n+1} &= M_\infty\left(1-\frac{1}{\lambda_-}\right) + \frac{1}{\lambda_-}M_n \\ &= M(1+\epsilon)^2 + \frac{1}{\lambda_-}M_n,\quad n = 1,2,3,\cdots. && (164) \end{aligned}$$

We prove by induction in n that $g_{n,u}(s)$ is regular on $|s| \leqq C_\infty$ and satisfies

$$|g_{n,u}(s) - s| \leqq M_n|s|^2,\quad |s| \leqq C_\infty\,. \tag{165}$$

Then (162) and (165) imply 定理 72.

$C_\infty < C$, (163), and (138) imply that $g_{1,u}(s)$ is regular on $|s| \leqq C_\infty$ and (165) holds for $n = 1$.

Assume that for an integer k, $g_{k,u}(s)$ is regular on $|s| \leqq C_\infty$ and (165) holds for $n = k$. Note that the assumption $\lambda_- > 1$ implies that if $|s| \leqq C_\infty$ then $|s/\lambda_u| < C_\infty$. Hence by induction hypothesis, $g_{k,n}(s/\lambda_u)$ is regular and satisfies

$$\lambda_u|g_{k,u}(s/\lambda_u) - s/\lambda_u| \leqq \frac{M_k}{\lambda_u}|s|^2. \tag{166}$$

This and (162) and (161) further imply, for $|s| \leqq C_\infty$,

$$\lambda_u |g_{k,u}(s/\lambda_u)| \leqq |s| \left(1 + \frac{M_k}{\lambda_u}|s|\right) \leqq C_\infty \left(1 + \frac{M_k}{\lambda_-} C_\infty\right) \leqq C.$$

Therefore $g_{k+1,u}(s) = g_{1,u}(\lambda_u g_{k,u}(s/\lambda_u))$ is regular on $|s| \leqq C_\infty$ and

$$\begin{aligned} & |g_{1,u}(\lambda_u g_{k,u}(s/\lambda_u)) - \lambda_u g_{k,u}(s/\lambda_u)| \\ & \leqq M |\lambda_u g_{k,u}(s/\lambda_u)|^2 \leqq M \left(|s| + \tfrac{M_k}{\lambda_u}|s|^2\right)^2 \leqq M \left(1 + \tfrac{M_k C_\infty}{\lambda_-}\right)^2 |s|^2 \\ & \leqq M(1+\epsilon)^2 |s|^2, \end{aligned} \tag{167}$$

where we also used (162) and $C_\infty \leqq \dfrac{\epsilon\lambda_-}{M_\infty}$ in the last line.

Using (166) and (167) we finally have

$$\begin{aligned} & |g_{k+1,u}(s) - s| \leqq |g_{1,u}(\lambda_u g_{k,u}(s/\lambda_u)) - \lambda_u g_{k,u}(s/\lambda_u)| + \lambda_u |g_{k,u}(s/\lambda_u) - s/\lambda_u| \\ & \leqq \left(\tfrac{M_k}{\lambda_u} + M(1+\epsilon)^2\right)|s|^2 \leqq \left(\tfrac{M_k}{\lambda_-} + M(1+\epsilon)^2\right)|s|^2 = M_{k+1}|s|^2, \quad |s| \leqq C_\infty\,, \end{aligned}$$

which implies (165) for $n = k+1$. By induction, we have (165) for all n. □

定理 *74* の証明. (i) Fix $u \in \mathcal{U}$ and suppress the suffix u here.

Since 定理 72 implies that g_n, $n = 1, 2, 3, \cdots$, are regular on $|s| < C_\infty$, they have Mclaurin expansion:

$$g_n(s) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} s^k.$$

Note that (140) implies $a_{n,1} = 1$ for all n. Substituting the Mclaurin series in (139) and comparing coefficients of s^k for $k = 2, 3, 4, \cdots$, we have (using $a_{n,1} = 1$),

$$a_{n+1,2} = \frac{1}{\lambda} a_{n,2} + a_{1,2}, \tag{168}$$

and

$$a_{n+1,k} = \frac{1}{\lambda^{k-1}} a_{n,k} + \sum_{\ell=2}^{k} a_{1,\ell} \lambda^\ell \sum_{j_1+j_2+\cdots+j_\ell = k} \prod_{m=1}^{\ell} a_{n,j_m} \frac{1}{\lambda^k}\,, \quad k = 3, 4, 5, \cdots. \tag{169}$$

The assumption $\lambda = \lambda_u \geqq \lambda_- > 1$ and (168) imply existence of limit

$$\alpha_2 = \lim_{n\to\infty} a_{n,2}\,.$$

We proceed with induction on k and assume the existence of limit

$$\alpha_\ell = \lim_{n\to\infty} a_{n,\ell}\,, \quad \ell < k.$$

Then the second term in the right hand side of (169) converges as $n \to \infty$, hence (169) implies, with $\lambda > 1$, existence of limit

$$\alpha_k = \lim_{n\to\infty} a_{n,k}\,. \tag{170}$$

By induction, the limit (170) exists for all $k = 2, 3, 4, \cdots$.

Applying 定理 73 to $\{g_n\}$, we see that for any subsequence there exists subsubsequence $\{g_{n_\ell}\}$, which is uniformly convergent on compact subsets of $\{s \in \mathbb{C} \mid |s| < C_\infty\}$:

$$\exists g^*(s) = \lim_{\ell\to\infty} g_{n_\ell}(s) = \lim_{\ell\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{n_\ell,k} s^k = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k s^k, \quad |s| < C_\infty\,.$$

(Limit and series is interchangeable because uniform convergence of regular functions implies interchangeability of derivative and series.) Since the right hand side is independent of subsequences, the limit g^* is independent of subsequences. Therefore $\{g_n\}$ converges uniformly on compact subsets of $\{s \in \mathbb{C} \mid |s| < C_\infty\}$ to a regular function $g^*(s) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k s^k$.

Letting $n \to \infty$ in (139) and (140), and noting the uniformness of convergence of $\{g_n\}$, we have (141) and (142).

(ii) As in the above proof, consider the McLaurin expansion

$$h(s) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k s^k.$$

Then (142) (for h) implies $b_k = 1$ and (141) implies

$$b_2 = \frac{1}{\lambda_u} b_2 + a_{1,2}, \tag{171}$$

and

$$b_k = \frac{1}{\lambda_u^{k-1}} b_k + \sum_{\ell=2}^{k} a_{1,\ell} \lambda_u^{\ell} \sum_{j_1+j_2+\cdots+j_\ell=k} \prod_{m=1}^{\ell} b_{j_m} \frac{1}{\lambda_u^k}, \quad k = 3, 4, 5, \cdots. \tag{172}$$

The assumption $\lambda_u > 1$ and (171) imply $b_2 = \dfrac{a_{1,2}}{1 - \frac{1}{\lambda_u}}$, and by induction on k with (172), we find that b_k is uniquely determined for all $k = 2, 3, 4, \cdots$. Hence the two equations (141) and (142) determine h completely, and by definition it must coincide with g_u^*. □

定理 78 の証明. Convergence of $\{G_n\}$ implies that the sequence $G_n(-C/2) = \int_0^\infty e^{C\xi/2} P_n(d\xi)$, $n = 1, 2, 3, \cdots$, is bounded, which further implies, by 命題 76, that $\{P_n \mid n = 1, 2, 3, \cdots\}$ is tight. Therefore for any subsequence of P_n, $n = 1, 2, 3, \cdots$, there exists a weakly converging subsubsequence. 命題 77 implies that the limit measure is also supported on non-negative reals.

Suppose that P_{n_k} converges weakly to a Borel probability measure P^* supported on $[0, \infty)$ as $k \to \infty$. We shall prove that P^* is independent of subsequence $\{n_k\}$. Put $\tilde{G}^*(s) = \int_{[0,\infty)} e^{-s\xi} P^*(d\xi)$. 命題 75 then implies that $\tilde{G}^*(s)$ is defined on complex s satisfying $\mathbf{Re(s) \geqq 0}$, regular on $\mathbf{Re(s) > 0}$ and continuous on $\mathbf{Re(s) \geqq 0}$. Note that if $\mathbf{Re(s) \geqq 0}$, then $|e^{-s\xi}| = e^{-\mathbf{Re(s)}\xi} \leqq 1$, $\xi \geqq 0$, hence $e^{-s\xi}$ is a bounded continuous function on $\xi \in [0, \infty)$. Therefore weak convergence of P_{n_k} to P^* and the support properties of the measures imply

$$\lim_{k\to\infty} G_{n_k}(s) = \tilde{G}^*(s), \quad \mathbf{Re(s) \geqq 0}. \tag{173}$$

Comparing (144) and (173), we see that the regular functions G^* and $\tilde{G}^*$ coincide on $\{s \in \mathbb{C} \mid \mathbf{Re(s) > 0},\ \mathbf{|s| < C}\}$. Uniqueness of analytic continuation implies that $\tilde{G}^*$ is independent of the subsequence $\{n_k\}$. Hence G^* is analytically continued to $\mathbf{Re(s) > 0}$, and uniquely continued as a contiguous function to $\mathbf{Re(s) \geqq 0}$, and satisfies

$$\lim_{n\to\infty} G_n(s) = G^*(s), \quad \mathbf{Re(s) \geqq 0}. \tag{174}$$

Characteristic function determines probability measure, hence P^* also is independent of the subsequence $\{n_k\}$. This proves that P_n converges weakly as $n \to \infty$ to a Borel probability measure P^* supported on non-negative reals.

We turn to a proof that the convergence (174) is uniform on compact sets in $\{s \in \mathbb{C} \mid \mathbf{Re(s) \geqq 0}\}$. Let $K, K' > 0$ and consider (174) on $J = \{s \in \mathbb{C} \mid 0 \leqq \mathbf{Re(s) \leqq K'},\ \mathbf{|Im(s)| \leqq K}\}$, using an idea in the proof of uniform convergence of characteristic functions [5, Theorem 5.3]. Let $\epsilon > 0$. Since $\{P_n\}$ is tight, there exists $L > 0$ such that $P_n((L, \infty)) < \epsilon$, $n = 1, 2, 3, \cdots$, and $P((L, \infty)) < \epsilon$. Since $e^{-s'\xi}$ is uniformly continuous (as a function of complex s' and real ξ) on $\{s' \in \mathbb{C} \mid |s'| \leqq 1\} \times [0, L]$, $\sup_{0 \leqq \xi \leqq L} |e^{-s'\xi} - 1|$ is continuous on $|s'| \leqq 1$. Therefore there exists $\delta > 0$ such that

$$\sup_{0 \leqq \xi \leqq L} |e^{-s'\xi} - 1| < \epsilon, \quad |s'| < \delta.$$

Hence if $|s'| < \delta$,

$$\begin{aligned} &|G_n(s + s') - G_n(s)| \leqq \int_0^\infty e^{-\mathbf{Re(s)}\xi} |e^{-s'\xi} - 1| P_n(d\xi) \leqq \int_0^\infty |e^{-s'\xi} - 1| P_n(d\xi) \leqq \epsilon + 2P_n((L, \infty)) \\ &\leqq 3\epsilon, \quad \mathbf{Re(s) \geqq 0},\ \mathbf{|s'| < \delta},\ \mathbf{n = 1, 2, 3, \cdots}, \end{aligned}$$

and a similar estimate for G^*.

Since J is a compact set, there exists a finite number, say ℓ, of points $s_1, s_2, \cdots, s_\ell$ in J such that for any $s \in J$ there exists $1 \leqq j \leqq \ell$ such that $|s - s_j| < \delta$. Choosing an integer n_2 such that

$$|G_n(s_j) - G^*(s_j)| < \epsilon, \quad n \geqq n_2,\ j = 1, 2, \cdots, \ell,$$

we can find $1 \leqq j \leqq \ell$ for any $s \in J$, so that

$$\begin{aligned} &|G_n(s) - G^*(s)| \leqq |G_n(s) - G_n(s_j)| + |G_n(s_j) - G^*(s_j)| + |G^*(s_j) - G^*(s)| < 7\epsilon, \\ &\quad n \geqq n_2,\ 0 \leqq \mathbf{Re(s)} \leqq \mathbf{K'},\ |\mathbf{Im(s)}| \leqq \mathbf{K}. \end{aligned} \tag{175}$$

which implies uniform convergence of $G_n(s)$ to $G^*(s)$ on J. □

定理 79. の証明. Following the proof in [1, §2.6, §2.5] for the case without parameter u, we prove the theorem along the following outline.

(i) Prove

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{u\in[0,1]} \left| \int f(x) P_{u,n}(dx) - \int f(x) P_u^*(dx) \right| = 0, \tag{176}$$

   (a) when f is a Fourier transform $f(x) = \int e^{\sqrt{-1}yx} g(y)dy$ of an integrable function g, using Fubini's theorem and the assumption on continuity in u of characteristic functions,

   (b) when f is a continuous function of compact support, by uniformly approximating f by a series of functions in the above considered class,

   (c) when f is a bounded continuous functions, by approximating f by a series of continuous functions of compact support, using tightness of $\{P_{u,n}\}$ and continuity property of probability measures.

(ii) Approximate A^0 by closed subsets and $\bar{A}$ by open neighborhood uniformly in u, to approximate the defining function of A, and then use (176).

Let us proceed with our proof.

First we prove (176) for f which has a form $f(x) = \int e^{\sqrt{-1}yx} g(y)dy$ with an integrable function g.

By assumption, characteristic function $\phi_{n,u}(t)$ is continuous in t and converges as $n \to \infty$ uniformly in u hence $\phi_u^*(t)$ is continuous in t. This implies

$$\sup_{u\in[0,1]} |\phi_{u,n}(t) - \phi_{u,*}(t)| = \sup_{u\in[0,1]\cap\mathbb{Q}} |\phi_{u,n}(t) - \phi_{u,*}(t)|,$$

which further implies that this quantity is measurable with respect to t. We can therefore consider integration, and using Fubini's theorem,

$$\sup_{u\in[0,1]} \left| \int f(x) P_{u,n}(dx) - \int f(x) P_u^*(dx) \right| \leqq \int \sup_{u\in[0,1]} |\phi_{u,n}(t) - \phi_{u,*}(t)||g(t)|dt.$$

Characteristic functions are bounded (its absolute value is 1 or less) and g is integrable, hence dominated convergence theorem can be applied. By assumption that $\phi_n(t)$ converges for each t uniformly in u as $n \to \infty$,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{u\in[0,1]} \left| \int f(x) P_{u,n}(dx) - \int f(x) P_u^*(dx) \right| \leqq \lim_{n\to\infty} \int \sup_{u\in[0,1]} |\phi_{u,n}(t) - \phi_{u,*}(t)||g(t)|dt = 0\,.$$

which implies (176) for this class of function f.

Next we prove that a continuous function f with compact support, can be approximated (with respect to sup norm) by functions in the class considered above, which implies, that (176) holds also for f. More explicitly, we shall prove that if we put, for $n = 1, 2, 3, \cdots$ and $t \in \mathbb{R}$,

$$g_n(t) = \frac{1}{2\pi} e^{-t^2/(2n)} \int e^{-\sqrt{-1}ty} f(y)dy, \quad h_n(x) = \int e^{\sqrt{-1}tx} g_n(t)dt,$$

then $h_n(x)$ converges to $f(x)$ as $n \to \infty$ uniformly in x. (Note that g_n is integrable.)

Using Fubini's theorem,

$$h_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int\int e^{\sqrt{-1}t(x-y)-t^2/(2n)} dt\, f(y)dy = \sqrt{\frac{n}{2\pi}} \int e^{-n(x-y)^2/2} f(y)dy$$
$$= \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int e^{-t^2/2} f(x + \frac{t}{\sqrt{n}})dt.$$

Dividing the range of integration to $|t| \leqq a$ and $|t| > a$, we have

$$|h_n(x) - f(x)| \leqq \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int e^{-t^2/2} |f(x + \frac{t}{\sqrt{n}}) - f(x)| dt$$
$$\leqq \sup_{|t|\leqq a} |f(x + \frac{t}{\sqrt{n}}) - f(x)| + \sqrt{\frac{2 \sup_x |f(x)|}{2\pi}} \int_{|t|>a} e^{-t^2/2} dt.$$

f is a continuous function of compact support, hence $\sup_x |f(x)| < \infty$ and also is uniformly continuous in x, hence the first term in the right hand side of the above equation converges to 0 as $n \to \infty$ uniformly in x. Letting $a \to \infty$, the second term also disappears. Since $a > 0$ is arbtrary and the left hand side is independent of a, we therefore have

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sup_x |h_n(x) - f(x)| = 0\,.$$

Next we prove that (176) holds for bounded continuous function f.

Let $K > 0$. There exists continuous function g of compact support such that

$$g(x) = f(x),\ |x| \leqq K, \quad g(x) = 0,\ |x| > K + 1\,.$$

Since f is bounded, $c = \sup_x |f(x) - g(x)| < \infty$. Choose a continuous function h of compact support such that

$$h(x) \quad \begin{cases} = c, & |x| \leqq K - 1, \\ \in [0, c], & K - 1 < |x| < K, \\ = 0, & |x| \geqq K. \end{cases}$$

It then holds that $|f(x) - g(x)| \leqq c - h(x)$, $x \in \mathbb{R}$. We also have

$$\int |f(x) - g(x)| P_u^*(dx) \leqq c P_u^*([-K, K]^c).$$

Applying (176) on h, we have

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{u\in[0,1]} \left| \int h(x) P_{u,n}(dx) - \int h(x) P_u^*(dx) \right| = 0\,.$$

In particular, for any $\epsilon > 0$, we have

$$\exists n_0;\ (\forall n \geqq n_0)(\forall u \in [0, 1]) \ \int (c - h(x)) P_{u,n}(dx) - \epsilon$$
$$\leqq c - \int h(x) P_u^*(dx) = \int (c - h(x)) P_u^*(dx) \leqq c P_u^*([-K + 1, K - 1]^c).$$

This and

$$\int |f(x) - g(x)| P_{u,n}(dx) \leqq c - \int h(x) P_{u,n}(dx)$$

imply

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sup_{u\in[0,1]} \int |f(x) - g(x)| P_{u,n}(dx) \leqq c \sup_{u\in[0,1]} P_u^*([-K + 1, K - 1]^c).$$

Applying (176) to g, we have

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sup_{u\in[0,1]} \left| \int g(x) P_{u,n}(dx) - \int g(x) P_u^*(dx) \right| = 0\,.$$

Combining all the obtained estimates, we have

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sup_{u\in[0,1]} \left| \int f(x)P_{u,n}(dx) - \int f(x)P_u^*(dx) \right| \leqq 2c \sup_{u\in[0,1]} P_u^*([-K+1, K-1]^c).$$

Since K is arbitrary and the left hand side is independent of K, we can let $K\to\infty$ to find, by tightness assumption, that the right hand sid converges to 0, hence (176) holds.

Finally we prove (145).

Put $K = \sup_{x,u} \rho_u(x)$. By assumption, $K < \infty$. Denote the Lebesgue measure by μ. On $\mathbb{R}$, any open set can be written as an increasing limit of a sequence of closed sets, and any closed set can be written as a decreasing limit of a sequence of open sets. Therefore, for any $\epsilon > 0$, there exists a closed set F and a open set G, satsfying $F \subset A^0 \subset A \subset \bar{A} \subset G$ and

$$\mu(G) - \epsilon/K < \mu(\bar{A})\ (= P^*(A) =)\ \mu(A^0) < \mu(F) + \epsilon/K, \quad u\in[0,1].$$

Therefore we have

$$P_u^*(G) - \epsilon < P_u^*(\bar{A})\ (= P^*(A) =)\ P^*(A^0) < P^*(F) + \epsilon, \quad u\in[0,1].$$

Define a bounded continuous function f such that

$$f(x) \quad \begin{cases} = 0, & x\in G^c, \\ \in [0,1], & x\in G\cap \bar{A}^c, \\ 1, & x\in \bar{A}, \end{cases}$$

is satisfied. Then (176) implies

$$\begin{aligned} & \underline{\lim}_n \inf_{u\in[0,1]} (P_u^*(A) - P_{u,n}(A)) \geqq \underline{\lim}_n \inf_{u\in[0,1]} (P_u^*(G) - P_{u,n}(A) - \epsilon) \\ & \geqq \underline{\lim}_n \inf_{u\in[0,1]} (\int f(x)P_u^*(dx) - \int f(x)P_{u,n}(dx) - \epsilon) \\ & = -\overline{\lim_n} \sup_{u\in[0,1]} (\int f(x)P_{u,n}(dx) - \int f(x)P_u^*(dx)) - \epsilon \\ & = -\epsilon. \end{aligned}$$

Since $\epsilon > 0$ is arbitrary,

$$\underline{\lim}_n \inf_{u\in[0,1]} (P_u^*(A) - P_{u,n}(A)) \geqq 0\,.$$

We can repeat the argument by taking F and A^0 in place of G and $\bar{A}$ to find

$$\underline{\lim}_n \inf_{u\in[0,1]} (P_{u,n}(A) - P_u^*(A)) \geqq 0\,.$$

Therefore, for any $\epsilon > 0$, by choosing sufficiently large n, we have

$$\inf_{u\in[0,1]} (P_u^*(A) - P_{u,n}(A)) + \epsilon \geqq 0 \geqq \sup_{u\in[0,1]} (P_u^*(A) - P_{u,n}(A)) - \epsilon.$$

This implies

$$\sup_{u\in[0,1]} |P_u^*(A) - P_{u,n}(A)| \leqq \epsilon,$$

which implies (145).

□

定理 *80* の証明. We basically repeat the idea of proof in [4, Theorem XI.3] for s and u. Put $D = \{s\in\mathbb{C} \mid |s| < C_\infty\}$, and let $K\subset D$ be a compact set and ℓ be a Jordan curve in D surrounding K, such that d, the distance between ℓ and K, is positive. Similarly, let ℓ_1 be a Jordan curve in $\mathcal{U}$ surrounding $[0,1]$, such that d_1, the distance between ℓ_1 and $[0,1]$, is positive. Applying Cauchy's formula twice, we have, for $(s,u)\in K\times[0,1]$,

$$g_{n,u}(s) = \oint_\ell g_{n,u}(\sigma) \frac{d\sigma}{2\pi\sqrt{-1}(\sigma - s)} = \oint_\ell \oint_{\ell_1} g_{n,\upsilon}(\sigma) \frac{d\upsilon}{2\pi\sqrt{-1}(\upsilon - u)} \frac{d\sigma}{2\pi\sqrt{-1}(\sigma - s)}\,.$$

Hence for (s,u), $(s',u')\in K\times[0,1]$,

$$|g_{n,u}(s)-g_{n,u'}(s')|\leqq \oint_\ell\oint_{\ell_1}|g_{n,\upsilon}(\sigma)|\frac{|\upsilon-u||s-s'|+|\sigma-s'||u-u'|}{|\upsilon-u||\sigma-s||\upsilon-u'||\sigma-s'|}\frac{d\upsilon\,d\sigma}{(2\pi)^2}\,.$$

By (140) we see that, for $(\sigma,\upsilon)\in\ell\times\ell_1$,

$$|g_{n,\upsilon}(\sigma)|\leqq C_\infty+M_\infty C_\infty^2$$

Let L and L_1 be the length of ℓ and ℓ_1, respectively, and put $C_1=\sup_{u\in\mathcal{U}}|u|<\infty$. Then, noting $\sup_{\sigma\in\ell,\,s\in K}|\sigma-s|\geqq d$ and $\sup_{\upsilon\in\ell_1,\,u\in[0,1]}|\upsilon-u|\geqq d_u$, we have

$$|g_{n,u}(s)-g_{n,u'}(s')|\leqq LL_1(C_\infty+M_\infty C_\infty^2)\frac{(2C_1|s-s'|+2C_\infty|u-u'|)}{(2\pi dd_1)^2}\,.$$

The coefficients of $|s-s'|$ and $|u-u'|$ in the right hand side is independent of n, u, u', s, s', which implies that $\{g_{n,\cdot}\mid n=1,2,3,\cdots\}$ is equicontinuous on $K\times[0,1]$. The Ascoli-Arzelà theorem implies that for any subsequence of $\{g_{n,\cdot}\}$, there exists subsubsequence which converges uniformly on $K\times[0,1]$. By 定理 74 we know that the limit is $g_u^*(s)$, which, in particular, is independent of subsequences. Hence $\lim_{n\to\infty}g_{n,u}(s)=g_u^*(s)$, uniformly in (s,u) on $K\times[0,1]$.

系 *81* の証明. For each n, u, and s, put $g_{n,u}(s)=-\log G_{n,u}(s)$. Then (148) implies (139). Note that $G_{n,u}(0)=1$, hence $g_{n,u}(0)=0$. With $G_{1,u}'(0)=-1$, we also have $g_{1,u}'(0)=1$.

By assumptions, $G_{1,u}(s)$ is regular and non-zero on $|s|\leqq C_0$. Hence $g_{1,u}(s)=-\log G_{1,u}(s)$ is regular on $|s|\leqq C_0$.

Put

$$M_1=\sup_{|s|=C_0,\,u\in\mathcal{U}}|G_{1,u}(s)-1|.$$

By assumption, $M_1<1$. Then noting that, for $|z|<1$,

$$|\log(1+z)|\leqq\int_0^1\left|\frac{z}{1+tz}\right|dt\leqq\frac{|z|}{1-|z|}\,,$$

we have

$$|g_{1,u}(s)|=|\log(1+(G_{1,u}(s)-1))|\leqq\frac{M_1}{1-M_1},\quad |s|=C_0\,,\ u\in\mathcal{U}.$$

Therefore

$$M_0=\sup_{|s|=C_0,\,u\in\mathcal{U}}|g_{1,u}(s)|<\infty. \tag{177}$$

As we have seen, $g_{1,u}(s)$ is regular on $|s|\leqq C_0$, and $g_{n,u}(0)=0$ and $g_{1,u}'(0)=1$. Therefore $\frac{1}{s}\left(\frac{g_{1,u}(s)}{s}-1\right)$ is regular on $|s|\leqq C_0$, Using Cauchy's theorem, we find, for $|s|\leqq C_0/2$,

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{s}\left(\frac{g_{1,u}(s)}{s}-1\right)\right|&=\left|\oint_{|\sigma|=C_0}\frac{1}{\sigma}\left(\frac{g_{1,u}(\sigma)}{\sigma}-1\right)\frac{d\sigma}{2\pi\sqrt{-1}(\sigma-s)}\right|\\&\leqq\sup_{|s|=C_0,\,u\in\mathcal{U}}\left|\frac{1}{s}\left(\frac{g_{1,u}(s)}{s}-1\right)\right|\frac{2\pi C_0}{2\pi(C_0-C_0/2)}\leqq\frac{2}{C_0^2}(M_0+C_0),\end{aligned}$$

where we used (177) in the last line. This implies (138) with $M=\frac{2}{C_0^2}(M_0+C_0)$ and $C=C_0/2$. We can apply 定理 72 and 定理 74 to find that there exist positive constants C_∞ and M_∞ such that for all $n=1,2,3,\cdots$ and $u\in\mathcal{U}$, $G_{n,u}(s)=e^{-g_{n,u}(s)}$ is regular and uniformly bounded in n and u, on $|s|\leqq C_\infty$, and that for each $u\in\mathcal{U}$ there exists a regular function G_u^* on $|s|<C_\infty$ such that

$$\lim_{n\to\infty}G_{n,u}(s)=G_u^*(s),\quad |s|<C_\infty\,,$$

uniformly on compact sets. 定理 72 and 定理 74 also imply, by (140) and (142),

$$\begin{aligned}&|-\log G_{n,u}(s)-s|\leqq M_\infty|s|^2,\quad |s|\leqq C_\infty\,,\ u\in\mathcal{U},\\&|-\log G_u^*(s)-s|\leqq M_\infty|s|^2,\quad |s|<C_\infty\,,\ u\in\mathcal{U}.\end{aligned}$$

補題 89 $|z-1-\log z| \leqq |\log z|^2 e^{|\log z|}$, $z \in \mathbb{C}$.

証明. Integrating $\dfrac{d^2}{dt^2}(e^{tw}-1-tw) = w^2 e^{tw}$ by t twice, we have

$$e^{tw} = 1 + tw + w^2 \int_0^t (t-s) e^{sw} ds.$$

Putting $t=1$ and $w = \log z$,

$$|z-1-\log z| \leqq |\log z|^2 \int_0^1 |e^{s \log z}| ds \leqq |\log z|^2 (1 \vee e^{\mathbf{Re}(\log \mathbf{z})}) \leqq |\log z|^2 e^{|\log z|}.$$

□

Then notinig

$$|G_{n,u}(s) - 1 + s| \leqq |G_{n,u}(s) - 1 - \log G_{n,u}(s)| + |\log G_{n,u}(s) + s|,$$

and by using 補題 89 with $z = G_{n,u}(s)$ for the first term in the right hand side, we see that there exist $C' > 0$ and $M' > 0$ such that

$$|G_{n,u}(s) - 1 + s| \leqq M'|s|^2, \quad |s| \leqq C', \ n = 1, 2, 3, \cdots, \ u \in \mathcal{U},$$

and similar uniform estimate for G^*_u.

Let $\mathcal{U}$ be a bounded open complex neighborhood of $[0,1]$, and $G_{1,u}(s)$ be regular in $u \in \mathcal{U}$ for each s. Let $K \subset \{s \in \mathbb{C} \mid |s| < C_\infty\}$ be a compact set.

補題 90 $|e^{z'} - e^z| \leqq |z'-z| e^{|z|+|z'|}$, $z, z' \in \mathbb{C}$.

証明. Put $f(t) = z + (z'-z)t$. Then

$$e^{z'} - e^z = \int_0^1 \frac{d}{dt} e^{f(t)} dt = (z'-z) \int_0^1 e^{f(t)} dt,$$

hence

$$|e^{z'} - e^z| \leqq |z'-z| \sup_{0 \leqq t \leqq 1} e^{|(1-t)z + tz'|} \leqq |z'-z| e^{|z|+|z'|}$$

□

Since (147) implies that $G_{1,u}(s) \neq 0$ for each $u \in \mathcal{U}$ and $s \in \mathbb{C}$ satisfying $|s| \leqq C_0$, $g_{1,u}(s) = -\log G_{1,u}(s)$ is regular in $u \in \mathcal{U}$ for each s. Applying 定理 80, we see that the convergence of $g_{n,u}(s)$ to $g^*_u(s)$ is uniform in $(s,u) \in K \times [0,1]$.

Using 補題 90 with $z = -g^*_u(s)$ and $z' = -g_{n,u}(s)$, we have

$$|G_{n,u}(s) - G^*_u(s)| \leqq |g^*_u(s) - g_{n,u}(s)| e^{|g^*_u(s)| + |g_{n,u}(s)|}.$$

Note that $g_{n,u}(s)$ and $g^*_u(s)$ are bounded uniformly in s, u, n. Therefore the convergence of $G_{n,u}(s)$ to $G^*_u(s)$ is uniform in $(s,u) \in K \times [0,1]$. □

定理 82 の証明. The statements on the generating functions in the neighborhood of 0 are direct consequences of 系 81. 系 81 and 定理 78 implies that $P_{n,u}$ converges weakly as $n \to \infty$ to a Borel probability measure P^*_u supported on non-negative reals. 定理 74 and 定理 78 imply that the generating function $G^*_u(s)$ of P^*_u is defined both on $\mathbf{Re}(\mathbf{s}) \geqq \mathbf{0}$ and in a neighborhood of 0, and satisfies the defining equations $G^{*'}_u(0) = -1$ and (149) in a neighborhood of 0.

If $\mathbf{Re}(\mathbf{s}) \geqq \mathbf{0}$ then $|G^*_u(s)| \leqq 1$, leading to

$$\mathbf{Re}(-\lambda_\mathbf{u} \log \mathbf{G}^*_\mathbf{u}(\mathbf{s}/\lambda_\mathbf{u})) = -\lambda_\mathbf{u} \log |\mathbf{G}^*_\mathbf{u}(\mathbf{s}/\lambda_\mathbf{u})| \geqq \mathbf{0},$$

and $G_{1,u}(s)$ is regular on $\mathbf{Re(s)} > \mathbf{0}$ and continuous on $\mathbf{Re(s)} \geqq \mathbf{0}$, hence uniqueness of analytic continuation implies that (149) holds also on $\mathbf{Re(s)} \geqq \mathbf{0}$. Similarly, if $\mathbf{Re(s)} \geqq \mathbf{0}$ then $|G_{n,u}(s)| \leqq 1$, leading to

$$\mathbf{Re}(-\lambda_{\mathbf{u}} \log \mathbf{G_{n,u}}(\mathbf{s}/\lambda_{\mathbf{u}})) \geqq \mathbf{0},$$

hence uniqueness of analytic continuation implies that (148) holds also on $\mathbf{Re(s)} \geqq \mathbf{0}$.

5Thus we have the corresponding uniform estimates stated in the theorem. Tightness of the family of the corresponding measures is a direct consequence of (151) and 命題 76.

定理 78 also implies that

$$\lim_{n\to\infty} G_{n,u}(s) = G_u^*(s),$$

uniformly on $\{s \in \mathbb{C} \mid |s| < C_\infty \text{ or } \mathbf{Re(s)} \geqq \mathbf{0}\}$.

The claim of the uniformity of convergence of $G_{n,u}(s)$ to $G_u^*(s)$ in (s,u) is also a direct consequence of 系 81.

Assume that $\mathbf{Re(s)} \geqq \mathbf{0}$ and $|s| < \lambda_- C_\infty$. Using (148) and (149), which we have proved above to hold for $\mathbf{Re(s)} \geqq \mathbf{0}$,

$$G_{n+1,u}(s) - G_u^*(s) = G_{1,u}(-\lambda_u \log G_{n,u}(s/\lambda_u)) - G_{1,u}(-\lambda_u \log G_u^*(s/\lambda_u)). \tag{178}$$

The assumption $1 = -G'_{1,u}(0) = \displaystyle\int_{[0,\infty)} \xi P_{1,u}(d\xi)$ implies, with dominated convergence theorem, that $G'_{1,u}(s)$ exists and satisfies

$$|G'_{1,u}(s)| = |\int_{[0,\infty)} \xi e^{-s\xi} P_{1,u}(d\xi)| \leqq 1, \tag{179}$$

for any s satisfying $\mathbf{Re(s)} \geqq \mathbf{0}$. (At $\mathbf{Re(s)} = \mathbf{0}$, the direction of differentiation is assumed to be restricted in a natural way.) Let $\mathbf{Re(s_i)} \geqq \mathbf{0}$, $i = 1, 2$, and for $0 \leqq t \leqq 1$, put $F(t) = s_1 + t(s_2 - s_1)$. Note that $\mathbf{Re(F(t))} \geqq \mathbf{0}$.

$$\begin{aligned}
&|G_{1,u}(s_2) - G_{1,u}(s_1)| \\
&= |G_{1,u}(F(1)) - G_{1,u}(F(0))| = \left|\int_0^1 \frac{d}{dt}(G_{1,u}(F(t)))\,dt\right| = |s_2 - s_1| \left|\int_0^1 G'_{1,u}(F(t))\,dt\right| \\
&\leqq |s_2 - s_1| \int_0^1 |G'_{1,u}(F(t))|\,dt \\
&\leqq |s_2 - s_1|,
\end{aligned}$$

where we used (179) in the last line.

Applying this formula on (178), we have,

$$\sup_{u\in[0,1]} |G_{n+1,u}(s) - G_u^*(s)| \leqq \sup_{u\in[0,1]} \lambda_u \sup_{u\in[0,1]} |\log G_{n,u}(s/\lambda_u)) - \log G_u^*(s/\lambda_u))|$$

By assumption, $|s/\lambda_u| < C_\infty$, hence we already know (uniform convergence in u) that the right hand side converges to 0 as $n \to \infty$, hence the left hand side also does, implying uniform convergence in $u \in [0,1]$ of $G_{n,u}(s)$ to $G_u^*(s)$ for s satisfying $\mathbf{Re(s)} \geqq \mathbf{0}$ and $|s| < \lambda_- C_\infty$.

We can repeat the argument inductively to conclude the uniform convergence for each s satisfying $\mathbf{Re(s)} \geqq \mathbf{0}$.

We will now move on to a proof of continuity of P_u^* in u. Assume that $\mathcal{U}$ is a topological space, $u \in \mathcal{U}$, $\displaystyle\lim_{u\to u_0} G_{1,u}(s) = G_{1,u_0}(s)$ uniformly on $|s| \leqq C_0$, and $\displaystyle\lim_{u\to u_0} \lambda_u = \lambda_{u_0}$.

定理 74 implies that $g_u^* = -\log G_u^*$ satisfies (141) and (142). In particular, $\{g_u^* \mid u \in \mathcal{U}\}$ is uniformly bounded, hence is a normal family on $|s| < C_\infty$. Then for any sequence in $\mathcal{U}$ converging to u_0, there exists a subsequence u'_n, $n = 1, 2, 3, \cdots$, such that $g_{u'_n}^*$ converges uniformly on compact sets in $|s| < C_\infty$ to a regular function h defined on $|s| < C_\infty$. Letting $u = u'_n \to u_0$ in (141) and (142),

$$h(s) = g_{1,u_0}(\lambda_{u_0} h(s/\lambda_{u_0})), \quad |s| < C_\infty, \tag{180}$$

and

$$|h(s) - s| \leqq M_\infty |s|^2, \quad |s| < C_\infty. \tag{181}$$

定理 74 implies that $h = g_{u_0}^*$, hence, in particular, h is independent of the subsequence $\{u'_n\}$. This proves

$$\lim_{n\to\infty} g_{u_n}^*(s) = g_{u_0}^*(s), \quad |s| < C_\infty,$$

uniformly on compact sets. 定理 78 then implies that for any sequence $\{u_n\}$ in $\mathcal{U}$ converging to u_0 , $P^*_{u_n}$ converges weakly to $P^*_{u_0}$ as $n\to\infty$.

Let $A\subset\mathbb{R}$ be a Borel set, satisfying $P^*_{u_0}(\partial A)=0$. Then we have proved that $\lim_{n\to\infty} P^*_{u_n}(A)=P^*_{u_0}(A)$ for any sequence satisfying $\lim_{n\to\infty} u_n=u_0$. This implies $\lim_{u\to u_0} P^*_u(A)=P^*_{u_0}(A)$. Since A is an arbitrary Borel set satisfying $P^*_{u_0}(\partial A)=0$, We finally see that P^*_u converges weakly to $P^*_{u_0}$ as $u\to u_0$.

Since, for any sequence u_n converging to u_0, $P^*_{u_n}$ converges weakly to $P^*_{u_0}$, the corresponding characteristic function $\varphi^*_{u_n}(t)$ converges to $\varphi^*_{u_0}(t)$ for each t, which implies continuity of $\varphi^*_{u_n}(t)$ in u for each $t\in\mathbb{R}$. □

定理 84 の証明. The definitions (153) and (154) inductively imply that $x_{c,u}$ is a fixed point of $\Phi_{n,u}$ for all n. The statement on the derivative at the fixed point then inductively follows from (154) and the chain rule.

By definition and assumptions,

$$0\leqq\Phi_{1,u}(x)<x,\quad 0\leqq x<x_{c,u}\,,$$

which implies that $\Phi_{n,u}(x)$ is non-negative and decresing in n. Hence the limit exists in $[0,x_{c,u})$, while the only solution to $\Phi_{1,u}(x)=x$, $x\in[0,x_{c,u})$ is $x=0$. Hence (155) holds.

We move on to a proof of (156). Since $\Phi_{1,u}(x)=\sum_{k=2} c_{k,u}x^k$ is continuous in $x\in[0,r_u)$, so is

$$R(x)=\sum_{k=3} c_{k,u}x^{k-3}=x^{-3}(\Phi_{1,u}(x)-c_{2,u}x^2). \tag{182}$$

Therefore $\lim_{x\to0} R(x)=R(0)=c_{3,u}$, which, with (155) implies

$$\lim_{n\to\infty} R(\Phi_{n,u}(x))=c_{3,u}\,,\quad 0\leqq x<x_{c,u}\,. \tag{183}$$

Let $0\leqq x<x_{c,u}$. Applying (182) to (154),

$$\log(c_{2,u}\Phi_{n+1,u}(x))-2\log(c_{2,u}\Phi_{n,u}(x))=\log(1+\Phi_{n,u}(x)R(\Phi_{n,u}(x))/c_{2,u}),\quad n=1,2,3,\cdots.$$

Iterating,

$$\log(c_{2,u}\Phi_{n+m,u}(x))-2^m\log(c_{2,u}\Phi_{n,u}(x))=\sum_{k=1}^{m}2^{m-k}\log(1+\Phi_{n+k-1,u}(x)R(\Phi_{n+k-1,u}(x))/c_{2,u}),$$
$$m=0,1,2,\cdots,\ n=1,2,3,\cdots,$$

which can easily be checked by induction on m. This proves that

$$2^{-n-m}\log(c_{2,u}\Phi_{n+m,u}(x))\leqq2^{-n}(\log(c_{2,u}\Phi_{n,u}(x))+\sup_{k\geqq n}\Phi_{k,u}(x)R(\Phi_{k,u}(x))/c_{2,u}),$$
$$m=0,1,2,\cdots,\ n=1,2,3,\cdots.$$

(155) implies that the right hand side is negative for sufficiently large n. Therefore

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\log\Phi_n(x)=\overline{\lim_{m\to\infty}}\,2^{-n-m}\log(c_{2,u}\Phi_{n+m,u}(x))<0\,.$$

□

定理 85 の証明. (i) Note that $\Phi_{n,u}(x_{c,u})=x_{c,u}$. Then the right hand side of (152) with z replaced by $\Phi_{n,u}(z)$ converges for $|z|\leqq x_{c,u}$. By induction, the McLaurin expansion of $\Phi_{n,u}(z)$ has finite radius of convergence. Put

$$\Phi_{n,u}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_{n,k}z^k. \tag{184}$$

Then

$$G_{n,u}(s)=\sum_{k=0}^{\infty}c_{n,k}x_{c,u}^{k-1}e^{-sk\lambda^{-n}}.$$

$\Phi_{n,u}(x_c)=x_c$ implies $G_{n,u}(0)=1$, which implies that a measure $P_{n,u}$ on $\{k\lambda^{-n}\mid k=0,1,2,\cdots\}$ defined by

$$P_{n,u}(\{k\lambda^{-n}\})=c_{n,k}x_{c,u}^{k-1},\quad k=0,1,2,\cdots,$$

is a Borel probability measure, and that $G_{n,u}$ is its generating function.

(ii) As noted in 命題 83, (146) holds with $\lambda_- \geqq 2$.

By definitions of $x_{c,u}$ and λ_u with (157), we see that $G_{1,u}(0) = 1$ and $G'_{1,u}(0) = -1$. The recursion relation (148) also follows directly from (157) and (154).

Note that, by 命題 83, r_u and $x_{c,u}$ are continuous in u. Since by assumptions $|\Phi_{1,u}(z) - 1|$ is continuous on a compact set $\{(u,z) \in \bar{\mathcal{U}} \times \mathbb{C} \mid |z| \leqq \frac{1}{2}(x_{c,u} + r_u)\}$, it is uniformly continuous. Since $\Phi_{1,u}(z)$ is finite on $|z| \leqq \frac{1}{2}(x_{c,u} + r_u)$, it is regular there. So for sufficiently small C_0, (147) and regularity holds. This proves all the assumptions in 系 81 (except those assumed at the end of 系 81 as additional assumptions), hence the assumptions in 定理 82.

(iii) 定理 82 implies that $G^*_u(s) = \displaystyle\int e^{-s\xi} P^*_u(d\xi)$ is regular at $s = 0$ and satisfies

$$|-\log G^*_u(s) - s| \leqq M_\infty |s|^2, \quad |s| < C_\infty\,,\ u \in \mathcal{U},$$

for positive constants M_∞ and C_∞. This implies that the mean $m_u = 1$ and the variance $v_u \leqq M_\infty$ $(< \infty)$.

To prove that $v_u > 0$, assume otherwise. Then $P^*_u(\{1\}) = 1$, hence $G^*_u(s) = e^s$. According to 定理 82, G^*_u satisfies (149), which, combined with (157), becomes

$$x_{c,u} G^*_u(s\lambda_u) = \Phi_{1,u}(x_{c,u} G^*_u(s)).$$

Therefore

$$x_{c,u} e^{s\lambda_u} = \Phi_{1,u}(x_{c,u} e^s),$$

in a neighborhood of $s = 0$, which is impossible because of the assumptions to the coefficients of $\Phi_{1,u}(z)$ in the definition of $\Phi_{1,u}$.

Using (149) and (157) again, with $\varphi^*_u(t) = G^*_u(-\sqrt{-1}t)$, we have

$$\varphi^*_u(\lambda_u t) = \frac{1}{x_{c,u}} \Phi_{1,u}(\varphi^*_u(t) x_{c,u}). \tag{185}$$

With (152), we have

$$\begin{aligned}
&|\varphi^*_u(\lambda_u t)| \leqq \sum_{k=0}^{\infty} c_{k,u} |\varphi^*_u(t)|^k x_{c,u}^{k-1} \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} c_{k,u} |\varphi^*_u(t)|^k x_{c,u}^{k-1} = |\varphi^*_u(t)|^2 \sum_{k=2}^{\infty} c_{k,u} |\varphi^*_u(t)|^{k-2} x_{c,u}^{k-1} \\
&\leqq |\varphi^*_u(t)|^2 \frac{1}{x_{c,u}} \sum_{k=2}^{\infty} c_{k,u} x_{c,u}^{k} = |\varphi^*_u(t)|^2 \frac{1}{x_{c,u}} \sum_{k=0}^{\infty} c_{k,u} x_{c,u}^{k} = |\varphi^*_u(t)|^2 \frac{1}{x_{c,u}} \Phi(x_{c,u}) \\
&= |\varphi^*_u(t)|^2,
\end{aligned}$$

where we used $c_{1,u} = c_{2,u} = 0$, non-negativity of $c_{k,u}$'s, and $|\varphi^*_u(t)| \leqq 1$.

Therefore, all the assumptions in the 定理 65 hold.

□

定理 87 の証明. (i) 定理 82 and the existence of density function ρ in 定理 65 imply that

$$\left|\int_{\mathbb{R}} e^{C'\xi} \rho_u(\xi) d\xi\right| \leqq 1 + C' + M' {C'}^2, \quad u \in \mathcal{U}.$$

Since ρ is continuous this implies

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}} e^{C'\xi} \rho_u(\xi) < \infty, \quad u \in \mathcal{U}.$$

(ii) Using (185) and (152) and the existence of continuous density ρ_u, we have

$$\lambda_u^{-1} \rho_u(\lambda_u^{-1}\xi) \geqq c_{2,u} x_{c,u} \rho_u * \rho_u(\xi) + c_{3,u} x_{c,u}^2 \rho_u * \rho_u * \rho_u(\xi), \tag{186}$$

where ρ_u^{*k} is the k-fold convolution of ρ_u .

By assumption, the second term in the right hand side of (186) is positive and $\lambda_u > 2$. By same reasoning as $\lambda_u \geqq 2$, there is a positive term in the right hand side, say at $k = k_0$, with $k_0 > \lambda$. Let $A \subset [0,\infty)$ be the support of ρ_u . Since mean is 1, there exists $x_0 \in A \setminus \{0\}$. Then (186) and continuity of ρ implies that $\dfrac{2}{\lambda_u} x_0 \in A$, and by induction, $\left(\dfrac{2}{\lambda_u}\right)^n x_0 \in A$, $n = 1,2,3,\cdots$, leading to $0 \in A$. Then $k\lambda_u^{-1}x_0 \in A$, $k = 0,1,2,\cdots,k_0$, and by induction $k\lambda_u^{-n} \in A$, $k = 0,1,2,\cdots,k_0^n$, $n = 1,2,3,\cdots$. This implies $A = [0,\infty)$. So $\rho(\xi) > 0$ for dense points in $[0,\infty)$. But then (186) and continuity of ρ imply that $\rho(\xi) > 0$ for all $\xi > 0$.

(iii) **補題 91** *For each u, there exists $n_{0,u}$, $M_u > 0$, $C_u > 0$, and a_u, such that*

$$|\varphi_{n,u}(t)| \leqq \frac{C_u}{x_{c,u}} e^{-M_u(|t|/a_u)^{\log 2/\log\lambda_u}}, \quad |t| \in [a_u\lambda_u^{-1}, a_u\lambda_u^{n-n_{0,u}}],\ n \geqq n_{0,u}\,. \tag{187}$$

証明. Note that (156) implies that if $0 \leqq x < x_{c,u}$, then there exist $C_u > 0$ and $M_u > 0$ such that

$$\Phi_{n,u}(x) < C_u e^{-M_u 2^n}, \quad n \geqq 0\,. \tag{188}$$

Since dominated convergence theorem implies that $\varphi_u^*(t)$ is continuous, 系 64 implies that there exist $a > 0$ and t_1 satisfying $a/\lambda \leqq |t_1| \leqq a$ such that

$$\sup_{a_u/\lambda_u \leqq |t| \leqq a_u} |\varphi_u^*(t)| = |\varphi_u^*(t_1)| < 1\,.$$

Using $\varphi_u^*(t) = G_u^*(-\sqrt{-1}t)$, and noting that $\lim_{n\to\infty} G_{n,u}(s) = G_u^*(s)$ uniformly in s on a neghborhood of 0, and then using (157), we see that there exist $\epsilon > 0$ and $n_{0,u}$ such that

$$|\Phi_{n,u}(x_{c,u}e^{\sqrt{-1}\lambda_u^{-n}t})| < x_{c,u} - \epsilon, \quad n \geqq n_{0,u},\ a_u/\lambda \leqq |t| \leqq a_u\,. \tag{189}$$

The two estimates (188) and (189) imply, for $m \geqq 0$ and $N \geqq n_{0,u}$ and $a_u/\lambda \leqq |t'| \leqq a_u$,

$$\begin{aligned}&|\Phi_{N+m,u}(x_{c,u}e^{\sqrt{-1}\lambda_u^{-N}t'})| = |\Phi_{m,u}(\Phi_{N,u}(x_{c,u}e^{\sqrt{-1}\lambda_u^{-N}t'}))| \leqq \Phi_{m,u}(|\Phi_{N,u}(x_{c,u}e^{\sqrt{-1}\lambda_u^{-N}t'})|)\\ &\leqq \Phi_{m,u}(x_{c,u} - \epsilon) \leqq C_u e^{-M_u 2^m}.\end{aligned} \tag{190}$$

Let $|t| \in [a_u\lambda_u^{-1}, a_u\lambda_u^{n-n_{0,u}}]$, and choose m such that $a_u/\lambda \leqq |t|\lambda^{-m} < a_u$. Then $0 \leqq m \leqq n - n_{0,u}$. Put, in (190), $N = n - m \geqq n_{0,u}$ and $t' = t\lambda^{-m}$. Then noting that

$$\varphi_{n,u}(t) = \frac{1}{x_{c,u}}\Phi_{n,u}(x_{c,u}e^{\sqrt{-1}\lambda^{-n}t}),$$

we have (187) from (190). □

We proceed with a proof of (159). Put

$$\tilde\varphi_{n,u}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{\sqrt{-1}\xi t} P_{n,u} * g_n(\xi)d\xi = \int e^{\sqrt{-1}\xi t} g_n(\xi - \eta)P_{n,u}(d\eta).$$

Then Fubini's theorem implies

$$\tilde\varphi_{n,u}(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2h_n^2}\varphi_{n,u}(t).$$

For a set A define χ_A by $\chi_A(t) = 1$, if $t \in A$, and 0 otherwise. Then 補題 91 implies a following bound uniform in n:

$$|\chi_{[0,a_u\lambda_u^{n-n_{0,u}}]}(|t|)\tilde\varphi_{n,u}(t)| \leqq |\chi_{[0,a_u\lambda_u^{n-n_{0,u}}]}(|t|)\varphi_{n,u}(t)| \leqq 1 \wedge \frac{C_u}{x_{c,u}}e^{-M_u(|t|/a_u)^{\log 2/\log\lambda_u}}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Therefore, dominated convergence theorem implies

$$\lim_{n\to\infty}\int |\chi_{[0,a_u\lambda^{n-n_{0,u}}]}(|t|)\tilde\varphi_{n,u}(t) - \varphi_u^*(t)|dt = 0\,.$$

On the other hand,

$$\begin{aligned}&\varlimsup_{n\to\infty}\int|\chi_{[0,a_u\lambda^{n-n_{0,u}}]}(|t|)\tilde{\varphi}_{n,u}(t)-\tilde{\varphi}_{n,u}(t)|dt \leqq \varlimsup_{n\to\infty} 2\int_{a_u\lambda^{n-n_{0,u}}}^{\infty} e^{-h_n^2t^22}dt\\ &\leqq \varlimsup_{n\to\infty} 2a_u^{-2}\lambda_u^{n_{0,u}-2}b^{-2}\lambda_u^n n^{-1}\exp(-a_u^2\lambda_u^{-2n_{0,u}}b^2n/2)=0,\end{aligned}$$

if $b > \dfrac{\sqrt{2\log\lambda_u}}{a_u}\lambda_u^{n_{0,u}}$. Therefore we have

$$\lim_{n\to\infty}\int|\tilde{\varphi}_{n,u}(t)-\varphi_u^*(t)|dt=0,$$

which implies that the Fourier transform of $P_{n,u}*g_n(\xi)$ converges in L^1 to that of $\rho_u(\xi)$. Therefore (159) holds.

(iv) Since

$$|\varphi_{u'}^*(t')-\varphi_u^*(t)| \leqq |\varphi_{u'}^*(t')-\varphi_{u'}^*(t)|+|\varphi_{u'}^*(t)-\varphi_u^*(t)|,\quad t,t'\in\mathbb{R},\ u,u'\in\mathcal{U},$$

it is sufficient to prove that $\varphi_u^*(t)$ is

(a) continuous in t uniformly in $u\in\mathcal{U}$, and

(b) continuous in u for each $t\in\mathbb{R}$.

(a) As we have noted before,

$$\int_{[0,\infty)}\xi P_{u'}^*(d\xi)=m_u=1,$$

hence

$$|\varphi_{u'}^*(t')-\varphi_{u'}^*(t)| \leqq \int_{[0,\infty)}|2\sin\frac{\xi(t'-t)}{2}|P_{u'}^*(d\xi) \leqq |t'-t|\int_{[0,\infty)}\xi P_{u'}^*(d\xi)=|t'-t|,$$

which implies that $\varphi_u^*(t)$ is continuous in t uniformly in $u\in\mathcal{U}$.

(b) As we noted above, r_u and $x_{c,u}$ are continuous in u, by 命題 83, and $\Phi_{1,u}(z)$ is continuous on $\{(u,z)\in\bar{\mathcal{U}}\times\mathbb{C} \mid |z|<r_u\}$, hence uniformly continuous on a compact set $\{(u,z)\in\bar{\mathcal{U}}\times\mathbb{C} \mid |z|\leqq\frac{1}{2}(x_{c,u}+r_u)\}$. Also by definition (157),

$$G_{1,u}(s)=x_{c,u}^{-1}\Phi_{1,u}(e^{-s/\lambda_u}x_{c,u}).$$

Hence $G_{1,u}(s)$ is uniformly continuous on $(u,s)\in[0,1]\times\{|s|\leqq C_0\}$ for a positive constant C_0 . In particular, it is continuous in $u\in[0,1]$, uniformly in s on $|s|\leqq C_0$.

Note also that by 命題 83, λ_u is continuous in u.

We have proved that the additional assumptions in the last part of 定理 82 hold. Therefore, by the last statement in 定理 82, $\varphi_u^*(t)$ is continuous in u for each $t\in\mathbb{R}$.

(v) As we noted before, 定理 82 implies that for family of measures P_u^*, $u\in\mathcal{U}$, the mean $m_u=1$ and the variance $\sup\limits_{u\in\mathcal{U}} v_u\leqq M_\infty\ (<\infty)$. With 命題 76 we further have uniform bound of moments to all order. We also know by 命題 86 that $\inf_{u\in[0,1]}v_u>0$. These facts are sufficient to prove u-uniform decay estimate 定理 63. As we have proved already, $\varphi_u^*(t)$ is continuous in $(u,t)\in[0,1]\times\mathbb{R}$. Then 定理 66 implies the claim.

□

C　指数型の Tauber 型定理．

この節は確率論講義録 [17] と regular.tex [19] (§B に引用) に入れるべき内容[60] だが，講義録執筆時点で入れ損なっている[61] ので，ここに [40] の主結論のみ挟んでおく．

[60] 20010105–06;12–17.

[61] 時間がない！

定理 92 ([40, Theorem 2.2]) ψ, ϕ を，$C^1(0,\infty)$ 級，非増加，下に凸，で $\phi'(+0)=-\infty$，$\phi'(\infty)=0$，$\psi'(+0)=-\infty$，$\psi'(\infty)=0$，を満たすとする．また， ψ^*, ϕ^* を $x>0$ に対して $\phi^*(x)=\inf_{s>0}(sx+\phi(s))$，$\psi^*(x)=\inf_{s>0}(sx+\psi(s))$，で定義する[62]．さらに， $\{a_n\}$ を $+\infty$ に発散する正値数列，U_n を $[0,\infty)$ 上右連続非減少な関数で $U_n(0)=0$ を満たすものとする．このとき，

$$\psi(s)\leqq \varliminf_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}\log\int_0^\infty e^{-a_n sx}dU_n(x)\leqq \varlimsup_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}\log\int_0^\infty e^{-a_n sx}dU_n(x)\leqq\phi(s),\quad s>0,$$

ならば

$$\phi^*(\xi_*(s^*(x)))\leqq \varliminf_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}\log U_n(x)\leqq \varlimsup_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}\log U_n(x)\leqq \phi^*(x),\quad x>0\,.$$

ここで

$$s^*(x)=\sup\{s\mid \psi(s)+sx\leqq\phi^*(x)\},\quad x>0,$$

および，

$$\xi_*(s)=\inf\{\xi\mid \phi^*(\xi)-s\xi\geqq\psi(s)\},\quad s>0.$$

注 33 $\phi^*(\xi)-s^*(x)\xi=\psi(s^*(x))$ の解が x と $\xi_*(s^*(x))$. ◇

証明は文献に任せる．

定理 92 を §B に適用しやすい形に変形する．

系 93 *(i)* P を $[0,\infty)$ に *support* された 1 次元 *Borel probability measure*，$G(s)=\int_0^\infty e^{-s\xi}\mathrm{P}[\,d\xi\,]$，$s>0$, をその母関数とする． $C_1>0$, $C_2>0$, $0<\nu<1$ が存在して，

$$-C_1\leqq \varliminf_{s\to\infty}s^{-\nu}\log G(s)\leqq \varlimsup_{s\to\infty}s^{-\nu}\log G(s)\leqq -C_2$$

ならば $C_3>0$, $C_4>0$ が存在して

$$-C_3\leqq \varliminf_{x\to 0}x^{\nu/(1-\nu)}\log\mathrm{P}[\,[0,x]\,]\leqq \varlimsup_{x\to 0}x^{\nu/(1-\nu)}\log\mathrm{P}[\,[0,x]\,]\leqq -C_4\,,\quad x>0\,.$$

(ii) $n=1,2,3,\cdots$ に対して P_n を $[0,\infty)$ に *support* された 1 次元 *Borel probability measure*，$G_n(s)=\int_0^\infty e^{-s\xi}\mathrm{P}_n[\,d\xi\,]$, $s>0$, をその母関数とする．

$n_0\geqq 1$, $s_0\geqq 0$, $C_i>0$, $i=1,2,3,4$, と $0<\nu<1$ $(\lambda=2^{1/\nu})$ が存在して，

$$C_1\exp(-C_2s^\nu)\leqq G_n(s)\leqq C_3\exp(-C_4s^\nu),\quad n\geqq n_0+\log_\lambda s,\ s\geqq s_0\,,$$

ならば $C_5>0$, $C_6>0$ が存在して， $\lim_{n\to\infty}2^{n(1-\nu)/\nu}\alpha_n=\infty$ かつ $\lim_{n\to\infty}\alpha_n=0$ なる任意の正項数列 $\{\alpha_n\}$ に対して，

$$-C_5\leqq \varliminf_{n\to\infty}{\alpha_n}^{\nu/(1-\nu)}\log\mathrm{P}_n[\,[0,\alpha_n]\,]\leqq \varlimsup_{n\to\infty}{\alpha_n}^{\nu/(1-\nu)}\log\mathrm{P}_n[\,[0,\alpha_n]\,]\leqq -C_6\,.$$

注 34 *(i)* 最初の主張については，証明にあらわに書かれているように，C_3, C_4 は C_1, C_2, ν で決まる．２番目の主張についても同様に， C_5, C_6 は s_0, C_i, $i=1,2,3,4$, ν で決まる．

(ii) 二つ目の主張については，$n\geqq n_0+\log_\lambda s$ の右辺の対数の底は本質的．証明で $G({a_n}^{1/\nu}s)$ を調べるので，a_n の発散の度合いに関する仮定との整合性から必要な s の範囲に条件が付く．

◇

証明. (i) $\{a_n\}$ を $+\infty$ に発散する正値数列，$U_n(x)=\mathrm{P}[\,[0,{a_n}^{1-1/\nu}x]\,]$，$\psi(s)=-C_1s^\nu$，$\phi(s)=-C_2s^\nu$，とすると，定理 92 の仮定は全て満たされる．また，$C_4=(1-\nu)\nu^{\nu/(1-\nu)}C_2^{1/(1-\nu)}$，$C_1y^\nu-y=C_4$ の大きい方の解を $y=A$，$C_4y^{-\nu/(1-\nu)}+Ay=C_1A^\nu$ の小さい方の解を $y=B$，$C_3=C_4B^{-\nu/(1-\nu)}$，とおくと，仮定の下で $C_3>0$, $C_4>0$ であって，順に，

$$\phi^*(x)=-C_4x^{-\nu/(1-\nu)},\quad s^*(x)=Ax^{-1/(1-\nu)},\quad \xi_*(s^*(x))=Bx,\quad x>0\,.$$

[62] このとき $\phi(s)=\sup_{x>0}(-sx+\phi^*(x))$.

よって，定理 92 から，

$$-C_3x^{-\nu/(1-\nu)} \leqq \varliminf_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}\log U_n(x) \leqq \varlimsup_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}\log U_n(x) \leqq -C_4x^{-\nu/(1-\nu)}, \quad x>0\,.$$

これより（連続変数による極限への移行は背理法によって）主張を得る．

(ii) 先ず，一般性を失うことなく最初から $s_0=0$ とおいてよいことに注意する．なぜなら，仮定と母関数の s についての単調性から，$0 \leqq s \leqq s_0$ で

$$C_1\exp(-C_2{s_0}^{\nu})\exp(-C_2s^{\nu}) \leqq C_1\exp(-C_2{s_0}^{\nu}) \leqq G_n(s_0) \leqq G_n(s) \leqq 1 \leqq \exp(C_2{s_0}^{\nu})\exp(-C_2s^{\nu})$$

となるから．

次に $a_n={\alpha_n}^{-\nu/(1-\nu)}$, $n\in\mathbb{N}$, とおくと，仮定からこれは発散する正項数列．さらに，$U_n(x)=\mathrm{P}_n[\,[0,{a_n}^{1-1/\nu}x]\,]$, $x\geqq 0$, $\psi(s)=-C_2s^{\nu}$, $\varphi(s)=-C_4s^{\nu}$, とすると，定理 92 の仮定は全て満たされる．よって，定理 92 から，

$$-C_5x^{-\nu/(1-\nu)} \leqq \varliminf_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}\log U_n(x) \leqq \varlimsup_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}\log U_n(x) \leqq -C_6x^{-\nu/(1-\nu)}, \quad x>0\,.$$

$x=1$ とおくと，主張を得る．

□

これによって 定理 85 の ρ_u の原点付近の decay を得ることができる．

定理 94 $\Phi_{n,u}$, $n=1,2,3,\cdots$, が *(152)* と *(154)* とによって定義された列で， *(152)* の後に列挙した仮定を満たしているとする．

ν を（定理 *85* で与えられているとおり），$\nu_u=\dfrac{\log 2}{\log\lambda_u}$，$\lambda_u=\Phi'_{1,u}(x_{c,u})$，$\Phi_{1,u}(x_{c,u})=x_{c,u}>0$ で定義される定数，とするとき，以下が成り立つ．

(i) 各 $u\in\mathcal{U}$ に対して，$\Phi_{n,u}$ から *(157)* で定義される $G_{n,u}$ と，定理 *85* で与えられる $G_{n,u}$ を母関数とする $[0,\infty)$ 上の確率測度 $\mathrm{P}_{n,u}$ について，$C=C_u>0$, $C'=C'_u>0$ が存在して，$\lim_{n\to\infty}2^{n(1-\nu)/\nu}\alpha_n=\infty$ かつ $\lim_{n\to\infty}\alpha_n=0$ なる任意の正項数列 $\{\alpha_n\}$ に対して，

$$-C \leqq \varliminf_{n\to\infty}{\alpha_n}^{\nu/(1-\nu)}\log\mathrm{P}_{n,u}[\,[0,\alpha_n]\,] \leqq \varlimsup_{n\to\infty}{\alpha_n}^{\nu/(1-\nu)}\log\mathrm{P}_{n,u}[\,[0,\alpha_n]\,] \leqq -C'\,.$$

もし $\mathcal{U}\subset\mathbb{R}$ が閉区間 *(*例えば $[0,1]$*)* ならば，C, C' は u に無関係な正数にとれる．

(ii) 定理 *85* で与えられる $[0,\infty)$ 上の確率測度 P^*_u について， $C=C_u>0$, $C'=C'_u>0$ が存在して

$$-C \leqq \varliminf_{x\to 0}x^{\nu/(1-\nu)}\log P^*_u[[0,x]] \leqq \varlimsup_{x\to 0}x^{\nu/(1-\nu)}\log P^*_u[[0,x]] \leqq -C', \quad x>0\,.$$

もし $\mathcal{U}\subset\mathbb{R}$ が閉区間 *(*例えば $[0,1]$*)* ならば，C, C' は u に無関係な正数にとれる．

証明． (i) 定理 85, (157), (152) とその続きの $c_{k,u}$ に関する仮定から

$$G_{n+1,u}(s)=\sum_{k\geqq 2}c_{k,u}x_{c,u}^{k-1}G_{n,u}(s/\lambda_u), \quad n=1,2,3,\cdots,\ s\geqq 0,$$

だが，母関数は $G_{n,u}(s)\in[0,1]$, $s\geqq 0$, だから $x_{c,u}$ の定義と合わせると，

$$c_{2,u}x_{x,u}G_{n,u}(s/\lambda)^2 \leqq G_{n+1,u}(s) \leqq G_{n,u}(s/\lambda)^2, \quad n=1,2,3,\cdots,\ s\geqq 0\,. \tag{191}$$

$s_0>0$ を任意に固定する．$s\geqq s_0$ に対して $m=m(s)=[\log_{\lambda_u}(s/s_0)]$ $(\geqq 0)$ とおくと，$s_0\leqq s\lambda_u^{-m}<s_0\lambda$ となるので，母関数 $G_{n,u}(s)$ の s についての単調性から，

$$\begin{aligned}&(c_{2,u}x_{c,u})^{-1}(c_{2,u}x_{c,u}G_{n,u}(s_0\lambda))^{2^m} \leqq (c_{2,u}x_{c,u})^{-1}(c_{2,u}x_{c,u}G_{n,u}(s\lambda^{-m}))^{2^m}\\ &\leqq G_{n+m,u}(s) \leqq G_{n,u}(s\lambda_u^{-m})^{2^m} \leqq G_{n,u}(s_0)^{2^m}, \quad n=1,2,3,\cdots,\ s\geqq s_0\,.\end{aligned}$$

$0 \leqq G_{n,u}(s) \leqq 1$ と $\frac{1}{2}s^{\nu} < 2^m \leqq s^{\nu}$ から,

$$\frac{1}{c_{2,u}x_{c,u}}(c_{2,u}x_{c,u}G_{n,u}(s_0\lambda))^{s^{\nu}} \leqq G_{n+m(s),u}(s) \leqq G_{n,u}(s_0)^{s^{\nu}}, \quad n = 1,2,3,\cdots,\ s \geqq s_0\,.$$

定理 85 に基づいて 定理 82 が成り立つので，特に (151) から,

$$1 - s - M's^2 < G_{n,u}(s) < 1 - s + M's^2,\ \ 0 \leqq s \leqq C'\,,\ n = 1,2,3,\cdots,\ u \in \mathcal{U},$$

となる正定数 M', C' がある．また， $c_{2,u}$, $x_{c,u}$, λ_u は u について連続なので $[0,1]$ 上で有界なことに注意する．各点で正なので 0 からも一様に離れている．従って $s_0 > 0$ を十分小さくとれば，($u \in [0,1]$ にもよらない) 正数 C_i, $i = 1,2,3,4$, が存在して,

$$C_1 \exp(-C_2 s^{\nu_u}) \leqq G_{N,u}(s) \leqq C_3 \exp(-C_4 s^{\nu_u}), \quad N \geqq \log_{\lambda_u}(s/s_0),\ s \geqq s_0\,,\ u \in [0,1].$$

よって 系 93 から主張を得る.

u に関する一様性で気になるのは ν_u の u 依存性だけだが，u について連続なことと $u \in [0,1]$ が有界閉集合であることから，仮定の下で ν_u は一様に 0 からも 1 からも離れている．よって，系 93 の証明にあるあらわな形から問題がないことが分かる.

(ii) P^*_u の母関数

$$G^*_u(s) = \int_0^{\infty} e^{-s\xi} P^*_u(d\xi) = \int_0^{\infty} e^{-s\xi}\rho_u(\xi)d\xi, \quad s \geqq 0,$$

に対して (149) によって (191) のアナロジー

$$c_{2,u}x_{x,u}G^*_u(s/\lambda)^2 \leqq G^*_u(s) \leqq G^*_u(s/\lambda)^2, \quad s \geqq 0,$$

が成り立つ．従って， (191) の続きと同様の議論が成り立つ．また，定理 82 の (151) のすぐ下に主張されているように (151) と同様の評価が成り立つ．特に $s_0 > 0$ を十分小さくとれば,

$$C_1 \exp(-C_2 s^{\nu_u}) \leqq G^*_u(s) \leqq C_3 \exp(-C_4 s^{\nu_u}),\ s \geqq s_0\,,\ u \in [0,1],$$

を満たす $C_i > 0$ が u について一様にとれる．よって 系 93 から主張を得る.

u に関する一様性も上の場合と同様である.

□

注 35 *(i)* 定理 *85* の ρ_u の遠方の *decay* の評価を指数型のタウバー型定理から得るには母関数 $G(s)$ の $s \to \infty$ での漸近形が必要だが，*random walk* では *(61)* のように，母関数は $z = \exp(-\cdots s)$ の有限のところに *pole* があるので，母関数の収束半径も有限．従って遠方は定理 *87* のような普通の指数関数型 *decay* ではないか？[63]

(ii) *Recursion* を s に関して逆向きに使うと

$$C_1 e^{-C_2 s^{\nu}} \leqq G^*(s) \leqq C_3 e^{-C_4 s^{\nu}},\ \ 0 \leqq s \leqq \delta,$$

が，ある正数 δ, C_i, $i = 1,2,3,4,$ に対して成り立つ．しかし，母関数の $s = 0$ 付近は全測度 *(1)* を見ているだけなので，1 からのずれでも見ないかぎり，使い物にならない[64]

◇

[63] 未検討.
[64] 1 からのずれが見えるくらいだったら，最初から母関数は使わないだろう．母関数は 0 か ∞ になる s の付近の情報が元の確率測度の漸近情報を引っぱり出すのに便利.

D Law of iterated logarithm.

Mean square displacement の指数 $\mathrm{E}[\,W_n^p\,] \sim n^{p\nu}$ が path の「ぎざぎざ」の度合いを示す最初の指標だとすると，その次の指標として到達範囲の評価 定理 100 のアナロジーが成り立つ.（なお，その具体形は ν (と空間のフラクタル次元等) で決まるので，mean square displacement より詳細な性質なのに，本質は (適当な仮定の下で) mean square displacement と同時に定まりそうに見える．厳密な結果の詳細は略す ([36] の文献を参照) が，§A.11 にそのことを支持する直感的議論を掲げた.）

定理 100 タイプの評価の，path の形状の性質における一つの帰結として law of iterated logarithm を（一般化を意識しながら）まず 1 次元 simple random walk について説明する．Law of iterated logarithm は，ブラウン運動と SRW に共通な path の性質の一つで古くから知られている [10, §VIII.5], [8, §7.9][65] .

LIL は [10] に言及されているように，広くマルコフ過程全体に対して成り立つことが古くから知られているが，当時の議論は lower bound に関してはマルコフ性が本質だった.

最後にくりこみ群の視点からの別証明の可能性に言及しておく.

D.1 Upper bound from decay estimate.

LIL 上からの評価は hitting time の上からの評価があればどんな確率連鎖でも成り立つ.

定理 95 *W_n, $n \in \mathbb{Z}_+$, を実確率変数列 (1 次元確率連鎖) とする.（SRWである必要はない.）もし，$C_{+,i} > 0$, $i = 1, 2, 3$, と $u_+ > C_{+,2}^{-(1-\nu)}$ と $0 < \nu < 1$ が存在して，*

$$\mathrm{P}[\max_{0\leqq k\leqq n} |W_k| \geqq x\,] \leqq C_{+,1} e^{-C_{+,2}(xn^{-\nu})^{1/(1-\nu)}}, \quad 0 < x \leqq u_+\, n^{\nu} (\log\log n)^{1-\nu},\ n \geqq C_{+,3}\,, \tag{192}$$

が成り立てば，

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|W_n|}{\psi_+(n)} \leqq C_{+,2}^{-(1-\nu)} \tag{193}$$

が成り立つ．ここで $\psi_+(n) = n^{\nu}(\log\log n)^{1-\nu}$, $n \in \mathbb{N}$, とおいた.

注 36 *(i)* 結論の $\psi_+(n)$ の n^ν の係数に $\log\log$ という関数があることから *iterated logarithm* の名前がついている.

証明からわかるように，仮定の評価 *(192)* の指数部の形からこの関数形が決まってしまうので，*(192)* の指数部の形を表現した定理と言ってよいだろう.

(ii) *Mean square displacement* の観点からは x は n^ν の程度である．仮定の x の範囲はこれからごくわずか遠いところまで届いた *path* についても一様な上からの評価があれば十分であることを言っている．うまく行くとき *(*例えば *SRW)* は $x = O(n^{\nu+\epsilon})$ で仮定と同様の評価を得ることがやさしい（このとき，もちろん仮定の u は自由にとれる）.

通常の中心極限定理は $y = xn^{-\nu}$ を固定して $n \to \infty$ としたときに仮定のような評価が（等号で）成り立つことを主張する．必要な仮定は中心極限定理の結果と似ているが，変数の取りうる範囲がわずかに広い.

SRW(2 項分布 *)* の中心極限定理は最初から適用範囲の広い状態で知られていた *[10, §VII.2,5]*.

(iii) *(192)* の評価は $x = o(n^\nu(\log\log n)^{1-\nu})$ ではいらないが， $C_{+,1}$ を十分大きく取れば $x = O(n^\nu)$ では必ず成り立ってしまうので，排除できる範囲はわずかだから省略した.

◇

定理 *95* の証明.

定理 95 の証明には Borel–Cantelli 第 1 定理 定理 56 を使う.

$\lambda > 1$ を任意にとる．仮定から $\lambda > a^\nu > \lambda \dfrac{1}{u' C_{+,2}^{1-\nu}}$ なる $a > 1$, $C_{+,2}^{-(1-\nu)} < u' < u_+$ が存在する．ψ_+ が増加関数であることに注意して，仮定を $n = [a^{j+1}]$, $x = \lambda\psi_+(a^j)$ で使うことにより，十分大きい j_0 に対

[65] 但し，SRW では歩数無限の方向の漸近形，ブラウン運動では（self-similarity があるのでどっち向きとも言えるが，Hölder 連続性との関連で path の性質として特に）短時間側の性質として定式化されるのが普通である点で，みかけが違う.

して

$$\begin{aligned}
&\sum_{j\geqq j_0} \mathrm{P}[\max_{a^j\leqq k<a^{j+1}} \frac{|W_k|}{\psi_+(k)} \geqq C_{+,2}^{-(1-\nu)}\lambda\,] \leqq \sum_{j\geqq j_0} \mathrm{P}[\max_{k<a^{j+1}} |W_k| \geqq \lambda C_{+,2}^{-(1-\nu)}\psi_+(a^j)\,] \\
&\leqq \sum_{j\geqq j_0} C_{+,1}(j\log a)^{-(\lambda a^{-\nu})^{1/(1-\nu)}} \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

よって Borel–Cantelli 第 1 定理 定理 56 から，殆ど全ての $\omega\in\Omega$ に対して，ある $j_1(\omega)$ 以降の j について

$$\max_{a^j\leqq k<a^{j+1}} \frac{|W_k(\omega)|}{\psi_+(k)} < \lambda C_{+,2}^{-(1-\nu)}.$$

よって $\overline{\lim_{k\to\infty}} \dfrac{|W_k(\omega)|}{\psi_+(k)} < \lambda C_{+,2}^{-(1-\nu)}$．これが任意の $\lambda>1$ に対して成り立つから ($\lambda=1+p^{-1}$, $p\in\mathbb{N}$, で共通部分をとるいつもの論法で) 主張を得る． □

D.2 Upper bound (Simple random walk).

W_n が 1 次元 SRW のとき 定理 95 の仮定が成り立つことを示す．

まず，命題 3 の例題を復習しておく．

系 96 (命題 3 の系) $\{W_n\}$ を 1 次元 *simple random walk* とし，$m\in\mathbb{Z}$ の *hitting time* を T_m と書くとき，

$$\mathrm{P}[\max_{0\leqq k\leqq n} W_k \geqq m\,] = \mathrm{P}[\,T_m \leqq n\,] = 2\mathrm{P}[\,W_{n+1} > m\,],\ m,n\in\mathbb{N}.$$

証明. Hitting time の定義と，命題 3 (で x 方向に m ずらして時間を反転させた主張) より直ちに結論を得る． □

命題 97 $\{W_n\}$ が 1 次元 *SRW* のとき，任意の $\epsilon>0$ と $C>0$ に対して，$C'>0$ が存在して

$$\mathrm{P}[\,W_n \geqq x\,] \leqq e^{-x^2/(2n)},\ \ 0<x\leqq Cn^{1-\epsilon},\ n\geqq C'. \tag{194}$$

注 37 *(i)* 対称性から， $\mathrm{P}[\,|W_n|>x\sqrt{n}\,]$ についても定数を除いて同様の評価が成り立つ．従って特に，1 次元 *SRW* に対して 定理 *95* の仮定が成り立つ．

(ii) もっと精密な結果が容易に得られる *(*定理 *100,* 系 *101)* が，定理 *95* の仮定の証明にはこれで十分である．その上証明がやたら簡単である *(*定理 *100* では *Stirling* 公式とテーラー定理の剰余項の一様評価が不可避と思う*)*.

なお，定理 *95* で必要な x,n の関係に比べてやたらに広い範囲で成り立っているが，x のべきを落とした非精密な内容 *(*定理 *100* を参照*)* なのと，下からの評価が狭い範囲でしか成り立たない．

◇

証明. チェビシェフの不等式から，

$$\mathrm{P}[\,W_n \geqq x\,] \leqq e^{-\lambda x}\mathrm{E}[\,e^{\lambda X_1}\,]^n = e^{-\lambda x}(\cosh\lambda)^n$$

が任意の $x\in\mathbb{R}$ と $\lambda\geqq 0$ と $n\in\mathbb{Z}_+$ に対して成り立つので，$\lambda=x/n$ とすると，

$$\mathrm{P}[\,W_n \geqq x\,] \leqq e^{-x^2/n}(\cosh\frac{x}{n})^n,\ \ x>0,\ n>0\,.$$

$C'>0$ を $\cosh\dfrac{C}{C'^{\epsilon}} \leqq 3$ となるようにとると，$0<x\leqq Cn^{1-\epsilon}$, $n\geqq C'$ のとき，

$$\cosh\frac{x}{n} \leqq 1+\frac{x^2}{2n^2}+\frac{x^4}{24n^4}\cosh\frac{x}{n} \leqq 1+\frac{x^2}{2n^2}+\frac{x^4}{8n^4} \leqq e^{x^2/(2n^2)}$$

となるので $\mathrm{P}[\,W_n \geqq x\,] \leqq e^{-x^2/(2n)}$ を得る． □

定理 95, 系 96, 命題 97 から 1 次元 SRW について law of iterated logarithm の上からの評価を得る．

系 98 1 次元 *simple random walk* では *(193)* が成り立つ．

D.3 Lower bound (Simple random walk).

Random walk (独立確率変数列の和) の LIL の lower bound は伝統的に (192) に類似の形の下からの評価と，random walk の (時間方向の)Markov 性を用いてきた. (前者については，simple random walk ではドモアブルーラプラスの中心極限定理によって可能.)

本当は細かい構造の (統計的な) 繰り返し（スケール不変性）が本質であるから，この証明は不満. $\mathbb{Z}$ を含むある種のフラクタル上の RW や self-repelling walk では「細かさの方向」の branching process (スケール方向の Markov 性) による LIL の証明が可能で，そのほうが良い証明だと思うが，技術的に難しいので伝統的な証明をまず紹介する.

定理 99 *W_n, $n \in \mathbb{Z}_+$, を時間的に一様な 1 次元 random walk (実確率変数列で i.i.d. の和になっているもの) とする．もし，$C_{\pm,i} > 0$, $i = 1, 2, 3$, と $K > 0$ と $u_\pm > C_{\pm,2}^{-(1-\nu)}$ と $0 < \nu < 1$ が存在して，(192) と*

$$C_{-,1} e^{-C_{-,2}(xn^{-\nu})^{1/(1-\nu)}} \leqq \mathrm{P}[\,|W_n| \geqq x\,], \quad Kn^\nu < x \leqq u\,n^\nu (\log\log n)^{1-\nu},\ n \geqq C_{3,-}\,, \tag{195}$$

が成り立てば,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|W_n|}{\psi_-(n)} \geqq C_{2,-}^{-1} \tag{196}$$

が成り立つ．ここで $\psi_-(n) = n^\nu (\log\log n)^{1-\nu}$, $n \in \mathbb{N}$, とおいた.

注 38 *(i) $C_{2,-} = C_{2,+}$ とできれば $\psi_+ = \psi_- = \psi$ とおけるので，古典的な low of iterated logarithm*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|W_n|}{\psi(n)} = 1 \tag{197}$$

を得る (1 次元 SRW では $C_{2,-} = C_{2,+}$ でこのことが成り立っている定理 100).

(ii)

(iii) (192) のときと違って，(195) の適用範囲の x の下限を明示的に限った．これは $x = o(n^\nu)$ のとき $\mathrm{P} \geqq C_1$ を主張してしまうので，不要に強い仮定が入るのを嫌ったため (LIL が成り立つ状況でこれが成り立たないとは考えにくいが)．また， $x = o(n^\nu(\log\log n)^{1-\nu})$ ではいらないので下限はそれだけ上がるが，式を面倒にするのを避けた.

(iv) Upper bound, lower bound ともに連続極限 (例えばブラウン運動) でも同様の性質が知られているが，このときは $x = O(t^\nu)$ で評価があれば十分なようである．この違いがどこから来るのか詳細を確認していないが，連続極限では自己相似性が正確に成り立つ（確率連鎖では，1 歩より細かい構造はない）ことから来るのだろうと思われる.

今日ではまずブラウン運動について LIL を証明し，そのあとで SRW はブラウン運動に近い (almost sure invariance principle) ことを言って SRW の LIL を証明するのが常道のようである [8, §7.9]．これは上記の視点であろう．極めて重要な視点だが，連続極限そのものへの言及は確率過程論の講義に期待して，この講義では意識的に避ける.

◇

定理 *99* の証明.

定理 99 の証明には Borel–Cantelli 第 2 定理 定理 57 を用いる.

$0 < \lambda < 1$ を任意に取る．仮定から $C_{-,2}^{-(1-\nu)} < u' < u_-$ がとれ，また， $a_0 > 1$ がとれて，$a > a_0$ ならば $\lambda \left(\dfrac{a}{a-1}\right)^\nu < 1$ とできる.

$D_j = W_{[a^j]} - W_{[a^{j-1}]}$ とおくと時間的に一様な RW という仮定から $\{D_j\}$ は独立で D_j の分布は $W_{[a^j]-[a^{j-1}]}$ に等しい．ψ_- が増加関数であることに注意して，仮定を $n = [a^j] - [a^{j-1}]$, $x = \lambda\psi_-(a^j)C_{2,-}^{-1}$ で使うことにより，十分大きい j_0 に対して

$$\sum_{j\geqq j_0} \mathrm{P}[\,\frac{|D_j|}{\psi_-(a^j)} \geqq \lambda C_{2,-}^{-1}\,] \geqq \sum_{j\geqq j_0} C_{-,1}(j\log a)^{-(\lambda(\frac{a+0}{a-1})^\nu)^{1/(1-\nu)}}$$
$$= \infty.$$

($a+0$ と書いたのは a より大きい数で，仮定の範囲でうまく取る.)

よって Borel–Cantelli 第2定理 定理 57 から (定理 95 の証明の最後の部分と同様の論理で),

$$\overline{\lim_{j\to\infty}} \frac{|W_{[a^j]} - W_{[a^{j-1}]}|}{\psi_-(a^j)} \geqq C_{2,-}^{-1}, \quad a.s..$$

他方，仮定の下で 定理 95 が成り立つから，殆ど全ての ω と任意の $\epsilon > 0$ に対して j_1 がとれて，$j > j_0$ ならば

$$\begin{aligned} \frac{W_{[a^j]}}{\psi_-(a^j)C_{2,-}^{-1}} &\geqq 1 - \epsilon - (1+\epsilon)\frac{\psi_-(a^{j-1})}{\psi_+(a^j)}\left(\frac{C_{2,-}}{C_{2,+}}\right)^{1-\nu} \\ &\geqq 1 - \epsilon - (1+\epsilon)\frac{1}{a^\nu}\left(\frac{C_{2,-}}{C_{2,+}}\right)^{1-\nu}. \end{aligned}$$

よって，

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|W_n|}{\psi_-(n)C_{2,-}^{-1}} \geqq \overline{\lim_{j\to\infty}} \frac{|W_{[a^j]}|}{\psi_-(a^j)C_{2,-}^{-1}} \geqq 1 - \frac{1}{a^\nu}\left(\frac{C_{2,-}}{C_{2,+}}\right)^{1-\nu}.$$

これが任意の $a > a_0$ で成り立つから，主張を得る．

□

次の性質は中心極限定理の結果と似ているが，変数の取りうる範囲が 命題 1 より強い ([10, §VII.2])．今まで通り $A_n/B_n \to 1$ となることを $A_n \sim B_n$ 等と書く．

定理 100 (ドモアブルーラプラスの極限定理) $n \in \mathbb{Z}_+$, $y \in \mathbb{R}$ に対して $h_n = 2/\sqrt{n}$, $x_y = (y - \frac{n}{2})h$ とおく．$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ が $h_n x_\alpha^3 \to 0$, $h x_\beta^3 \to 0$, を満たしながら $n \to \infty$ とするとき，

$$2^{-n} \sum_{\alpha \leqq k \leqq \beta} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) \sim \int_{x_{\alpha-1/2}}^{x_{\beta-1/2}} e^{-y^2/2}\, \frac{dy}{\sqrt{2\pi}}.$$

問 22 以下に *[10, §VII.2]* に書かれている定理 *100* の証明の骨子を引用するが，いい書き方とは思えない．例えば，原典では $x_k^3/\sqrt{n} \to 0$ のとき $\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right)$ についての漸近形が成り立つことから，両者の比の 1 からのずれが $A/n + B|x_{k+1}|^3/\sqrt{n}$ で押さえられる，と書いてあるが，これは間違いである．例えば $\sqrt{|x_{k+1}|^3/\sqrt{n}}$ で押さえられていれば十分．はっきり言うと，原典の書き方では $o(1)$ ということしか分からない．

$\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right)$ の k についての和の漸近的評価が必要なので，$o(1)$ 評価では不十分ではないかという疑念が生じる．よって，以下の証明は書き方が不十分である．これを補足して証明を完成せよ.（*Statement* の書き方も *(195)* に合った記述の方が望ましい.） ◇

定理 *100* の証明. テーラーの定理から，各 k 毎に $\displaystyle\int_{x_{k-1/2}}^{x_{k+1/2}} e^{-y^2/2}dy = he^{-\xi^2/2}$ を満たす $x_k - \dfrac{h_n}{2} < \xi < x_k + \dfrac{h_n}{2}$ が存在するので，

$$h_n e^{-x_k^2/2} = e^{(\xi^2 - x_k^2)/2} \int_{x_{k-1/2}}^{x_{k+1/2}} e^{-y^2/2}dy.$$

n を十分大きく取れば k に無関係に $|\xi^2 - x_k^2|$ を小さくとれるので，

$$(\forall\epsilon > 0)\ \exists n_0;\ (\forall n > n_0)\ e^{-\epsilon}\int_{x_{\alpha-1/2}}^{x_{\beta+1/2}} e^{-y^2/2}dy \leqq h_n \sum_{\alpha\leqq k\leqq\beta} e^{-x_k^2/2} \leqq e^{\epsilon}\int_{x_{\alpha-1/2}}^{x_{\beta+1/2}} e^{-y^2/2}dy$$

が任意の (n とともに変化してもかまわない) α, β に対して成り立つ．ここまでは問題ないだろう．

一方，Stirling の公式 (§A.1) と $(1+\frac{1}{n})^n \sim e$ から，

$$2^{-n}\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) \sim h_n e^{-x_k^2/2}, \quad h_n x_k^3 \to 0.$$

これより (ここが私は心配),

$$2^{-n} \sum_{\alpha\leqq k\leqq\beta} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) \sim h_n \sum_{\alpha\leqq k\leqq\beta} e^{-x_k^2/2}, \quad h_n x_\alpha^3 \to 0,\ h_n x_\beta^3 \to 0.$$

[10, §VII.2] では以上をもって良しとしているように見える． □

1 次元 SRW では $\mathrm{P}[\, W_n = k \,] = \begin{pmatrix} n \\ (n+k)/2 \end{pmatrix}$ だから，誤差関数の漸近形 命題 55 を 定理 100 に適用すると次を得る．

系 101 $\mathrm{P}[\, |W_n| \geqq x \,] \sim \sqrt{\dfrac{n}{2\pi}}\dfrac{1}{x}e^{-x^2/(2n)}$, $x^3/n^2 \to 0$, $n \to \infty$.

今までの諸結果とその注を合わせると次の最終結果を得る．

系 102 (1 次元 SRW の LIL) 1 次元 *simple random walk* では *(197)* が成り立つ．

D.4 Hitting time の short time estimate から lower bound への十分条件．

§D.5 で LIL の lower bound の別証明を与えるための準備を行う．

命題 103 $\mathbb{Z}$ に値を取る確率変数列 W_k, $k \in \mathbb{Z}_+$, に対して，0 を除く $\tilde{G}_n = 2^n\mathbb{Z}$ の *hitting time* を T_n と書く：

$$T_n = \inf\{k \in \mathbb{N} \mid W_k \in \tilde{G}_n \setminus \{0\}\}$$

このとき，$\lambda > 2$ *(*即ち $0 < \nu = \dfrac{\log 2}{\log \lambda} < 1$*)* に対して

$$(\log n)^{(1-\nu)/\nu}\lambda^{-n}T_n \leqq c\,,\ i.o., \tag{198}$$

となる[66] $c > 0$ とがあれば,

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\,\frac{|W_k|}{\psi_-(k)} \geqq c^{-\nu}$$

が成り立つ．ここで $\psi_-(k) = k^\nu(\log\log k)^{1-\nu}$.

注 39 *SRW* でなくてよい！また，*LIL* の下限は遠くに行くという主張だから，1 歩毎に隣に移る *walk* である必要もない． ◇

証明. (198) の不等式が成り立つ $w \in \Omega$ と $n \in \mathbb{Z}_+$ をとって $k = T_n(w)$ とおくと,

$$|W_k(w)| \geqq 2^n,\quad k \leqq c\lambda^n(\log n)^{-(1-\nu)/\nu}.$$

よって

$$2^n \geqq c^{-\nu}k^\nu(\log n)^{1-\nu}. \tag{199}$$

先ず $n \geqq 3$ で

$$n \geqq \frac{\log k - \log c}{\log\lambda} + (1-\nu)\frac{\log\log n}{\log\lambda} \geqq \frac{\log k - \log c}{\log\lambda}$$

を得て，これからさらに,

$$\log n \geqq \log\log k + \log(1 - \frac{\log c}{\log k}) - \log\log\lambda$$

となるので，任意の $\epsilon > 0$ に対して， k_0 がとれて

$$\log n \geqq (1-\epsilon)\log\log k,\quad k \geqq k_0\,.$$

これを (199) に代入すると

$$|W_k(w)| \geqq 2^n \geqq c^{-\nu}k^\nu(1-\epsilon)^{1-\nu}(\log\log k)^{1-\nu}$$

を得る．仮定から，これが成り立つ k が無数にあるから

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{|W_k(w)|}{\psi_-(k)} \geqq (1-\epsilon)^{1-\nu}c^{-\nu}$$

が成り立つ． $\epsilon > 0$ は任意だったから,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{|W_k(w)|}{\psi_-(k)} \geqq c^{-\nu}$$

だが，このような w が確率 1 で存在するのだから主張を得る．

□

[66] i.o. は infinitely often．与式の成り立つ n が無限個あること．もちろん，そうなる確率が 1 ということ．

D.5 Lower bound (Simple random walk) from RG.

くりこみ群の応用として，1次元SRWの law of iterated logarithm (LIL) の lower bound の別証明を与える．

標準的な upper bound の証明 (§D.1, §D.2) はSRWのマルコフ性を用いないので，原理的に self-repelling walk などへの応用が可能であるが，lower bound (§D.3) は (歩数方向の) マルコフ性を使うので拡張性が悪い．そこでこれの別証明を探すことに意味があるかもしれない．

残念ながら（今のところ）chain (離散時間) では時間方向のマルコフ性を用いるしかない[67]

しかし

連続極限の Brownian motion や self-repelling process の short time における LIL については時間方向のマルコフ性を用いない証明になっている [30].

この講義では連続極限を避けてとおるので，くりこみ群の方法の醍醐味を割愛せざるを得ないが，SRWのLILの別証明によって必要な評価式の様子を例示しておく．

（1変数の場合の）chain に対するくりこみ群を解析するための定理をまとめた文書 [19] を作ってあったので §B に引用する．

SRWのくりこみ群に戻る．(61) と 命題31 から，(60) で定義された Φ_n, $n=1,2,3,\cdots$, は (152), (154)，および，(152) の後に列挙した仮定を満たす.（以下，$\mathcal{U}=\{1\}$，即ちパラメータに関する一様性を気にする必要がない.）よって 定理94 の結果が成り立つから，

$$\begin{aligned} G_n(s) &= \frac{1}{x_c}\Phi_n(e^{-\lambda^{-n}s}x_c) = \sum_{w\in\tilde{\mathcal{W}}_n} e^{-\lambda^{-n}sL_n(w)}x_c^{L_n(w)-1} \\ &= x_c^{-1}\sum_{k\geqq 0} e^{-\lambda^{-n}sk}x_c^k\sharp\{w\in\tilde{\mathcal{W}}_n \mid L_n(w)=k\} = \int_0^\infty e^{-s\xi}\mathrm{P}_n[\,d\xi\,] \end{aligned} \tag{200}$$

を母関数とする確率測度 P_n に対して，定理94 より，$C>0, C'>0$ が存在して，$\lim_{n\to\infty} 2^{n(1-\nu)/\nu}\alpha_n=\infty$ かつ $\lim_{n\to\infty}\alpha_n=0$ なる任意の正項数列 $\{\alpha_n\}$ に対して，

$$-C \leqq \varliminf_{n\to\infty} {\alpha_n}^{\nu/(1-\nu)}\log \mathrm{P}_n[\,[0,\alpha_n]\,] \leqq \varlimsup_{n\to\infty} {\alpha_n}^{\nu/(1-\nu)}\log \mathrm{P}_n[\,[0,\alpha_n]\,] \leqq -C'\,. \tag{201}$$

ところで，$L_n=T_{n,1}$ に注意すると，(200) から

$$\mathrm{P}_n[\,\{\lambda^{-n}k\}\,] = x_c^{-1}\cdot x_c^k\sharp\{w\in\tilde{\mathcal{W}}_n \mid T_{n,1}(w)=k\},\quad k\in\mathbb{Z}_+,$$

となるが，他方，1次元 simple random walk に関する確率を P と書くとき，

$$\mathrm{P}[\,T_{n,1}=k\,] = 2^{-k}\sharp\{(w(0),\cdots,w(k)) \mid T_{n,1}(w)=k\} = 2\cdot 2^{-k}\sharp\{w\in\tilde{\mathcal{W}}_n \mid T_{n,1}(w)=k\}$$

である．なぜなら最初の k 歩を見るのと，$\tilde{G}_n$ を hit するまでを見る違いであって，$T_{n,1}=k$ となる path は両方とも尽くすから．最後の式の2倍は，SRWでは左右に行けるから $w(T_{n,1}(w))=\pm 2^n$ の2つの可能性があることから．

(61) から Φ_1 の $z>0$ における固定点 $x_c=1/2$ だから，

$$\mathrm{P}_n = \mathrm{P}\circ(\lambda^{-n}T_{n,1})^{-1} \tag{202}$$

だから (201) は1次元SRWについての評価

$$-C \leqq \varliminf_{n\to\infty} {\alpha_n}^{\nu/(1-\nu)}\log \mathrm{P}[\,T_{n,1}\leqq\lambda^n\alpha_n\,] \leqq \varlimsup_{n\to\infty} {\alpha_n}^{\nu/(1-\nu)}\log \mathrm{P}_n[\,T_{n,1}\leqq\lambda^n\alpha_n\,] \leqq -C' \tag{203}$$

を与えている．

$\delta=(1-\nu)/\nu$ とおいて，$n\in\mathbb{N}$ に対して $X_n=\lambda^{-n}(\log n)^\delta T_{n,1}$, $Y_n=\lambda^{-n}(\log n)^\delta(T_{n,1}-T_{n-1,1})$, および $\alpha_n=\dfrac{(\log(n+1))^\delta}{\lambda(\log n)^\delta}$ とおけば，$X_{n+1}=\alpha_nX_n+Y_{n+1}$．$n$ が十分大きければ $0<\alpha_n<1$.

事象列 $A_n=\{X_n\leqq c\}$ とおく．

SRWでは，時刻 T_n までの歩数 X_n とそれ以後の歩数 Y_n は独立だから[68]，

[67] そもそも歩数無限大の極限を ω 毎に定義するところで問題がある．だから，問題を少し変えないといけない．しかし，それをやりさえすれば，chain でも対応することを考えることができると思う．

積分範囲の台形領域を矩形領域で下から評価して独立性を使うと，任意の $0 < \beta_n < 1$ に対して

$$\mathrm{P}[\, A_n \cap {A_{n+1}}^c \,] = \mathrm{P}[\, \alpha_n X_n + Y_{n+1} > c,\ X_n \leqq c \,] \geqq \mathrm{P}[\, c\beta_n < X_n \leqq c \,] \cdot \mathrm{P}[\, Y_{n+1} > c(1-\alpha_n\beta_n) \,].$$

$\lambda^{-n} T_{n,1}$ が弱収束するので $\mathrm{P}[\, Y_n > c \,]$ は 1 に近づく．よって，十分大きい n に対して例えば 1/2 で下から評価できる．他方，(203) で $\alpha_n = c(\log n)^{-\delta}$ とおくことができて[69]，任意の $\epsilon > 0$ に対して，十分大きい n では

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}[\, c\beta_n < X_n \leqq c \,] = \mathrm{P}[\, T_{n,1} \leqq c\lambda^n (\log n)^{-\delta} \,] - \mathrm{P}[\, T_{n,1} \leqq c\beta_n \lambda^n (\log n)^{-\delta} \,] \\
&\geqq n^{-(C+\epsilon)c^{-1/\delta}} - n^{-(C'-\epsilon)(c\beta_n)^{-1/\delta}}.
\end{aligned}$$

$c \geqq (C+\epsilon)^\delta$，$\beta_n < (C'-\epsilon)^\delta / c$ に選べば，

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}[\, A_n \cap {A_{n+1}}^c \,] = \infty$$

を得る．よって，定理 58 から（SRW のように $T_{n,1},\ n \in \mathbb{N}$, にマルコフ性があれば）

$$(\log n)^\delta \lambda^{-n} T_n \leqq (C+\epsilon)^\delta, \quad i.o..$$

命題 103 によって

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{|W_k|}{\psi_-(k)} \geqq (C+\epsilon)^{\nu-1}.$$

ここで $\psi_-(k) = k^\nu (\log\log k)^{1-\nu}$．$\epsilon > 0$ は任意だから，結局

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{|W_k|}{\psi_-(k)} \geqq C^{\nu-1}.$$

これは（定数倍を除いて） LIL の lower bound (196) である．

SRW の場合は，(61) から Φ_1 の $z > 0$ における固定点 x_c とそこでの微分係数 λ は

$$x_c = \frac{1}{2},\ \lambda = 4,\ \nu = \frac{\log 2}{\log \lambda} = \frac{1}{2}.$$

これはもちろん，通常の LIL の証明で得られる数値と等しい．

問 23 $\overline{\lim_{k\to\infty}} \dfrac{|W_k|}{\psi_-(k)}$ の値まで決めるのは難しい．しかし 1 次元 *SRW* か 1 次元 *Brown* 運動ならば可能と思われる[70]． ◇

E　くりこみ群の視点から見た Sierpiński carpet における等方性の回復．

Sierpiński carpet における等方性の回復の結果に至る §5.5 の議論をくりこみ群の描像に基づいて概説する[71]．

E.1　スケール変換に対する系の応答．

個々の具体例については，くりこみ群が何を計算できるかについて大きな見解の差はないかも知れないが，位置づけや特徴づけといった思想的な部分は人によって大いに異なる.（しかし，どう違うのかと問われると説明は難しい．さらに，時間とともに意見も変わる.）筆者は 21 世紀の数学の中の一つの大きな枠組みの可能性として，くりこみ群に期待する．

個々の難しい問題を非凡な洞察力と驚異的な計算力で撃破することでよしとする立場もあろう．問題を解くことが重要であり，方法論は重視しないのが健全な態度である．しかし，ここでは，くりこみ群という

[68] ここで歩数方向のマルコフ性を使うのでこの別証明も不満である．本当は decimated walk の hitting time $T_n(Q_n)$ の列でやりたいのだが，chain でくりこみ群に適合した形で作ると，最初からは無限列を考えないという問題点（連続極限の short time LIL ではこの問題はない）と，pathwise に見たときの infinitely often ということが sample hitting point を細かくとるという意味になって，通常の，時間を増やしていくという意味に翻訳できないのが問題．後者が歩数方向のマルコフ性をここで使っていることに対応する．

[69] α_n に課せられた制限に比べて，非常に弱い decay order だが，Borel–Cantelli を使うので，確率を n で和をとったときに発散する条件からこの order が役に立つことが分かる．

[70] 修論レベルの問題.

[71] 以下は [16] からの抜粋.

方法論に注目しよう．思想や近似計算にとどまらず厳密に定義された数学として，また，個々の問題ではなく普遍的に有効な強力な解析手段として，のくりこみ群である．微積分学という方法論が個々の問題を越えて数学の全分野に及ぶ巨大な一般論となったように．いうまでもなく，この意味でのくりこみ群の数学は未解決である．

くりこみ群は無限自由度系を解析する一手段であって，スケール変換に対する系の応答をパラメータ空間上の力学系として表現する．くりこみ群を特徴づけるのは次の性質であろうと考える．

(i) くりこみ写像が距離空間上の関数空間（または距離空間に値を取る関数空間） $\mathcal{O}$ の上の測度または汎関数の集合 $\mathcal{M}$ の上で，解析的性質の良い写像 g として定義されること．

(ii) くりこみ写像の定義が距離空間のスケール変換 S を反映していること．

(iii) 解くべき問題が，パラメータ空間の上の力学系としてのくりこみ群の，固定点への収束または固定点近傍の線型化によって解けること．

(iv) もとの問題から決まる初期条件の集合に対応する力学系の軌道が，固定点への収束を除いて大局的に正則なこと．[72]

以下では，対称性の回復という問題をくりこみ群の立場から整理してみる．そのような試みが有効であると思うのは次の理由による．n を増やすと F_n は複雑になるので (74) の右辺の下限を実現する関数 v も複雑になる．そのような関数列を逐次求めてその積分として抵抗を求め，その n 依存性を導くのはたいへんだろう．その代わりにスケール変換に対する応答としての写像を求めて，その性質を見ることで $n\to\infty$ の情報を得よう．例えば， (70) で定義される漸化式から H_n を逐次求める代わりに，g のグラフをながめることによって，(71) という結論を得るほうが見通しがよいかもしれないという考えである．実際，くりこみ群の描像によって 命題 35 の証明の特徴は以下のように整理される．

K を，単位正方形 $[0,1]^2$ の 4 辺のうちのいくつかの辺（各辺毎に両端を除いて開区間とする）の和集合とするとき，K で定義された実解析関数の全体を $\mathcal{O}_K$ とし，K の選びかたに関する和集合を $\mathcal{O}=\bigcup_K \mathcal{O}_K$ とおく．領域 $D\subset(0,1)^2$ に対してその境界を ∂D と書くことにする．

くりこみ群はスケール変換に対する系（現象）の応答を見る．

$$I=\{(i,j)\mid i,j=0,1,2,\ (i,j)\neq(1,1)\}$$

とし，各 $(i,j)\in I$ に対して，$\mathbb{R}^2$ 上のスケール変換（拡大） S_{ij} を，

$$S_{ij}(x,y)=(\frac{1}{3}(i+x),\frac{1}{3}(j+y)) \tag{204}$$

で定義する．

問題にしている抵抗という現象は $\mathcal{O}$ 上の汎関数である．∂D が単位正方形の 4 辺を含むような領域 $D\subset(0,1)^2$ に対して汎関数 $R_D:\ \mathcal{O}\to\mathbb{R}$ を

$$\frac{1}{R_D(u)}=\inf E_D(v)\,,\quad u\in\mathcal{O}\,, \tag{205}$$

で定義する．ここで，$E_D(v)$ は (72) で積分範囲を D としたもの，また， $u\in\mathcal{O}_K$ のとき， inf は関数 $v:\ D\to\mathbb{R}$ を $v\,|_K=u$ を満たしながら動かすときの下限である.（正確に言うと， (74) と同様に， v は D の閉包で連続な関数で， D で偏微分可能であって，(72) が有限になるものを考える.）(205) で与えられる汎関数 R_D の，D の選びかた全てにわたる集合を $\mathcal{M}$ とおく．

---

[72] ここに提案した性質はそれぞれ以下の視点を念頭に置いている．

(i) 筆者が考察対象を汎関数や測度としたのは，直接的な別解がない本格的問題において，くりこみ群が有効な解析手段となることを期待するという意味である．

(ii) 基礎法則の局所性と自然現象の大局性をつなぐのがスケール変換である．ここに無限自由度が現れる．

(iii) くりこみ群が主に臨界現象と普遍性を解析するという主張．普遍性については本特集の巻頭の示唆的な記事及び田崎氏のたいへん分かりやすい記事を参照して頂きたい．筆者は数学的解析手段としてのくりこみ群の可能性に関心があるので，普遍性という言葉を限定的に，数学的に証明できる範囲に限って用いたい.「固定点への収束または固定点近傍の線型化」はその主旨を含む．数学的に厳密なくりこみ群に関しては本特集の原氏の記事も参照して頂きたい．

固定点だけではなく周期点等の安定多様体への収束，を考える研究もある．筆者はパラメータ空間を取り替えて，例えば周期解が一つの固定点となるようにするべきであると考えるが，問題が与えられたときパラメータ空間をどう取るかは難しい．

(iv) 「初期条件の集合」はくりこみ群では canonical surface と呼ばれる.「正則」とは，例えばカオスや limit cycle の不在，canonical surface に関する軌道の連続性などが念頭にある．くりこみ群では canonical surface 上でパラメータを動かしたとき軌道が相転移点を通ると特異点が発生する，という点に注目するが，逆に，相転移点を通らなければ正則であるという主張もないと，数学的主張としてはくりこみ群の価値はない．しかも，カオスの例で知られるように正則性は自明ではない．

この問題に対応するくりこみ群はスケール変換 (204) に対する系 $\mathcal{M}$ の応答を表す写像 $g:\ \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ が定める力学系であって，次式で定義される．$R \in \mathcal{M}$ と $u \in \mathcal{O}$ に対して，

$$\begin{aligned}&\frac{1}{g(R)(u)}\\ &= \inf\{\sum_{(i,j)\in I} \frac{1}{R((u\oplus w)\circ S_{ij})} \mid w \in \mathcal{P}\}.\end{aligned} \tag{206}$$

ここで，

$$\begin{aligned}&K_\sharp\\ &= \{(x,y) \mid x = \frac{1}{3} \text{ or } \frac{2}{3},\ y \in (0,\frac{1}{3}) \cup (\frac{2}{3},1)\}\\ &\cup \{(x,y) \mid x \in (0,\frac{1}{3}) \cup (\frac{2}{3},1),\ y = \frac{1}{3} \text{ or } \frac{2}{3}\}\end{aligned}$$

とおくとき，$\mathcal{P}$ は $K_\sharp$ を定義域とする実解析関数の全体であり，$u \in \mathcal{O}_K$ と $w \in \mathcal{P}$ に対して，

$$(u\oplus w)(x,y) = \begin{cases} u(x,y), & (x,y) \in K,\\ w(x,y), & (x,y) \in K_\sharp, \end{cases}$$

と書いた．$(u\oplus w)\circ S_{ij}$ は (204) の S_{ij} との合成関数

$$((u\oplus w)\circ S_{ij})(x,y) = (u\oplus w)(S_{ij}(x,y))$$

を表す．

定義から，次が成り立つことはすぐ分かる．

命題 104 $n \geqq 0$ に対して $R_{F_{n+1}} = g(R_{F_n})$.

Sierpiński gasket の場合も全く同様にくりこみ群 g を定義できるが，Sierpiński gasket の境界点は 3 点なので（等価回路の理論からわかるように），$\mathcal{M}$ は $\mathbb{R}^3$ とみなせる．即ち，g は実 3 変数関数である．g を，OB と AB が対称な空間，即ち $\mathbb{R}^2$ に制限し，さらに，比をとることで $\mathbb{R}$ 上の写像としたのが (70) である．この意味で (70) は厳密なくりこみ群の例になっている．写像 (70) は，$[0,\infty]$ で唯一の安定固定点 $x=1$ と不安定固定点 $x=\infty$ を持ち，$[0,\infty)$ から出発した任意のくりこみ群による軌道が安定固定点 $x=1$ に収束する．これが，くりこみ群の言葉で説明したときの，pre-Sierpiński gasket 型抵抗板の対称性の回復現象である．

E.2 パラメータ空間と軌道の追跡．

Sierpiński carpet は縮小写像で写した結果の図形と，残りの部分との境界が線分（の和集合）であることを反映して，$\mathcal{M}$ が無限次元空間になる．このことを Sierpiński carpet は infinitely ramified fractal であるということがある．Sierpiński gasket のときはくりこみ群の解析は容易であったが，現在の技術では Sierpiński carpet のときのくりこみ群の完全な解析は難しい．そこで，考察対象の境界条件を有限個に制限して有限次元空間上の写像を得ることを目標とする．(206) の定義が w について下限を求める形で書かれているので，$\mathcal{O}$ や $\mathcal{P}$ を制限すれば等式の代わりに不等式を得る．

最も簡単な制限の仕方は，u や w が定義されている各辺毎に定数関数に限ることである．$K_y = \{(x,y) \mid y=0 \text{ or } y=1\}$ 上の関数 $u_y^{(a,b)}$ を $u_y(x,0)=a,\ u_y(x,1)=b,\ (0<x<1)$, で定義すると，(74) の R_n^y は

$$R_n^y = R_{F_n}(u_y^{(1,0)}) \tag{207}$$

と表される．記号を見やすくするため $u_y = u_y^{(1,0)}$ と書く．さらに，(205) と (72) において v を線型変換することにより，公式

$$R_{F_n}(u_y^{(a,b)}) = (a-b)^{-2}\,R_n^y \tag{208}$$

を得る．

$w \in \mathcal{P}$ としては，定数 $\alpha,\ \beta$ が存在して $w(x,1/3)=\alpha,\ w(x,2/3)=\beta,\ (0<x<1/3,\ 2/3<x<1)$, となるもののみを考える．$F_n$ の持つ上下および左右の対称性と，最小発熱の原理 (74) の右辺の下限が調

和関数によって実現すること，を利用すると，(206) の右辺を上から評価することができる．順に，(207), 命題 104, (206) を上から評価したもの，(208), を用いると，

$$\begin{aligned}\frac{1}{R^y_{n+1}} &= \frac{1}{R_{F_{n+1}}(u_y)} = \frac{1}{g(R_{F_n})(u_y)} \\ &\leqq \frac{3}{R_{F_n}(u_y^{(1,\alpha)})} + \frac{2}{R_{F_n}(u_y^{(\alpha,\beta)})} + \frac{3}{R_{F_n}(u_y^{(\beta,0)})} \\ &= (3(1-\alpha)^2 + 2(\alpha-\beta)^2 + 3(\beta-0)^2)\frac{1}{R^y_n},\end{aligned}$$

と変形できる．最後の式を平方完成すれば

$$R^y_{n+1} \geqq (5(\beta - \frac{2}{5}\alpha)^2 + \frac{21}{5}(\alpha - \frac{5}{7})^2 + \frac{6}{7})^{-1} R^y_n$$

が任意の α, β に対して成り立つから，$\beta = 2\alpha/5$, $\alpha = 5/7$, に選べば，命題 35 の 2 行目の左側の不等式を得る．

R^x_n と R^y_n を混ぜる技巧を用いると命題 35 の 1 行目の右側の不等式を得る．残り二組の不等式を得るには今まで説明してきた (74)，即ち，電圧に関する最小発熱の原理，の代わりに電流に関する最小発熱の原理を考える．これは (74) の inf を達成する関数が調和関数になることから，電流 $j = \mathrm{grad}\ v$ でも変分原理が書けることを用いる．これらの技巧が利用できることを発見したことが研究としてはセールスポイントかも知れないが，くりこみ群の説明という観点からは調和関数特有の技巧なので，詳細は省略する[73]．以上で 命題 35 の証明をくりこみ群の言葉を用いて整理したことになる．

Sierpiński gasket では，等方性の回復が (71) という，強い意味で成り立つ．定理 34 は，この等方性の回復が弱い意味ながら Sierpiński carpet でも成立する，ということであるが，定理 34 の $C = 4926$ は本質ではない．等方性の回復機構は Sierpiński gasket の特殊性によるものではなく，普遍的な内容を持つことを 定理 34 が示唆していると理解して，(71) が Sierpiński carpet の場合も成り立つと予想する．§E.1 最後に Sierpiński gasket の場合について言及したように，この予想はくりこみ群の軌道が固定点に収束するという主張である．定理 34 は Sierpiński carpet の場合にも，予想される固定点を含むある有界領域に軌道が必ず落ち込むことを見届けたことを示す.

くりこみ群の立場から考えると，Sierpiński carpet の場合に (71) を得るためには，(206) の右辺の評価において，より多くの境界条件を参加させる必要がある．$\mathcal{O}$ の適切な完全系 $\{u_j\}$ を選び，一般化された有効抵抗 $R_{F_n}(u_j)$ を考えて，それらの間の n についての recursion を考えることになる．これは，R_{F_n} という汎関数を $R_{F_n}(u_j)$ という実数の無限個 $(j = 1, 2, 3, \cdots)$ の組，即ち無限次元パラメータ空間，で表現することを意味する．しかし，これは現在の筆者の想像力を超える．

問 24 *Sierpiński carpet* の場合の等方性の回復を証明せよ[74]． ◇

F 高次項の係数が正な２変数多項式の臨界点の唯一性について．

以下は， web ページ
`http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~hattori/criti.htm`
に 1998 年 8 月 26 日から 1999 年 6 月 8 日までに掲載した記事に基づく．同記事は，科学研究費 1997–1999 年度 基盤研究 (C)(2) 「フラクタル上の確率モデルにおける等方性の回復」(課題番号 09640298) の報告書にも引用した.

F.1 問題意識．

$W\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ を（恒等的にゼロではない）1 変数正係数多項式で，各項の次数は 3 以上とする．このとき，W に負係数の 2 次の項を加えた多項式 $w(x) := W(x) - x^2/2$ の臨界点 ($\mathrm{grad}\, w(x) = w'(x) = 0$ を満たす点 x) が $x > 0$ にただ一つ存在することは，高校時代の微分法を思い出せばすぐ分かる．

では，**この性質は W を 2 変数にしたとき，どのように保存されるか？**

注 40 w の臨界点は W の勾配写像 $\mathrm{grad}\, W = W'$ が定義する力学系 $X_{n+1}(x) = (\mathrm{grad}\, W)(X_n(x))$, $n = 0, 1, 2, ...,$ $X_0(x) = x$, の固定点である． ◇

[73] 証明に関心のある方は原典 [22] を参照していただきたい.（遠い）将来，くりこみ群の研究が進んで (206) を直接扱うことができるようになった暁には，もっとすっきりした証明に置き換わることを期待したい．また，命題 35 の a_1, B_1, a_2, B_2 の値，および，添字 $n-4$ の 4 も，現在の証明の技術的制約によるもので，本質的な意味はない.

[74] 博士論文のレベルを超える高度な問題.

F.2 問題の難しさ.

単純に 2 変数正係数多項式 $W:\ \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ を第一象限全体で考えただけでは，係数を少し変えるだけで，$w(x,y) := W(x,y) - (x^2+y^2)/2$ の臨界点 ($\operatorname{grad} w(x,y) = 0$) は（唯一性どころか）複雑な振る舞いをし得る．

例えば，$W(x,y;d) = x^3 + x^2y + dy^3$ について，$d = 17/12 + 0.04$, $d = 17/12$, $d = 17/12 - 0.04$ と変化させて $w(x,y;d) = W(x,y;d) - (x^2+y^2)/2$ の第 1 象限で臨界点と等高線を書いてみる．係数 d を変えると臨界点が生成（消滅）や分岐を行う．

臨界点は 0 (極大) 以外に y 軸上にあって 0.25 弱から少しずつ増える．後者は y 軸方向には極小で原点を中心とする円に近い経路上で極大．$d > 17/12$ ではこの経路上 x 軸に向かって減少していく中で少し平板な部分がある．$d = 17/12$ で $(0.23, 0.18)$ 付近に臨界点が生じ，$d < 17/12$ で 2 つの臨界点に分岐する．このようなことが起こると，臨界点の唯一性の一般論は作れない．

F.3 部分領域 — 対応する力学系の不変領域.

そこで，2 変数への拡張に際して，第一象限の中に部分領域を考えて，そこでの臨界点の唯一性を論じる．1 変数の場合に問題が極めて簡単だったことを生かすべく，**2 つ目の変数 y は 1 つ目の変数 x に比べて小さいというイメージ** で取り扱う．このため，部分閉領域として

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2_+ \setminus \{(0,0)\} \mid y \leqq x^2\}$$

をとる．

注 41 もちろん，この選択は必然ではない．*1* 次元に近いというイメージを重視したことと，*(*離散*)* 力学系における臨界点の分岐が複雑微妙な問題であることに鑑みて，強い目の条件をおいた． ◇

さらに，w の臨界点は W の勾配写像

$$\operatorname{grad} W = (W_x, W_y):\ \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}^2_+$$

が定義する力学系の固定点である，という視点から，D が $\operatorname{grad} W$ の不変領域であるような W を考察の対象とする．

以上をまとめて，次の問題を設定する．

問題 1 (19981031). 実 2 次元平面の第一象限（境界含む）$\mathbb{R}^2_+$ の中に

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2_+ \setminus \{(0,0)\} \mid y \leqq x^2\}$$

をとり，次の二つの性質を持つ（恒等的にゼロではない）2 変数多項式 W を考える：

(i) W は（x と y の合計の）次数が 3 以上の項からなる多項式で，各項の係数は正である．

(ii) W の勾配写像 $\operatorname{grad} W = (W_x, W_y)$ に対して，$\operatorname{grad} W(D) \subset \{(x,y) \in D \mid y \neq x^2\}$ である（W_x は W の x 偏導関数）．

このとき，W に負係数の 2 次の項を加えた多項式

$$w(x,y) = W(x,y) - (x^2+y^2)/2$$

の臨界点 ($\operatorname{grad} w(x,y) = 0$ を満たす点) が D の中にただ一つ存在するための十分広く，かつ，容易に検証できる自然な十分条件を求めよ．

注 42 W に対する二つ目の条件は D が $\operatorname{grad} W$ の不変領域であることを意味する．(もう少し強く，放物線 $y = x^2$ 上の点が D の内部に移ることも意味する．これは，この先いろんな結果を得る場合に「等号の場合を除く」煩わしさが起こる可能性を前もって避けるため.) ◇

F.4 1 変数に近い特別な状況 — 臨界点が x 軸上にある場合.

$W(x,y)$ が y について 1 次の項を含まないとき，ある一つの正数 x に対して x 軸上の点 $(x,0)$ が w の臨界点になるので，このとき **問題 1** は $D \setminus \{(x,0) \mid x > 0\}$ に w の**臨界点がない**ための十分条件を求めることになる．

このとき $0 < z \leqq 1, x > 0,$ に対して $z(W_x^2/W_y)(x, x^2z) > 1$ が成り立てば，y/x^2 は $D\setminus\{(x,0)\} \mid x > 0\}$ において，$\operatorname{grad} W$ が定義する力学系 (X_n, Y_n) のリャプノフ関数になる．即ち，(X_n, Y_n) が $D \setminus \{(x,0) \mid x > 0\}$ にあるとき，$Y_{n+1}/X_{n+1}^2 < Y_n/X_n^2$ が成り立つ．従って特に，w の臨界点がないための十分条件になる．

以上に基づいて次の問題を考える．

問題 2．

$$F(x,y) = (y/x^2)(W_x^2/W_y)(x,y)$$

とおく．**問題 1** の設定に加えて $W(x,y)$ が y について 1 次の項を含まないとき，$0 < y \leqq x^2$, $x > 0,$ に対して $F(x,y) > 1$ が成り立つための,「良い」十分条件を求めよ．

W の y への依存が**単項式のとき**は**問題 2** は次の意味で解決する．

命題 105 ((19981226)) 問題 *2* において W の y への依存が単項式のときを考える，即ち，W が**問題 *1*** の設定を満たし，かつ，正係数 1 変数多項式 f と定数 $b > 0,\ k \geqq 0,\ k' \geqq 2$ を用いて $W(x,y) = f(x) + bx^k y^{k'}$ と書けるとする．f の項のうち最低次数を L，最高次数を H とおく．

このとき，次の**いずれか**が成り立てば $F(x,y)$ の D における最小値は D の境界（無限遠を含む）でとる．

(i) $k = 0$ または $k' = 2,$

(ii) $L \geqq 4\beta/(k'+2)$ または $H \leqq 4\beta/(k'+2)$ *(*ここで $\beta = k' + (k/2)$ とおいた*),*

(iii) 以上以外の場合で，$xf''(x)/f'(x) = 4\beta/(k'+2) - 1$ の（唯一の）正根を $x = x_0$ とするとき，$f'(x_0)x_0^{1-2\beta} \geqq bk(k'+2)/(k'-2).$

注 43 *(i)* 命題 *105* の十分条件は，*2* 次元領域 D の内部で *2* 変数関数 W の詳細な性質を調べる必要がないことに注意．即ち調べるべきことはいずれも高々 *1* 変数関数の問題に帰着している．そして D の境界において $F(x,y) > 1$ ならば y/x^2 はリャプノフ関数になって，D の内部では $\mathrm{grad}\, W$ の固定点 *(*w の臨界点*)* がないことを保証する．この意味で w の臨界点の D における唯一性の「容易に検証可能な」十分条件になる．

(ii) **問題 *1*** の設定の下では $F(x,x^2) > 1$ なので，D の境界のうち $y = x^2$ のところでは自動的に望むべき性質が成り立つ．

(iii) 命題 *105* で陽にリストされている条件は問題の量が D の内部で最小にならないことを保証するだけなので，D の境界におけるチェックが必要．特に「x の大きいところ」を調べる必要がある．(W の最高次付近を調べればいいので，検証可能性は保たれている．)

例えば，$W(x,y) = x^3/3 + 4x^2y^3/3$ は命題 *105* の仮定のうち $H \leqq 4\beta/(k'+2)$ を満たすが，D における $w(x,y) = W(x,y) - (x^2+y^2)/2$ の臨界点は，$(1,0),\ (0.939352, 0.283324),\ (0.734382, 0.46355)$ の *3* つ．

実際，この例では，$F(x,y) = (1 + 8y^3/(3x))^2/(4y) \to 1/(4y), x \to \infty,$ となるので，$y > 1/4$ のとき x の大きいところで左辺が 1 より小さくなり，y/x^2 は D でリャプノフ関数ではないことが分かる．

◇

命題 *105* の証明．まず，問題 1 の

$$W(x,y) = f(x) + bx^k y^{k'} (b > 0, k \geqq 0, k' \geqq 2)$$

に対する仮定から， $L \geqq 3$ (即ち， f の各項は全て 3 以上) かつ $k + k' \geqq 3$ となることに注意．

$$R(x,z) = F(x,x^2z)^{1/2} = z^{1/2}(W_x/W_y^{1/2})(x,x^2z) = (bk')^{-1/2}(f'(x)x^{-\beta+1}z^{1-k'/2} + bkx^{\beta}z^{1+k'/2}),$$

とおく．ここで $\beta = k' + (k/2)$.

もし $k = 0$ または $k' = 2$ ならば $R(x,z)$ は z に関して単調だから，$F(x,y) = R(x,y/x^2)^2$ は D の境界 $z = 0$ または $z = 1$ で最大，最小となる．よって，最初から $k > 1$ かつ $k' > 2$ とおいてよい．

$g(x) = xf''(x)/f'(x)$ とおく．$R(x,z)$ が極値を (x,z) でとるとすると，

$$R_x(x,z) = R_z(x,z) = 0,$$

となる．ここで R の x 偏微分を R_x などと書いた．計算すると，極値条件は

$$g(x) = \frac{4\beta}{k'+2} - 1,$$
$$bkz^{k'} = \frac{k'-2}{k'+2} f'(x)x^{1-2\beta},$$

となる．

f が単項式 $f(x) = ax^m$ $(a > 0, m > 2)$ ならば，$g(x) = \dfrac{4\beta}{k'+2} - 1$ から $L = H = m = 4\beta/(k'+2)$ を得るので， R の極値は $x \to \infty$ にあるので，F の極値は D の境界にある．

これより， f は 2 項以上よりなるとしてよいので，

$$f(x) = a_L x^L + ... + a_H x^H \quad (a_L a_H > 0, H > L \geqq 3)$$

とおく．計算すると $g'(x) > 0$, $x > 0$, を得る[75] ので，$L - 1 = g(0+) < g(x) < g(\infty) = H - 1$, $x > 0$．特に，$L \geqq 4\beta/(k'+2)$ または $H \leqq 4\beta/(k'+2)$ ならば $g(x) = 4\beta/(k'+2) - 1$ は $x > 0$ に解はないので，F の極値は D の内部ではとらない．よって， $H > 4\beta/(k'+2) > L$ と仮定してよい．

このとき， x_0 を $xf''(x)/f'(x) = g(x) = 4\beta/(k'+2) - 1$ の唯一の正根とし，極値を (x_0, z_0) とおくと，R の極値条件から，

$$bkz_0^{k'} = (k'-2)f'(x_0)x_0^{1-2\beta}/(k'+2).$$

よって，この等式の右辺が bk 以上ならば，R の極値は D の内部では取らない．よって主張の場合は全て尽くされた． □

注 44 境界での $F(x, y) > 1$ のチェックは（特に大きな x で）必要である．例えば，$W(x, y) = x^3/3 + 4x^2y^3/3$ は，$H \leqq 4\beta/(k'+2)$ だから，命題 *105* の仮定を満たす．しかし，対応する $w = W(x, y) - (x^2 + y^2)/2$ は D の内部に 3 個の臨界点がある：$(1, 0)$, $(0.939352, 0.283324)$, $(0.734382, 0.46355)$．実際，

$$F(x, y) = (1 + 8y^3/(3x))^2/(4y) \to 1/(4y), \quad x \to \infty,$$

なので $y > 1/4$ ならば $F(x, y)$ は x が十分大きければ 1 未満になる．よって y/x^2 は D の内部で *Lyapnov* 関数にならない． ◇

W の y への依存が**単項式でない場合**は，まず次のことがわかる．

命題 106 ((19981018)) 以下のいずれかの場合，**問題** ***1*** の設定の下で無条件（余分な条件なし）に結論（D における w の臨界点の唯一性）が成立する：

(i) W が 同次式のとき，

(ii) W が 4 次以下の項よりなる多項式のとき．

証明. (i) 例えば，3 次の同次式

$$W(x, y; a, b, c, d) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$$

の場合を考える．このとき問題 1 の仮定は $b = c = 0$, $a, d \geqq 0$, $3a^2 \geqq d$ に同値．他方，$b = c = 0$ かつ $a, d \geqq 0$ ならば，$w(x, y) = ax^3 + dy^3 - (x^2 + y^2)/2$ の第 1 象限における臨界点は $(0, 0)$, $(0, 1/(3d))$, $(1/(3a), 0)$, $(1/(3a), 1/(3d))$．よって， w の D における臨界点は $(1/(3a), 0)$ ただ一つである．W は同次式ならば何次であっても同様の証明が成り立つ．

(ii)

$$p(x, z) = W_x(x, x^2z)/x^2,$$
$$q(x, z) = W_y(x, x^2z)/(x^4z),$$

とおく[76]．ここで， W_x, W_y は W の偏導関数．

全次数 4 以下の多項式の一般形は

$$W(x, y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 + ex^4 + fx^3y + gx^2y^2 + hxy^3 + ky^4.$$

問題 1 の仮定から $b = c = f = 0$ なので，特に y 次数 1 の項はない．計算すると，

$$p(x, z) = 3a + 4ex + 2gx^3z^2 + hx^4z^3,$$
$$q(x, z) = 2g + 3dz + 3hxz + 4kx^2z^2.$$

[75] 1 自由度のスピン系 (!) に Griffiths の不等式を使う．
[76] 落合啓之氏の変数！

p の各項について，x 次数は z 次数以上であり，q の各項について，x 次数は z 次数以下であることに注意．これから，もし $0 < z < 1$ かつ $x > 0$ ならば

$$p(x,z)^2 \geqq p(xz,1)^2 \geqq q(xz,1) \geqq q(x,z).$$

等号が全部成り立つためには a から k までの全ての係数が 0 でなければならず，W が恒等的に 0 になってしまう．よって $p(x,z)^2 > q(x,z)$ となり，$F(x,y) = (y/x^2)(W_x^2/W_y)(x,y) > 1$ が $D \setminus \{(x,0) \mid x > 0\}$ で成り立つ．即ち，主張が成り立つ．

□

注 45 *(i)* 実際は W が 同次式のとき，**問題 *1*** の設定の下では y を含む項は単項式になって，命題 *105* に含まれる．例えば，*3* 次同次式

$$W(x,y;a,b,c,d) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$$

の場合，**問題 *1*** の条件を満たすのは $b = c = 0,\ a, d \geqq 0,$ かつ $3a^2 > d$ の場合だが，このとき $w(x,y) = W(x,y) - (x^2+y^2)/2$ の第一象限における臨界点は $(0,0)$, $(0,1/(3d))$, $(1/(3a),1/(3d))$, $(1/(3a),0)$ となり，D にあるのは最後の一つだけとなる．

(ii) W が 4 次以下の場合は，**問題 *1*** の条件下で y について 1 次の項は許されない．従って単項式でない **問題 *2*** の十分条件の例になっている．

なお，この場合の証明では，あらわな計算は必要ないが，一般的にやっても 5 次以上の多項式には適用できない．

◇

F.5 W が y の 1 次の項を含む場合．

W が y の 1 次の項を含む場合は w の臨界点は x 軸上にない．従って**問題 1** は D の内部に w の臨界点がただ一つ存在するための十分条件を求める問題になる．

問題 1 の仮定の下で D に w の臨界点が存在することは既に知られている方法により分かる [31]．この方法は $\mathrm{grad}\, W$ が定義する力学系の basin の考察を用いる．しかし，**問題 1** に 1 変数の拡張という描像に沿った弱い条件をつけ加えれば，力学系の軌道を調べなくても臨界点の存在を証明できる．

命題 107 ((19990109)) **問題 *1*** の設定に加えて $(X,Y) = \mathrm{grad}\, W$ に対して以下の性質を仮定する：

(i) $R(x,z) = X^2(x,x^2z) - Y(x,x^2z)$ は $z,\ 1-z,\ x$ の非負係数多項式である．

(ii) $R(x,x^2z)/Y(x,x^2z) = O(x),\ x \to 0.$ ここで $O(x)$ は $0 \leqq z \leqq 1$ に関して一様とする．

(iii) $Y(x,0)$ は恒等的に 0 ではない *(* 即ち W が y の *1* 次式を含む *)*．

このとき，D の内部に $w(x,y) = W(x,y) - (x^2+y^2)/2$ の臨界点 *(* $\mathrm{grad}\, W$ の固定点 *)* が存在する．

証明．$F(x,z) = zX^2(x,x^2z)/Y(x,x^2z)$, $G(x,z) = X(x,x^2z)/x$ とおく．このとき (x,y) が $\mathrm{grad}\, W$ の固定点である (即ち $X = x$, $Y = y$) ことと $z = y/x^2$ において $F(x,z) = G(x,z) = 1$ であることは同値．また，$(x,x^2z) \in D$ となることは $x > 0$ かつ $z \in (0,1)$ と同値である．

W の各項が全次数 3 以上であることから（他の仮定から $Y(x,0) \neq 0$ となることと合わせて），$z \in [0,1]$ において $G(0+,z) = 0$ および $G(\infty,z) = \infty$ となる．また，命題の 3 つ目の仮定から $x > 0$ のとき $F(x,0+) = 0$ となる．**問題 1** の仮定から $F(x,1) > 1$ を得る．よって，$F(x,z) = G(x,z) = 1$ となる (x,z) が領域内にある．□

注 46 *(i)* 最初の *2* つの条件を一次元的と見るのは，これらの条件の下で x が 0 に近いとき，$0 \leqq z \leqq 1$ に関して一様に，Y が X^2 に近く，従って，$\mathrm{grad}\, W$ が定義する力学系の軌道は放物線 $y = x^2$ をほぼ動きながら 0 に近づく，という意味で y が x に比べて高次の微小量であるという最初の想定が生きてくる，ということである．

(ii) 最初の条件は，下記の実例をにらみながら命題が成り立つのに十分なものを選んだが，命題の結論を保証したままもっとゆるめられるかどうかは分かっていない．

◇

F.6 W が y の 2 次までしか含まない場合．

W が y の 1 次の項を含む場合の w の臨界点の唯一性について容易にわかるのは，W が y の 2 次までしか含まない場合である．

命題 108 ((19990221)) *$f,\ g,\ h$ を，それぞれ，$3,2,1$ 次以上の項からなる x の非負係数多項式で，g は恒等的に 0 ではないとし，$W(x,y) = f(x) + g(x)y + h(x)y^2$ とする．このとき第 1 象限に $w(x,y) = W(x,y) - (x^2+y^2)/2$ の臨界点 (*$\mathrm{grad}\, W$ *の固定点) は多くても 1 つしかない．*

注 47 この命題の f,g,h に対する一見こまごました仮定は，**問題 *1*** の条件 *1* と，W が y の 1 次の項を含むという条件，の下では当然成り立つ．つまり，W が y の 2 次までしか含まない場合は唯一性の問題は容易に完全に解決した． ◇

証明．$\mathrm{grad}\, W$ の固定点は

$$
\begin{aligned}
x &= W_x(x,y) = f'(x) + g'(x)y + h''(x)y^2, \\
y &= W_y(x,y) = g(x) + 2h(x)y,
\end{aligned}
$$

を満たす．後者の方程式から固定点が第 1 象限に存在するならば $2h(x) > 1$ でなければならない．このとき $y(x) = g(x)/(1-2h(x))$ は増加するので，

$$W_x(x,y(x)) = f'(x) + g'(x)y(x) + h''(x)y(x)^2$$

も増加する．仮定から，さらに，

$$W_x(x,y(x)) = O(x^3), \quad x \to 0\,.$$

よって $x = W_x(x,y(x))$ の解は $x > 0$ に高々1 個である． □

F.7 残された問題．

W が y の 1 次と 3 次以上の項を含む場合の w の臨界点の唯一性は容易ではない．長い間，具体的な数値係数の組を与えられる毎に力ずくで証明する方法しかなかった．例えば次の例（**問題 1** の設定と結論を満たす例）が知られている．

(i) $W(x,y) = x^3/3 + x^4/2 + 2x^5/5 + x^4y + 2x^3y^2 + 22y^5/5$,

(ii) $W(x,y) = x^3/3^{3/2} + x^4/4 + 2x^5/5/3^{1/2} + x^6/9 + x^4y/3 + 2x^5y/3^{3/2} + 2x^3y^2/3^{3/2} + 13x^4y^2/18 + 32x^3y^3/27/3^{1/2} + 22x^2y^4/27 + 22y^5/135 + 44xy^5/27/3^{1/2} + 31y^6/81$.

実は，これらの具体例がこの研究の出発点であった[77]．**問題 1** でいう「十分広い」十分条件とは，より具体的にはこれらの例を含むもののことである．

F.8 自明でない一般論．

命題 107 に触発されて次の問題を考える．

---

[77] [31, 37] 参照．これらにおいて固定点の唯一性を証明する知られている唯一の方法は，強引に y を消去して x の代数方程式の極値を求める方法である．(これが易しいと思う人はやってみるがよい．) 1 変数にした方程式は一般的に高次の方程式であり，その係数は元の W の極めて複雑な関数になる．従って，(一般次元を統一的に扱おうとするような) 不定係数を持つ場合はとても難しい．もちろん，今日のように Mathematica と Pentium があれば，個々の例をやってみることは可能である．しかし，例題の蓄積は一般的証明からはほど遠い．

5 次元以上の Sierpiński gasket の場合は，対応する多項式は 3 変数以上となり，**問題 1** だけでは不十分である．**問題 1** の動機はある種哲学的なもので，臨界現象に対するくりこみ群の描像に由来する．$\mathrm{grad}\, W$ が定義する力学系は，私にとってはくりこみ群の原型である．係数の正値性は統計的重みの正値性を象徴し，D は universality class に対応する．

Universality (この概念は未だ哲学というべきものである) 関連の一連の未解決の問題，例えば，統計力学における臨界指数の普遍性，や場の量子論におけるくりこみ群的描像，例えば，ϕ^4_4 の triviality，QED の (non-)triviality，非可換ゲージ理論における閉じこめの問題，は，くりこみ群の立場からは，くりこみ群の不変領域における固定点の大局的一意性とくりこみ軌道の固定点への収束に基づいて解かれるべきである．

もし，(難しい各個撃破や「物理的議論」ではない)「くりこみ群の数学」があるとすれば (あるに違いない)，くりこみ群の 2 次元原型である**問題 1** には「エレガント」な解があるはずである．統計力学や場の量子論の真のくりこみ群は無限次元である．2 次元ができなくてどうして無限次元が解決するだろうか！

問題 3. 命題 107 の設定の下で W の D における臨界点の唯一性は言えるか？もし言えないならば，どのような仮定を追加すれば十分条件となるか？

これに関連して，次の十分（殆ど必要）条件が興味深い．

$F(x,z) = zX^2(x,x^2z)/Y(x,x^2z)$, $G(x,z) = X(x,x^2z)/x$ とおく．このとき (x,y) が $\operatorname{grad} W$ の固定点 (即ち $X = x$, $Y = y$) であることと $z = y/x^2$ に対して $F(x,z) = G(x,z) = 1$ となることは同値である．

さらに， $J_{FG}(x,z)$ を 2 次元写像 $(x,z) \to (G,F)$ の Jacobian とする．今まで同様，X の y に関する（x を固定したときの）偏微分を X_y などと書く．

補題 109 ((19990109)) 問題 *3* の仮定の下で以下が成り立つ．

(i) x が 0 に十分近ければ，$0 < z < 1$ において $J_{FG}(x,z) > 0$.

(ii) $x > 0$, $0 < z < 1$ において $F(x,z) \leqq 1$ かつ $G(x,z) \leqq 1$ であると仮定すると $J_{FG}(x,z) > 0$ が得られるならば，$\operatorname{grad} W$ の固定点は D にただ一つ存在する．

証明. 最初の主張を証明するためには，命題 107 の追加仮定から，$a > 0$ が存在して $F(x,z) = z + O(x)$ および $G(x,z) = ax + O(x^2)$ となることに注意する．これより $J_{FG} = 1 + O(x) > 0$ を十分小さい x に対して得る．

第 2 の主張を証明するためには，$J_{FG}(x,z) > 0$ がある領域で成り立てば，そこで，逆写像 $(G,F) \to (x,z)$ が存在すること，即ち，特に，$(x,z) \to (G,F)$ が単射となることに注意する．これより唯一性を得る． □

元の問題は「$F \leqq 1, G \leqq 1 \to J_{FG} \neq 0$」が成り立つための十分条件を求めることに帰着した．その意味で，この補題は，臨界点の唯一性が成り立つ「数学的理由」の候補を与える．

実際，この補題によって，次の命題を得る．この命題は W が y の 1 次と 3 次を含み，係数に任意定数を含む初めての肯定的な結果である．

命題 110 ((19990315)) *a, b, n は正で，$8ab \geqq n$ (> 0) を満たすとする．このとき，*

$$W(x,y) = ax^3 + bx^4 + 9a^2x^4y + nxy^3$$

に対して $w(x,y) = W(x,y) - (x^2+y^2)/2$ の臨界点 ($\operatorname{grad} W$ の固定点) は D の内部にただ一つある．

注 48 このクラスは次の意味でもっとも小さな例になっている：

(i) x の次数と y の次数の 2 倍の和が 7 以下の項よりなる,

(ii) 命題 *107* の設定を満たす,

(iii) W が y の 1 次と 3 次を含む,

(iv) 以上を満たす中で項の種類が最小である．

◇

命題 *110* の証明. 補題 109 と，次の 補題 111 より明らか． □

補題 111 ((19990315)) *$X = W_x$, $Y = W_y$, とおき，* **問題** *2* *と同様に $F(x,y) = (y/x^2)(X^2/Y)(x,y)$ とおく．さらに，$J = (X/x)_x(Y/y)_y - (X/x)_y(Y/y)_x$ とおく．このとき命題 110 の W について*

$$-y^2J(x,y) \geqq X(x,y)Y(x,y)(1 - F(x,y))/(x^2 - y)$$

が D の内部で成り立つ．

証明. あらわな計算による． □

注 49 $J_{GF}(x,z) = (-JX^2/Y^2)(x,x^2z)x^4z^2$ だから主張の結論は

$$J_{GF}(x,z) > \frac{(XF(1-F))(x,x^2z)}{x^2z(1-z)}, \quad 0 < z < 1, \ x > 0,$$

と書くこともできる． ◇

注 50 その他のコメント.

(i) 極座標表示で偏角を固定して動径方向に見れば，原点の付近で減少し，遠方で増加して，途中でただ一つの最小値を持つ．これは正当化できる．実際は，むしろ，対応する力学系の漸近形を調べることで解析ができる *[31]*．結果として F における w の臨界点の存在が分かる．問題となるのは D における唯一性である．

(ii) 浅野功義先生 *(*宇都宮大学*)* にカタストロフィーの理論が使えないか，と示唆を頂いた．私の調べたところ，これは極値を扱う．他方，我々が問題にしているのは鞍点になる．

(iii) モース理論は鞍点についての議論であると聞いたことがある．これは係数の正値性と無関係な理論であるが，我々の問題では係数の正値性は決定的に重要である．

◇

F.9 問題の背景．

本講義では深入りしなかったが，§6.1 に記した背景から，d 次元ガスケット (dSG) 上の self-avoiding walk の漸近的性質の一般論に興味がある．これまでの個々の d についての研究から一般的な研究方針として次の２段階に分けるのが自然であることが分かっている．

(i) 2^n 離れた頂点間に始点と終点を持つプレガスケット（一辺の長さ 1 の三角形を最小単位とするガスケットの部分図形）上の self-avoiding walk の歩数の分布の母関数の，n に関する recursion map の固定点の存在，ある不変部分空間における唯一性，及び軌道の収束とその速さ（線形化写像の固有値）の評価.（即ち，くりこみ群と呼んできたもの．ここで言う「歩数」は recursion が閉じるように定義を多次元化したもの．但し，有限次元である．くりこみ群が有限次元であることを「ガスケットが finitely ramified」であると言う.）

この段階はさらに細かく分けることができる．

(a) くりこみ群の reduction.
d 次元ガスケット上の self-avoiding walk では拡張された歩数変数のうちいくつかは irrelevant な（漸近的性質にとって本質的でない）ことが図形的理由から見えているので，もとのくりこみ群の軌道の漸近的性質を， reduce したくりこみ群のそれに帰着させることができる可能性がある．Reduce したくりこみ群は $[d/2]$ 次元の空間上の写像になる．但し，これが証明できているのはいまのところ $d=2,3$ のみである．

(b) Reduce したくりこみ群の具体的な軌道解析.

(c) くりこみ群の微分写像の解析と， path の長さの分布の漸近形への翻訳.

(ii) Self-avoiding walk の漸近的性質の導出.

この分類から見たときの d 次元ガスケット上の self-avoiding walk の一般論の現状は次の通り．

(i) くりこみ群の具体形は d の増加とともに急速に複雑になり，現時点で分かっている一般的性質だけからは，特に reduce したくりこみ群について必要な性質は導くことができない.

(ii) くりこみ群の性質を仮定してそこから確率過程の漸近的性質を求めるという「第２段階のみの一般論」は現時点ではその具体的試みは存在しないが，ほぼ手中にしたと考えられる．くりこみ群の軌道解析から歩数分布の漸近形を導くのに適当なノルムの定義とガスケット上の点を表すのに適切な複数種類の座標の導入が，$d=3$, 4 の解析の比較によって煮詰まってきた.

d 次元ガスケットでは対応するくりこみ群が有限次元になる (finitely ramifiedness)．Self-avoiding walk がマルコフ性を欠くにも関わらず $d=2$, 3, (4) において解析に成功した本質的な理由はここにある．しかし，カオスで知られるように力学系は低次元でも複雑な挙動を示し得る．力学系の非自明な次元依存性は，self-avoiding walk の性質が空間次元に強く依存するという事実を反映するはずである．従ってくりこみ力学系の軌道の大局的構造の追跡という観点から self-avoiding walk の漸近的性質の次元依存性を研究するという道筋が見えてくる．

主要な問題は， reduce したくりこみ力学系の軌道の大局的構造の追跡の一般論ということになる．有限なプレガスケット上の self-avoiding walk の本数は有限個なので，くりこみ写像は正係数多項式である．従って，ある種の（多変数）正係数多項式が定義する力学系の不動点の唯一性と軌道の収束が問題になることが分かる．

しかも，この写像は d 次元ガスケットの図形的性質から $[d/2]$ 変数多項式（「ポテンシャル」） W の勾配として得られるので，くりこみ写像の固定点は $W - 2^{-1}\sum_{i=1}^{[d/2]} x_i^2$ の臨界点ということもできる．このことから §F の問題を得る．

References

[1] K. Ito, 確率論，岩波基礎数学選書，1991.

[2] 小針あき[78] 宏，確率・統計入門，岩波書店，1973.
初等確率論の教科書．１次元 random walk の結果も初等的に証明している．

[3] 志賀徳造，ルベーグ積分論から確率論，共立講座 21 世紀の数学 10，共立出版，2000.
1990 年代以降に出た確率論の基礎教科書の一つ．ランダムウォーク，母関数と漸近解析に，それぞれ一章をあてているのが特色．著者の研究の関係で voter model にも章を当てている．

[4] 辻正次，複素関数論，槇書店，第７版，1985.

[5] 西尾真紀子，確率論，実教出版，1978.

[6] 樋口保成，パーコレーション — ちょっと変わった確率論入門，遊星社，1992.

[7] P. G. Doyle, J. L. Snell, *Random walks and electric networks,* MAA, Math. Monograghs **22**, 1984.

[8] R. Durrett, *Probability: Theory and examples,* 2nd ed., Wadsworth, 1996.
確率論の本格的現代的教科書．確率論の基礎からブラウン運動までカバーする．Random walk についてもコンパクトな記述がある．

[9] フラクタルに関する数学の基礎教科書としては例えば，K. Falconer, *Fractal geometry,* Wiley, Chichester, 1990. 縮小写像の話は同書第 9 章.

[10] W. Feller, *An introduction to probability theory and its applications,* vol. I, II, 3rd ed., John Wiley & Sons, 1968.
W. フェラー (卜部舜一訳) ，確率論とその応用１上・下，２上・下，紀伊国屋書店，1988.
20 世紀中頃の確率論の定番の教科書．盛りだくさんの内容．Random walk の取り扱いに詳しい．

[11] G. Grimmett, *Percolation,* Springer–Verlag, New York.

[12] G. Lawler, *Intersections of random walks,* Birkhäuser, 1996.
著者の専門の random walk の交差確率の次元依存性を中心にした random walk 関連の確率論の専門的教科書.

[13] N. Madras, G. Slade, *The Self-Avoiding Walk,* Birkhäuser, 1993.
著者の専門の self-avoiding walk の数学・数理物理学に関する専門的教科書.（ただし，本講義後半のフラクタルの話は皆無.）

[14] フラクタルを広めたマンデルブローの著作，B. T. Mandelbrot, *The fractal geometry of nature,* Freeman, San Francisco, 1982, は有名.

[15] 電気抵抗の計算は教科書を参照していただきたい．例えば，高橋秀俊,「電磁気学」，裳華房（物理学選書３）.

[16] 服部哲弥,「フラクタルにおける対称性の回復」，数理科学 (1997.4) 55–62.

[17] 服部哲弥，確率論講義録（名大），`http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~hattori/` , 2000.

[18] 服部哲弥，数理解析特論講義録 (宇都宮大学)，`http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~hattori` , 1995.

[19] 服部哲弥， *Uniform weak convergence of probability measures on positive reals, which are defined by iteration*, Unpublished note, 2000–2001.

[20] Arcsine 法則の一般化に関しては次のものがあるとのことである.
M. T. Barlow, J. W. Pitman, M. Yor, *Une extension multidimentionnelle de la loi de l'arc sinus,* Séminaire de Prob. XXIII, ed. J. Azéma, P. A. Meyer, M. Yor, Lecture notes in mathematics **1372** (1989) 294–314.
S. Watanabe, *Generalized arc-sine laws for one-dimensional diffusion processes and random walks,* Stochastic analysis (Ithaca, NY, 1993), 157–172, Proc. Sympos. Pure Math. **57**, American Mathematical Society (1995).
佐藤裕子，笠原勇二，科研費シンポジウム「確率過程とその周辺」 (2000.12.11-14) 講演.

[78] Unicode 774D 目見

[21] M. T. Barlow, K. Hattori, T. Hattori, H. Watanabe, *Restoration of isotropy on fractals,* Physical Review Letters **75** (1995) 3042–3045.

[22] M. T. Barlow, K. Hattori, T. Hattori, H. Watanabe, *Weak homogenization of anisotropic diffusion on pre-Sierpiński carpet,* Communications in Mathematical Physics **188** (1997) 1–28.

[23] T. Hara, R. van der Hofstad, G. Slade, *Critical two-point functions and the lace expansion for spread-out high-dimensional percolation and related models,* preprint (MPEJ 00-468), 2000.

[24] T. Hara, G. Slade, *The lace expansion for self-avoiding walk in five or more dimensions,* Reviews in Math. Phys. **4** (1990) 235–327.

[25] T. Hara, G. Slade, *Self-avoiding walk in five or more dimensions. I. The critical behaviour,* Commun. Math. Phys. **147** (1992) 101–136.

[26] T. Hara, G. Slade, *The self-avoiding-walk and percolation critical points in High dimensions,* Cominatorics, Probability and Computing **4** (1995) 197–215.

[27] T. Hattori, *Asymptotically one-dimensional diffusions on scale-irregular gaskets,* Journal of Mathematical Science University of Tokyo **4** (1997) 229–278.

[28] T. Hattori, H. Watanabe, *Anisotropic random walks and the asymptotically one-dimensional diffusions on the abc-gaskets,* Journal of Statistical Physics **88** (1997) 105–128.

[29] K. Hattori, T. Hattori, *Self-avoiding process on the Sierpiński gasket,* Probability Theory and Related Fields **88** (1991) 405–428.

[30] B. Hambly, K. Hattori, T. Hattori, *Self-repelling walk on the Sierpiński gasket,* preprint (2001).

[31] K. Hattori, T. Hattori, S. Kusuoka, *Self-avoiding paths on the pre-Sierpiński gasket,* Probability Theory and Related Fields **84** (1990) 1–26.

[32] K. Hattori, T. Hattori, S. Kusuoka, *Self-avoiding paths on the three dimensional Sierpiński gasket,* Publications of RIMS **29** (1993) 455–509.

[33] K. Hattori, T. Hattori, H. Watanabe, *Gaussian field theories on general networks and the spectral dimensions,* Progress of Theoretical Physics Supplement **92** (1987) 108–143.

[34] K. Hattori, T. Hattori, H. Watanabe, *Asymptotically one-dimensional diffusions on the Sierpiński gasket and the abc-gaskets,* Probability Theory and Related Fields **100** (1994) 85–116.

[35] T. Hattori, S. Kusuoka, *The exponent for mean square displacement of self-avoiding random walk on Sierpiński gasket,* Probability Theory and Related Fields **93** (1992) 273–284.

[36] T. Hattori, H. Nakajima, *Transition density of diffusion on the Sierpiński gasket and extension of Flory's formula,* Physical Review E **52** (1995) 1202–1205.

[37] T. Hattori, T. Tsuda, in preparation.

[38] N. C. Jain, W. E. Pruitt, *Further limit theorems for the range of random walk,* J. Analyse Math., **27** (1974) 94–117，および，その引用文献.（1990 年代以降の発展は別に調べる必要がある.）

[39] N. Kosugi, *Tauberian theorems of exponential type and its application to mutliple convolution,* J. Math. Kyoto Univ., **39** (1999) 331–346, (Errata) J. Math. Kyoto Univ., **40** (2000) 203–203,

[40] N. Kosugi, *Tauberian theorems of exponential type on limits of oscillation,* J. Math. Kyoto Univ., **39** (1999) 783–792.

[41] 熊谷隆，ランダムウォークの訪問点に関する最近の話題１，濱名裕治，ランダムウォークの訪問点に関する最近の話題２，科研費シンポジウム「確率過程とその周辺」(2000.12.11–14) 講演，および，プレプリント (2000).

[42] S. Kusuoka, *A diffusion process on a fractal,* Proc. Taniguchi Symposium (1987) 251–274.

[43] K. Uchiyama, Proc. London Math. Soc. **77** (1998) 215–.