数理物理学 (広島大学集中講義)
Random walk and self-avoiding walk
(mpshort.tex from 数理物理学 III mp.tex)
服部哲弥
20010719-28;

数理物理学 ー Random walk と self-avoiding walk

Contents

0 イントロ．

この講義録は，広島大学における集中講義のために，[1] から，５日間 90 分の講義となるように切り出したものに，[1] では説明が不親切だった部分に説明を加えるなどの大幅な改訂を行って，事実上新たな講義録としたものである．
しかし，この講義録は，まだ，必要なものを挿入し損なったり，余分なものを残したりしていて，集中講義をそのまま反映していない．注意して利用していただきたい．

講義の目標． 数理物理学の一分野として，ミクロな法則からマクロな性質を導く統計力学がある（統計学とは，名前は似ているが，無関係である）．

理論物理学の一分野である統計力学の中に，無限自由度系の臨界現象という研究分野がある．無限自由度に由来する非解析性と臨界指数の普遍性を出発点の問題意識として，くりこみ群という描像に至った，分野である．また，理論物理学の別の一分野である場の量子論の中に，格子場の理論の連続極限というアプローチがある．統計力学系の連続極限を取ることでユークリッド場の量子論を得て，その測度のモーメントを再解釈することで素粒子の反応を記述する場の量子論を数学的に得ることができるという定式化である．

数理物理学としての統計力学は，これらの理論物理学の研究で得られた描像の数学的内容を深めていき，最終的には新しい数学の解析手段を手に入れ，また，それを理論物理学にフィードバックすることで，数学上の限界から行き詰まっていた統計力学と場の量子論の非摂動論的な側面の研究を進展させることを目標とする．

本講義ではその中から，格子上の確率連鎖（または，同じことだが，格子上に値を取る関数の集合上の確率モデル），特に simple random walk と self-avoiding walk に即して，集中講義の時間数で概略を説明する．

確率論でいう確率連鎖 (chain，離散時刻確率過程) の簡単な場合なので，確率論を含む既存の数学科の講義とのつながりがよい点で基礎講義として適当であると考える．

仮定する知識． ルベーグ積分論および確率論の講義を受講済みであることを仮定して，そういう受講者にとって過去の講義との話がつながりやすいように講義を組み立てる．しかし，いくつかの確率論の基礎用語を断りなく使うことを除けば，殆どの部分は初等的な微積分学以上の知識は必要ないはずである．

講義の構成． 前半は初等確率論の基礎教養 (d 次元格子上の walk)，後半は筆者の関わった研究 (Sierpiński gasket 上の walk とくりこみ群) である．５日間の集中講義の毎日の目標は以下の通り．

(i) $\mathbb{Z}^d$ 上の simple random walk.

標準的な初等確率論の話題とこの講義の主題の共通点．確率論では「独立確率変数の和」によって定義される simple random walk を「図形の上の確率」としてみると，種々の興味深い性質を内蔵していることを説明する．

講義全体の流れに関連する walk の漸近的性質の例として mean square displacement の exponent を重点的に取り上げ，空間次元によって walk の漸近的性質が大きく変わることの例として再帰性 (recurrence) にも触れたい．

参考文献．[15, vol. 1 III 章, XIII 章, §XIV.7]，[13, §3]，[8, 6 章]，[17]，[7, §6.1]，[2, 補遺]，[3].

(ii) $\mathbb{Z}^d$ 上の self-avoiding walk.

Simple random walk に簡単な制限をつけるだけで極めて難しい (低次元で未解決の) 問題になることを示し，興味の在処を明らかにする．くりこみ群の描像への期待の一つの動機として，最小限の紹介をする．

参考文献．[18]，[17, 6 章].

(iii) 1 次元 simple random walk のくりこみ群.

くりこみ群の思想そのものは確率論にもあった．というよりも，中心極限定理を初めとする極限定理はくりこみ群の精神と本質的な部分で多くを共有する．この講義との関係の深い，Knight による 1 次元 simple random walk の概収束極限としての Brown 運動の構成の話の始めの部分を紹介する．

参考文献．[41].

(iv) Sierpiński gasket 上の self-avoiding walk のくりこみ群.

Self-avoiding walk の解析におけるくりこみ群の視点を Sierpiński gasket 上で解説する．Simple random walk による Brown 運動の構成のくりこみ群はくりこみ群軌道としては固定点直上にとどまる自明なものである．これに対して，数理物理学でくりこみ群の問題が取り上げられるときは，自明でない軌道を追跡することが重要である．これまで数学でくりこみ群が重視されてこなかったとすれば，Markov 性にこだわってきたことと，自明でないくりこみ群軌道を追跡する問題は避けて固定点直上理論に対応する問題を中心に考察してきたからかもしれない．

このことを意識して，Sierpiński gasket 上の self-avoiding walk のくりこみ群の軌道追跡について説明する．

参考文献．[33], [31], [37], [34]，[39].

(v) Sierpiński gasket 上の self-avoiding walk の mean square displacement.

Sierpiński gasket 上の self-avoiding walk のくりこみ群の大局的軌道から walk の漸近的性質を導く．くりこみ群という一見確率連鎖と全く異質に見える力学系の軌道追跡が確率連鎖の漸近的性質を反映していることを，単なる描像としてではなく数学的定理として具体化できる．このことについて，大ざっぱなあらすじだけでも説明したい．この部分は d 次元 gasket の場合に一般化できている．

参考文献．同上．

Sierpiński gasket はくりこみ群が簡単になるように作ったおもちゃであり，仮に Sierpiński gasket で成功しても本来の問題である d 次元格子空間上の self-avoiding walk の問題には答えられないだろう，という批判は当然ある．しかしこの批判にこの講義で答えるつもりはない．

一つには，高次元 Sierpiński gasket の self-avoiding walk のくりこみ群が一般的に解決して初めて低次元格子上の self-avoiding walk のくりこみ群が可能になると思っているからである．

もう一つには，self-avoiding walk の問題を超えて，くりこみ群の描像は 21 世紀の解析学の中心課題になると信じており，Sierpiński gasket の上の self-avoiding walk はそのための (22 世紀には消えてしまうかもしれない) 踏み台の一つとして意味があると思っているからでもある．

講義の限界． 時間的な制約と講義の目標を絞るべきこと，および，筆者の能力の限界から当然に講義には限界がある．しかし，これは限界ととらえるより，この講義の特徴ととらえるべきである．

(i) Simple random walk は Brown 運動と，確率連鎖 (離散時間 $\mathbb{Z}$ 上の関数の集合上の確率測度) と確率過程 (連続時間 $\mathbb{R}$ 上の (連続) 関数の集合上の確率測度) という違いにも関わらず，多くの性質を共有する．

実際，この講義の描像と強く関係する，1 次元 simple random walk の概収束極限による Brown 運動の構成 [41] は，両者が密接な関係にあることを明示している．Simple random walk の単位時間幅を 0 にした極限が Brown 運動であるという関係は，数理物理学では連続極限と呼ばれる．(確率過程論では Brown 運動を弱収束極限で構成してから，invariance principle と呼ばれる定理によって simple random walk の弱収束極限がこれに一致することを言うのが通常の道筋である．)

従って，Simple random walk と Brown 運動に共通する性質が基礎教養として重要だが，arcsine law や law of iterated logarithm などの興味深い共通性質を割愛する．また，ブラウン運動そのものは扱わない．この講義全体にわたって離散時間（確率連鎖）の解析に限る．(もちろん漸近形を見るという意味で近いところまで話があるが，path measure の構成に踏み込まない．)

(ii) $\mathbb{Z}^d$ 上の self-avoiding path に関して，$d > 4$ 次元では Hara–Slade によって exponents（漸近的性質を決める指数）が (ほぼ) 決着して，simple random walk のそれに一致することが分かっている．但し，証明は技術的に複雑でとても紹介できない．

この講義では，self-avoiding path と simple random walk の漸近的性質が異なると予想されている低次元への注意を喚起するだけにとどめる．

(iii) くりこみ群の数学の中心課題であるスピン系の統計力学 (場の量子論を含む) および block spin transformation くりこみ群の話題はたいへん難しい上に重要な問題が未解決であり，基礎講義で紹介するとしても，別の講義が必要である．

この講義は，内容的に新しい試みであり，従って，入れるべき題材を落としたり，Appendix に回すべき内容を本文に入れたり，冗長や逆に説明不足など，いろいろなレベルの不備があるはずである．文献表もいかなる意味での完全性も意図していない．収録した文献の収録意図が文献によって異なる点で一貫性もない．

Notation． [17, Notation] に従って，$A_n \sim B_n$ を $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{B_n} = 1$ の意味，$A_n \asymp B_n$ を $c_1 B_n \leqq A_n \leqq c_2 B_n$ なる $0 < c_1 \leqq c_2$ が存在すること，$A_n \approx B_n$ を $\log A_n \sim \log B_n$，の意味にそれぞれ使う．

このほか，通常の記号法として，$x \in \mathbb{R}$ に対して $[x]$ は x を越えない最大の整数，$x, y \in \mathbb{R}$ に対して $x \vee y = \max\{x, y\}$, $x \wedge y = \min\{x, y\}$ を使う．

1 $\mathbb{Z}^d$ 上の simple random walk．

1.1 n 次元 simple random walk の定義．

$d \in \mathbb{N}$ として $\mathbb{Z}^d$ を考える．実 d 次元空間 $\mathbb{R}^d$ に埋め込んだときの姿から，以後 $\mathbb{Z}^d$ を d 次元格子空間という．

原点 0 の隣の格子点の集合を $S = \{x \in \mathbb{Z}^d \mid |x| = 1\}$ とおくとき，S に値をとる i.i.d. [1] 確率変数列 $X_n : \Omega \to S$, $n \in \mathbb{Z}_+$, が S の $2d$ 個の要素全てを等しい確率 $\mathrm{P}[\, X_1 = x \,] = (2d)^{-1}$, $x \in S$, でとるとする．これらと $x_0 \in \mathbb{Z}^d$ の和で定義される確率変数列 $W_n = x_0 + \sum_{k=1}^{n} X_k$, $n \in \mathbb{Z}_+$, を d 次元 simple random walk という．[2] 一般に，

> 非負整数の添字で番号づけられた可算個の確率変数列 W_n, $n \in \mathbb{N}$, を確率連鎖と言い，n を時刻と言う．

d 次元 simple random walk は $\mathbb{Z}^d$ に値を取る（$\mathbb{Z}^d$ を状態空間とする）確率連鎖である．

さいころをふって格子点上を動くすごろく（あるいはでたらめに歩く酔っぱらい）という描像から random walk という名前が由来する．

$d = 1$ の場合は実数値独立確率変数列の和の議論（で，$\{\pm 1\}$ に値をとるもっとも単純な場合）に他ならない．Simple random walk という言葉を使うときは，特に，W_n という実数値の漸近的性質も見るが，さらに，path の性質，即ち $\{W_1, \cdots, W_n\}$ 全体に依存する性質「図形の確率論 (stochastic geometry)」に視点がある．背景には拡散現象の物理学や，より遠い背景には，臨界現象の統計力学からの刺激があり，更にその遠くには場の量子論からの興味も控えている．

‘Simple’ という形容詞のない random walk というとき何を指すかは，人によって多少の違いがあるように感じるが，もっとも広く言えば，Markov chain のことを指す．(Markov chain とは W_{n+1} が $W_n = a$ で条件付ければ W_k, $k = 1, \cdots, n-1$, と独立になることをいう．）いちばん広く使われる呼び方としては $\{W_n\}$ が独立確率変数列の部分和の列になっているときに random walk と呼ぶようである．この講義では random walk としては simple random walk しか出てこない．

次の性質は定義から直ちに出るが，重要である (マルコフ性)：$\{W_n\}$ を SRW，m を非負整数とするとき，$\tilde{W}_n = W_{m+n} - W_m$, $n = 0, 1, 2, \cdots$, は原点を出発する SRW であって，$X_1, \cdots, X_m$ と独立である．この性質は暗黙のうちにいろいろな場面で使う．

1.2 Mean square displacement.

1.2.1 1 次元の場合.

この節 §1.2.1 では $d = 1$ の場合（1 次元 simple random walk）を扱う．即ち，確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ が与えられたとして，その上で，$\{X_n\}$ を i.i.d. で ± 1 を確率 $1/2$ でとる確率変数列とし，$W = (W_1, W_2, \cdots)$ を $W_n = x_0 + \sum_{k=1}^{n} X_k$, $n \in \mathbb{Z}_+$, 即ち，$x_0 \in \mathbb{Z}$ から出発する simple random walk，とする．x_0 は特に断らなければ 0 にとることが多い．

簡単のため出発点 $x_0 = 0$ とする．W_n の漸近的性質でもっとも基本的なものは mean square displacement $\mathrm{E}[\, W_n^2 \,]$ であろう（$\mathrm{E}[\, W_n \,] = 0$ だから 2 次のモーメントが最初の自明でない量）．定義を用いて，$\{X_n\}$ の独立性と $\mathrm{E}[\, X_n \,] = 0$ と $X_n^2 = 1$ に注意すると，

$$\mathrm{E}[\, W_n^2 \,] = \sum_{i \neq j} \mathrm{E}[\, X_i X_j \,] + \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}[\, X_i^2 \,] = n, \quad n \in \mathbb{N},$$

を得る．

> 一般に，実数値確率変数列 W_n に対して（random walk に対して），n, p によらない正数 C_1, C_2, ν が存在して $C_1 n^{p\nu} \leqq \mathrm{E}[\, W_n^p \,] \leqq C_2 n^{p\nu}$ が全ての $n \in \mathbb{N}$ と $p > 0$ に対して成り立つとき，W_n の mean square displacement の exponent (the end-to-end distance exponent) は ν である，という．

（このことを $\mathrm{E}[\, W_n^p \,] \asymp n^{p\nu}$ と書くことにする.）Simple random walk の mean square displacement の exponent は $\dfrac{1}{2}$ である．大ざっぱに言えば mean square displacement の exponent が ν ということは $|W_n|$ が n^ν 程度の範囲に分布していることを意味すると考えられるだろう．まっすぐ進めば $W_n = n$ で exponent は 1 だが，全く動かないならば $\nu = 0$ である．正方形の格子点を埋め尽くすように進めば $\nu = 1/2$ である．つまり，simple random walk は 2 次元的な path と見ることができそうである．

---

[1] 以後，確率変数が独立同分布であることを i.i.d. と略記する．Independent identically distributed の略．

[2] これがきちんとした数学になるためには，そのような i.i.d. の列がどこかの確率空間上の確率変数列として存在する（つまり定義に矛盾がない）ことを言うべきであるが，直積測度空間の構成という測度論の議論によって，S の要素からなる数列ならぬ S 列の集合上に定義できることがわかる．以後，この種の注意に拘泥することをやめるが，気になる人は各自補充されたい．

逆に本当に「 $|W_n|$ が $n^{1/2}$ 程度」ならば，単に $\mathrm{E}[\,W_n^2\,] \sim n$ だけでなく，

$$\mathrm{E}[\,|W_n|^{2p}\,] \sim C_p n^p \tag{1}$$

が全ての $p>0$ で成り立つはずである (C_p は p のみできまる定数).

ℓ が自然数のときの $\mathrm{E}[\,W_n^{2\ell}\,]$ の漸近形は初等的にできる．実際， $\ell=1$ は既にやったが， $\ell=2$ のときも同様にやると，

$$\mathrm{E}[\,W_n^4\,] = 3\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{\substack{1\leqq k_2\leqq n\\ k_2\neq k_1}}\mathrm{E}[\,X_{k_1}^2\,]\mathrm{E}[\,X_{k_2}^2\,] + \sum_{k=1}^{n}\mathrm{E}[\,X_k^4\,] = 3n^2-2n.$$

問 1 1 次元 SRW について $\mathrm{E}[\,W_n^4\,]$ の計算を実行せよ． ◇

一般に， $\ell=1,2,\cdots$ に対して

$$\mathrm{E}[\,W_n^{2\ell}\,] = (2\ell-1)!!\,n^{\ell}\,(1+O(n^{-1})),\quad n\to\infty. \tag{2}$$

よって， (1) が自然数に対しては成り立つ．

p が自然数でないときは初等的にはできない．参考までに §A.2 にその導出を示す．

1.2.2 d 次元の場合．

Mean square displacement の exponent は次元 d によらず 1/2 である．

まず，ℓ が自然数のときの $\mathrm{E}[\,(W_n^2)^{\ell}\,]$ の漸近形を初等的に導く．ここで $W_n=(W_{n1},\cdots,W_{nd})$ は d 次元ベクトルで，$W_n^2=\displaystyle\sum_{k=1}^{d}W_{nk}^2$ とする．$X_1=(X_{11},\cdots,X_{1d})$ も同様である．

d 次元 simple random walk の定義から $\mathrm{E}[\,X_{1i}\,]=0,\ i=1,\cdots,d,$ $\mathrm{E}[\,X_{ki}X_{ji}\,]=\dfrac{1}{d}\delta_{kj},\ k,j=1,\cdots,n,$ $i=1,\cdots,d$．よって

$$\mathrm{E}[\,W_n^2\,] = \sum_{i=1}^{d}\mathrm{E}[\,W_{ni}^2\,] = \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{E}[\,X_{ki}X_{ji}\,] = n.$$

同様に，$i\neq i'$ ならば $X_{ki}X_{ki'}=0,\ k=1,\cdots,n,$ も使って，

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[\,W_n^4\,] &= \sum_{i_1=1}^{d}\sum_{i_2=1}^{d}\sum_{j_1=1}^{n}\sum_{j_2=1}^{n}\sum_{j_3=1}^{n}\sum_{j_4=1}^{n}\mathrm{E}[\,X_{j_1i_1}X_{j_2i_1}X_{j_3i_2}X_{j_4i_2}\,]\\
&= \sum_{i_1=1}^{d}\sum_{j_1=1}^{n}\sum_{j_2=1}^{n}\sum_{j_3=1}^{n}\sum_{j_4=1}^{n}\mathrm{E}[\,X_{j_1i_1}X_{j_2i_1}X_{j_3i_1}X_{j_4i_1}\,]\\
&\quad+\sum_{i_1\neq i_2}\sum_{j_3=1}^{n}\sum_{j_4=1}^{n}\sum_{j_1\neq j_3,j_4}^{n}\sum_{j_2\neq j_3,j_4}^{n}\mathrm{E}[\,X_{j_1i_1}X_{j_2i_1}\,]\mathrm{E}[\,X_{j_3i_2}X_{j_4i_2}\,]\\
&= \sum_{i_1=1}^{d}\Big(\sum_{j_1=1}^{n}\mathrm{E}[\,X_{j_1i_1}^4\,]+\sum_{j_1=1}^{n}\sum_{j_2\neq j_1}\mathrm{E}[\,X_{j_1i_1}^2\,]\mathrm{E}[\,X_{j_2i_1}^2\,]\Big)+\sum_{i_1\neq i_2}\sum_{j_3=1}^{n}\sum_{j_1\neq j_3}\mathrm{E}[\,X_{j_1i_1}^2\,]\mathrm{E}[\,X_{j_3i_2}^2\,]\\
&= (n+n(n-1)/d)+(n(n-1)(d-1)/d) = n^2.
\end{aligned}$$

以下，同様に考えると自然数 ℓ に対しては (2) の d 次元版

$$\mathrm{E}[\,|W_n|^{2\ell}\,] \sim C_{d,\ell}n^{\ell}$$

を得る．ここで $C_{d,\ell}$ は d と ℓ だけによる定数．

以上の $\mathrm{E}[\,W_n^2\,]$ の計算で独立性を使ったことを強調しておく．もう少し詳しく言うと，SRW は， $W_{n+i}-W_n,\ i\in\mathbb{Z}_+,$ が $W_j,\ j=1,\cdots,n,$ と独立な SRW である，という著しい性質があり，このことを使った．この性質を Markov 性と言う．簡単に言うと，SRW は途中の点から新規まき直しで再び SRW による（過去には関係ない）．

Self avoiving walk (SAW) には Markov 性はない．一度通った点は二度と通れないので原理的に Markov 性がない．従って，SAW の mean square displacemnt はたいへん難しい．

1.3　1 次元 SRW の再帰性．

この節では再び 1 次元 simple random walk に戻る．

1.3.1　Path の本数．

見本 $\omega \in \Omega$ に対する $W(\omega)$ や $(W_1, \cdots, W_n)(\omega)$ を平面内の折れ線に翻訳することができる．

平面内の連続した折れ線グラフで $(0, x_0)$ から出発して傾き $\pm 45°$ で長さ $\sqrt{2}$ の線分を x 軸正方向につないでつくったものを walk または path と言う．Random walk のイメージから各要素線分を 1 歩という．Path の全体を $\mathcal{W}$ とおく．そのうち最初の n 歩の部分を n 歩の path と呼んで，その全体を $\mathcal{W}_n$ とおく．$\sharp \mathcal{W}_n = 2^n$ は明らか．

$\omega \in \Omega$ を１つとる． $k = 1, 2, \cdots$ に対して $(k-1, W_{k-1}(\omega))$ と $(k, W_k(\omega))$ を結んで折れ線グラフをつくることで $W : \Omega \to \mathcal{W}$ なる対応を得る．また，各 $n \in \mathbb{Z}_+$ 毎に $(W_1, \cdots, W_n) : \Omega \to \mathcal{W}_n$ なる対応がある．定義から全ての n 歩の path がそれぞれ確率 2^{-n} で現れる．

$n \in \mathbb{N}$ と $x_0 \in \mathbb{Z}$ に対して $\mathbb{Z}$ の列 $(x_0, x_1, \cdots, x_n)$ で $|x_i - x_{i-1}| = 1,\ i = 1, \cdots, n,$ を満たすものを (x_0 を出発点とする $\mathbb{Z}$ 上の)n 歩の path と呼び，$\mathcal{W}_n$ をそのような path を全て集めた集合とする．$\sharp \mathcal{W}_n = 2^n$ に注意．断らなければ，以下 $x_0 = 0$ とする．

$\mathcal{W}_n$ と SRW $\{W_n\}$ を関係づける．SRW の n 歩目まで $(W_0, \cdots, W_n)$ の (確率が 0 でない) サンプルは定義から $\mathcal{W}_n$ の要素で尽くされることは明らか．しかも，X_n が i.i.d. であることと $\mathrm{P}[\, X_1 = 1\,] = \mathrm{P}[\, X_1 = -1\,] = 1/2$ であることから，$\mathrm{P}[\, (W_0 \cdots, W_n) = w\,] = 2^{-n}$, $w \in \mathcal{W}_n$, 即ち，

SRW の n 歩目まで $(W_0 \cdots, W_n)$ の (結合) 分布は n 歩の path 集合 $\mathcal{W}_n$ 上の一様分布である．
平たく言えば，SRW がある (n 歩目までで決まる) 性質を満たす確率は，その性質を持つ n 歩の path の本数を $\sharp \mathcal{W}_n = 2^n$ で割った値に等しい．

例えば ($x_0 = 0$ として) $n \in \mathbb{N}$ と $x \in \mathbb{Z}$ に対して

$$N_{n,x} = \sharp\{(0, x_1, \cdots, x_n) \in \mathcal{W}_n \mid x_n = x\}$$

とおく．右辺の集合は，平面内の $(0,0)$ から (n, x) への折れ線 (これも path と言うことにする) であって，1 歩進む毎に横方向に 1，縦方向に ± 1 進むもの，の集合.（ここでは１次元 RW のためだけの便宜として，第１成分を時刻または歩数として「横方向」，第２成分を $\mathbb{Z}$ 上の位置として,「縦方向」と名付けた.）そのような path の総数を $N_{n,x}$ とおいた．このとき，$\mathrm{P}[\, W_n = x\,] = N_{n,x}/2^n$ 等となる．こうして SRW の計算は path の数を数えるという組み合わせ論の問題に (原理的には) 帰着する．

なお，simple random walk と path の本数を数えるという対応は，明らかに， d 次元 simple random walk に一般化できる．

問 2 n 歩の d 次元 *simple random walk* は何本あるか？ ◇

1.4　d 次元 random walk の再帰性．

1.4.1　推移確率 (transition probability)．

§1.2.1 に書いたように，原点 0 の隣の格子点の集合を $S = \{x \in \mathbb{Z}^d \mid |x| = 1\}$ とおくとき，S に値をとる i.i.d. 確率変数列 $X_n : \Omega \to S$, $n \in \mathbb{Z}_+$, が S の $2d$ 個の要素全てを等しい確率 $\mathrm{P}[\, X_1 = x\,] = (2d)^{-1}$, $x \in S$, でとるとし， $x_0 \in \mathbb{Z}^d$ に対して，$W_n = x_0 + \sum_{k=1}^{n} X_k$, $n \in \mathbb{Z}_+$, とおいて d 次元 simple random walk という．

定義は出発点 x_0 によるので， x_0 毎に確率測度を考えていることになるので，同時にいろんな出発点を考えるときは P_{x_0} のように添字で区別することにする[3]．

$n \in \mathbb{Z}_+$, $x, y \in \mathbb{Z}^d$ に対して

$$p_n(x, y) = \mathrm{P}_x[\, W_n = y\,] \tag{3}$$

とおいて，n 歩の推移確率と言う．

特に，$p_0(x, y) = \delta_{x,y}$ である．

[3] 確率空間も x_0 毎に別々に取ることもできるが，集合としては全部を合わせたものを考えて，その上の測度だけ区別しても何も変わらないので，そのように思うことにする．

再帰性のように，path 全体の形ではなくある時刻（stopping time でもよいが）にどこにいるか，が問題になるときは，推移確率が非常に基本的な量になる．また，random walk にはマルコフ性があるので，推移確率さえ与えれば path 上の確率測度は決まってしまう．応用上も，例えばインキのシミが水の中に染み渡る様子など，現実に有用な量そのものである．以上の意味で random walk においては決定的に重要な量である．逆に言えば，マルコフ性のない self-avoiding walk では決定的に重要な量とは言えなくなるが，random walk との対比という意味では引き続き重要な量である．

> Simple random walk (マルコフ過程) は非常に詳しい性質が分かっている．また，強力な解析手段がそろっている．マルコフでない過程の random walk に比較した特徴の抽出が数理物理学からみた確率過程論周辺の重要な課題であり，self-avoiding walk はその一つの（長い歴史があるという意味で象徴的な）典型である．

(3) と同様に

$$p_n(x,y) = \mathrm{P}[\, W_n = y \mid W_0 = x \,] \tag{4}$$

とおく．

命題 1 $n \in \mathbb{Z}_+$ に対して以下が成り立つ．(最初の 2 点では，p_n を (x,y) 成分とする $\mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d$ 行列とみなす記号を使う.)

(i) $p_0 = \mathbb{I}$.（左辺は単位行列.）

(ii)

$$p_n = p_1^n = p_1 \times p_1 \times \cdots \times p_1 \,. \tag{5}$$

(iii) $p_n(x,y) = p_n(0, y-x)$, $x, y \in \mathbb{Z}^d$ （空間的一様性）．

(iv)

$$\mathrm{P}[\, W_{n+1} = y \mid W_0 = x_0\,,\ W_1 = x_1\,,\ \cdots,\ W_n = x_n \,] = p_1(x_n, y), \quad x_0, \cdots, x_n, y \in S,\ n \in \mathbb{Z}_+. \tag{6}$$

（時間的一様性）．

注 1 行列の積は，各成分が非負なので，級数和の意味で常に *well-defined* である[4]．◇

証明. いずれも定義から明らかであろう. □

1.4.2 Markov 性．

１次元のとき (61) と同様に，点 $x \in \mathbb{Z}^d$ への到達時刻 (hitting time) を

$$T_x = \begin{cases} \min\{n \geqq 1 \mid W_n = x\}, & \exists n \in \mathbb{N};\ W_n = x\,, \\ \infty, & \text{otherwise}, \end{cases} \tag{7}$$

で定義する[5]．

Hitting time については，殆ど何も使わないが，確率過程論必須の概念なので §A.5 に若干の基礎事項を復習しておく．

$\mathrm{P}_x[\, T_x < \infty \,]$ は出発点に戻る確率を表す．1 歩進んで戻る確率は正だから，d 次元 simple random walk では $\mathrm{P}_x[\, T_x < \infty \,] > 0$ が成り立つ．そこで最初の興味はこれが 1 になるかどうかである．

> $x \in \mathbb{Z}^d$ は $\mathrm{P}_x[\, T_x < \infty \,] = 1$ のとき再帰的 (recurrent) な点，そうでなければ過渡的 (transient) な点である，という．

特に $W_0 = x$, a.e, ならば T_x を再帰時刻 (recurrence time) という．($\mathrm{P}_x[\ \cdot\ ] = \mathrm{P}[\,\cdot \mid W_0 = x\,]$ で測れば $W_0 = x$, a.e., である．) $\mathrm{P}_x[\, T_x < \infty \,] = 1$ のとき x は再帰的 (recurrent) といい，任意の $x \in S$ が再帰

[4] 連続時間のマルコフ過程では convolution operator で定義する．

[5] Hit しない場合に備えて必ず $\{\infty\}$ も値域に含めないといけないことを念頭におくべきである．例えば，T_x を含む量を $n = T_x$ で条件付けて n について和を取る，という変形技術があるが，単に n についての級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}$ を考えただけでは $T_x = \infty$ の場合は抜けてしまうことに注意．

的ならば $\{W_n\}$ または $\{p_n\}$ は再帰的であるという．逆に $\mathrm{P}_x[\,T_x=\infty\,]>0$ ならば x は過渡的 (transient) という．

$$\mathrm{P}_x[\,T_y<\infty\,]=\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{P}_x[\,T_y=k\,], \tag{8}$$

に注意．

再帰性の次の言い換えは基本的である．

定理 2 $x\in\mathbb{Z}^d$ が再帰的ならば，確率 1 で $W_n=x$ が無限個の n に対して成り立つ．即ち，$\mathrm{P}_x[\,\overline{\lim_{n\to\infty}}\{W_n=x\}\,]=\mathrm{P}[\,\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty}\{W_n=x\}\,]=1$,

$x\in\mathbb{Z}^d$ が過渡的ならば $\mathrm{P}_x[\,\overline{\lim_{n\to\infty}}\{W_n=x\}\,]=0$．0 と 1 の間の確率は起きない（従って，それぞれ同値条件）．

証明．$m\in\mathbb{N}$ に対して m 回目に x に戻る時刻を $T_x^{(m)}\in\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ とおく．即ち，$T_x^{(1)}=T_x$ および

$$T_x^{(m)}=\min\{n>T_x^{(m-1)}\mid W_n=x\},\ m=2,3,4,\cdots.$$

ここで，$T_x^{(m-1)}=\infty$ または右辺の min の条件を満たす n がなければ $T_x^{(m)}=\infty$ と定義する．当然 $T_x^{(1)}\leqq T_x^{(2)}\leqq\cdots$．ただし等号は ∞ のときだけ．これを使えば $\overline{\lim_{n\to\infty}}\{W_n=x\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\{T_x^{(n)}<\infty\}$ と書けるので，

$$\mathrm{P}_x[\,\overline{\lim_{n\to\infty}}\{W_n=x\}\,]=\lim_{n\to\infty}\mathrm{P}_x[\,T_x^{(n)}<\infty\,].$$

よって，

$$\mathrm{P}_x[\,T_x^{(n)}<\infty\,]=\mathrm{P}_x[\,T_x<\infty\,]^n,\quad n\in\mathbb{N}, \tag{9}$$

を証明すれば十分である．

まず，$m,i,j\in\mathbb{N}$ に対して

$$\mathrm{P}_x[\,T_x^{(m)}=i,\ T_x^{(m+1)}=i+j\,]=\mathrm{P}_x[\,T_x^{(m)}=i\,]\,\mathrm{P}_x[\,T_x=j\,]$$

に注意する．実際，(6) から

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}_x[\,T_x^{(m+1)}=i+j\mid T_x^{(m)}=i\,]=\mathrm{P}_x[\,W_k\neq x,\ k=i+1,\cdots,i+j-1,\ W_{i+j}=x\mid T_x^{(m)}=i\,]\\&=\mathrm{P}_x[\,W_k\neq x,\ k=1,\cdots,j-1,\ W_j=x\,]=\mathrm{P}_x[\,T_x=j\,]\end{aligned}$$

だから，それは正しい．これを用いると $m\geqq 2$ で

$$\begin{aligned}\mathrm{P}_x[\,T_x^{(m)}<\infty\,]&=\mathrm{P}_x[\,T_x^{(m-1)}<T_x^{(m)}<\infty\,]=\sum_{i=m-1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\mathrm{P}_x[\,T_x^{(m-1)}=i,\ T_x^{(m)}=i+j\,]\\&=\sum_{i=m-1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\mathrm{P}_x[\,T_x^{(m-1)}=i\,]\,\mathrm{P}_x[\,T_x=j\,]=\mathrm{P}_x[\,T_x^{(m-1)}<\infty\,]\,\mathrm{P}_x[\,T_x<\infty\,].\end{aligned}$$

よって m についての帰納法で (9) が成り立つ．

□

再帰性の判定にグリーン関数が有効である．

$$f_{k,x,y}=\mathrm{P}_x[\,T_y=k\,],\quad k\in\mathbb{N},\ x,y\in\mathbb{Z}^d, \tag{10}$$

とおくと，(8) から

$$\mathrm{P}_x[\,T_y<\infty\,]=\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{P}_x[\,T_y=k\,]=\sum_{k=1}^{\infty}f_{k,x,y}\,. \tag{11}$$

((7) の脚注に注意！）．

$p_n(x,y)$ と $f_{n,x,y}$ の母関数[6] を

$$G_s(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}p_n(x,y)s^n,\quad |s|<1, \tag{12}$$

および

$$F_s(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}f_{n,x,y}s^n,\quad |s|\leqq 1, \tag{13}$$

で定義する（f は時刻 0 では定義していないことに注意）．ここで

$$F_1(x,y)=\mathrm{P}_x[\,T_y<\infty\,]\leqq 1$$

だから $F_s(x,y)$ は $|s|=1$ でも定義されることに注意.

命題 3 $x,y\in\mathbb{Z}^d$ に対して以下が成り立つ.

$$p_n(x,y)=\sum_{m=1}^{n}f_{m,x,y}p_{n-m}(y,y),\ n\in\mathbb{N},$$
$$G_s(x,y)=\delta_{x,y}+F_s(x,y)G_s(y,y),\ |s|<1\,.$$

証明. $n\in\mathbb{N}$ に対して $A_n=\{W_n=y\}$, $B_n=\{W_n=y,\ W_k\neq y,\ 1\leqq k<n\}$ $(=\{T_y=n\})$ とおくと, $\mathrm{P}_x[\,A_n\,]=p_n(x,y)$，および (10) から $\mathrm{P}_x[\,B_n\,]=f_{n,x,y}$．よって $1\leqq m<n$ のとき (6) から

$$\mathrm{P}_x[\,A_n\cap B_m\,]=\mathrm{P}_x[\,B_m\,]\,\mathrm{P}_x[\,A_n\mid B_m,\ W_0=x\,]=f_{m,x,y}\,p_{n-m}(y,y).$$

$m=n$ のときも両端の辺が等しいことは直接確かめられる.

$\bigcup_{m=1}^{n}(A_n\cap B_m)=A_n$ かつ B_m たちが排反なことから，最初の等式を得る．その両辺に s^n をかけて $\sum_{n=1}^{\infty}$ をとり，左辺に (6) を使って，右辺で和の順序を交換すると残りの式を得る.

□

命題 3 によって，再帰状態と遷移確率の対角線成分の和 (trace) $\sum_{n=0}^{\infty}p_n(x,x)=\lim_{s\uparrow 1}G_s(x,x)$ の収束が対応することが分かる.

定理 4 $x\in\mathbb{Z}^d$ が再帰状態であるための必要十分条件は $\sum_{n=0}^{\infty}p_n(x,x)=\infty$.

証明. 単調収束定理と (11) から

$$\lim_{s\uparrow 1}F(x,x;s)=F(x,x;1)=\mathrm{P}[\,T_x<\infty\mid W_0=x\,]$$

および

$$\lim_{s\uparrow 1}P(x,x;s)=\sum_{n=0}^{\infty}p_n(x,x)\in\mathbb{R}\cup\{\infty\}$$

を得る．命題 3 から $P(x,x;s)(1-F(x,x;s))=1$, $|s|<1$, だから，$s\uparrow 1$ とすれば $\sum_{n=0}^{\infty}p_n(x,x)=\infty$ と $\mathrm{P}[\,T_x<\infty\mid W_0=x\,]=1$ が同値になることが分かる.

□

各次元 d 毎に，d 次元 SRW の再帰性を調べる．明らかに $\mathbb{Z}^d$ のどの点も対等なので，どれか一点 (原点) の再帰性 $(\mathrm{P}_0[\,T_0<\infty\,])$ だけ調べれば十分である.

[6] p_n, f_n を重み (相対分布) に取るときの時刻 n の母関数，と呼ぶ方が正しいと思うが...

$d=1$ の場合．　既に §A.5.3 で見たとおり，1 次元 SRW は再帰的である．

定理 4 を適用してみよう．$p_n(0,0)=\mathrm{P}_0[\,W_n=0\,]$ が分かればよい．奇数歩では原点に戻れないのは明らか：$p_{2m+1}(0,0)=0$．偶数歩のとき，$2m$ 歩の path で $2m$ 歩目に原点にいるものの本数 $N_{2m,0}$ は $+$ 方向に m 歩，$-$ 方向に m 歩進む path の本数に等しいから，

$$N_{2m,0}=\binom{2m}{m}. \tag{14}$$

Path の総本数は 2^{2m} だから，§1.3.1 の注意により，

$$p_{2m}(0,0)=\mathrm{P}_0[\,W_{2m}=0\,]=2^{-2m}N_{2m,0}=2^{-2m}\binom{2m}{m}.$$

スターリングの公式 (§A.3)

$$n!\sim\sqrt{2\pi n}n^ne^{-n}$$

を用いると $p_{2m}(0,0)\sim\dfrac{1}{\sqrt{\pi m}}$ となるので，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}p_n(0,0)=\infty$．よって 定理 4 より，1 次元 simple random walk は再帰的である．

$d=2$ の場合．　$d=1$ の場合に (14) を得たように，左右上下に進む回数とその組み合わせを数える．n 歩で出発点に戻る path の本数を N_n とする．奇数歩の場合は出発点には戻れないので $N_{2m+1}=0$．$2m$ 歩で原点に戻るには左右に k 歩，上下に $m-k$ 歩ずつ，但し，$k=0,1,\cdots,m$，という場合でつきる．$(1+t)^m\cdot(1+t)^m=(1+t)^{2m}$ の t^m の係数を比較して得られる公式

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}^2=\binom{2m}{m}$$

も使えば

$$N_{2m}=\sum_{k=0}^{m}\binom{2m}{k}\binom{2m-k}{k}\binom{2m-2k}{m-k}=\binom{2m}{m}^2.$$

よって（結果が $d=1$ のときの 2 乗になったので），

$$p_{2m}(0,0)=(2d)^{-2m}\binom{2m}{m}^2\sim\frac{1}{\pi m}.$$

再び $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}p_{2m}(0,0)=\infty$ だから定理 4 より，2 次元 simple random walk も再帰的である．

$d\geqq 3$ の場合の結果．　2 項係数 1 つで書ける結果にはならないが，同様に数え上げて漸近形を評価することは可能である．結果は，d 次元正方格子のとき，$p_{2m}(0,0)\sim Cm^{-d/2}$ となって $d\geqq 3$ simple random walk は過渡的である．過渡的であることを証明するには $G_1(x,x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}p_n(x,x)<\infty$ が分かれば十分である．§1.4.4 では母関数の方法によってこれを得る (定理 6)．

1.4.3　特性関数．

$\mathbb{Z}^d$ のように並進対称性（空間的一様性）のある系では RW の位置 W_n に関する特性関数が有効である．$n\in\mathbb{N}$ に対して W_n の特性関数

$$\varphi_n(t)=\mathrm{E}_0[\,e^{\sqrt{-1}t\cdot W_n}\,]=\sum_{x\in\mathbb{Z}^d}e^{\sqrt{-1}t\cdot x}p_n(0,x),\quad t\in\mathbb{R}^d, \tag{15}$$

($t\cdot x$ は $\mathbb{R}^d$ の内積) を考える．1 歩の推移確率の分布 $\{p_1(0,x)\mid x\in\mathbb{Z}^d\}$ の特性関数 $\varphi\colon\ \mathbb{R}^d\to\mathbb{C}$ を

$$\varphi(t)=\sum_{x\in\mathbb{Z}^d}e^{\sqrt{-1}t\cdot x}p_1(0,x)=\frac{1}{d}\sum_{i=1}^{d}\cos t_i\,,\quad t\in\mathbb{R}^d, \tag{16}$$

で定義する．最右辺の具体形は直接計算することにより容易に得られる．時間的に一様なマルコフ連鎖の n 歩の特性関数

$$\varphi_n(t) = \mathrm{E}[\, e^{\sqrt{-1}t\cdot W_n}\,] = \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} e^{\sqrt{-1}t\cdot x} p_n(0,x) \tag{17}$$

は 1 歩の特性関数 φ の n 乗であることが分かる．

命題 5 $p_n(0,x) = (2\pi)^{-d} \displaystyle\int_A e^{-\sqrt{-1}t\cdot x}\varphi(t)^n dt_1\cdots dt_d$.

ここで積分範囲 A は (ルベーグ測度 0 集合を除いて) $(\mathbb{Z}/(2\pi)\mathbb{Z})^d$ の代表になっている区間ならば何でも良い． $[-\pi,\pi]^d$ がよく用いられるが，下記では $[-\pi/2, 3\pi/2]^d$ を用いる．

証明. W_n の増分 X_n が i.i.d. であることから，

$$\varphi_n(t) = \mathrm{E}[\, e^{\sqrt{-1}t\cdot X_1}\,]^n = \varphi(t)^n \tag{18}$$

を得る．

被積分関数の周期性から $A = [-\pi,\pi]^d$ にとれる．Fubini の定理から，

$$\begin{aligned}&(2\pi)^{-d}\int_{[-\pi,\pi]^d} e^{-\sqrt{-1}t\cdot x}\varphi(t)^n dt_1\cdots dt_d = (2\pi)^{-d}\sum_{y\in\mathbb{Z}^d} p_n(0,y)\int_{[-\pi,\pi]^d} e^{-\sqrt{-1}t\cdot(x-y)} dt_1\cdots dt_d\\ &= p_n(0,x).\end{aligned}$$

□

1.4.4 Green 関数と母関数．

Green 関数を

$$G(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{P}_x[\, W_n = y\,] = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x,y) = \lim_{s\uparrow 1} G_s(x,y),\quad x,y\in\mathbb{Z}^d, \tag{19}$$

で定義する．即ち， random walk が y に到着する回数の期待値である．

(19) と $p_n(x,y) = p_n(0,y-x)$ から

$$G(x,y) = G(0,y-x),\quad x,y\in\mathbb{Z}^d. \tag{20}$$

$\mathbb{Z}^d$ 上の関数 $f:\ \mathbb{Z}^d\to\mathbb{C}$ に対して p_1 に対応した離散ラプラス演算子 Δ を

$$(\Delta f)(x) = \sum_{z\in\mathbb{Z}^d} p_1(x,z)(f(z)-f(x)) \tag{21}$$

で定義する．Simple random walk に対応するのは通常の離散ラプラス演算子だが，一般の集合上の一般のマルコフ連鎖に対して対応する離散ラプラス演算子を (21) で定義できる．

$p_0(x,y) = \delta_{x,y}$ と $\displaystyle\sum_{z\in\mathbb{Z}^d} p_1(x,z) = 1$ と (5) より

$$\sum_{z\in\mathbb{Z}^d} p_1(x,z)G(z,y) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{z\in\mathbb{Z}^d} p_1(x,z)p_n(z,y) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{n+1}(x,y) = G(x,y) - \delta_{x,y}$$

となる．非負項のみなので和の順序交換は問題ない． y を固定して $G(\cdot,y)$ への Δ の作用として

$$(\Delta G)(x,y) = -\delta_{x,y} \tag{22}$$

(22) から推察されるように，Green 関数は，Markov 性の特徴を内包し，また，偏微分方程式との関連のある点で，強力な研究対象となりうる．

$d>2$ では Green 関数 $G(x,y)$ は有限値である．その漸近形を調べるのに，母関数と特性関数が有効である．($d\leqq 2$ (recurrent case) ではグリーン関数は使えないが，母関数は常に存在して，その $+0$ 極限の発散の様子が情報を持つ.)

定理 6 $d > 2$ で以下が成り立つ.

$$G(x,y) = G(0,y-x) = d(2\pi)^{-d} \int_{[-\pi,\pi]^d} \frac{e^{-\sqrt{-1}t\cdot(y-x)}}{\sum_{k=1}^d (1-\cos t_k)}\, dt, \quad x,y \in \mathbb{Z}^d. \tag{23}$$

従って特に, $G(x,x) < \infty$. 即ち, $d > 2$ では SRW は過渡的である.

証明.

$$G_z(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n p_n(x,y), \quad z \in \mathbb{C},\ x,y \in \mathbb{Z}^d, \tag{24}$$

とおく. $G_z(x,y) = G_z(0,y-x)$ である. 確率の有界性から $G_z(x,y)$ は $|z| < 1$ のとき (x, y について一様に) 収束する. また, 単調収束定理から

$$\lim_{z\uparrow 1} G_z(x,y) = G(x,y), \quad x,y \in \mathbb{Z}^d. \tag{25}$$

$G_z(x,y)$ を調べるのに特性関数 $\varphi_{G,z}$ が有効である：

$$\varphi_{G,z}(t) = \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} e^{\sqrt{-1}t\cdot x} G_z(0,x) \quad t \in \mathbb{R}^d. \tag{26}$$

$|z| < 1$ のとき, 定義 (24) を代入して和の順序を交換することができる ($\sum x \in \mathbb{Z}^d p_n(0,x) = 1$ に注意)[7] .

$$\varphi_{G,z}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \left(\sum_{x\in\mathbb{Z}^d} e^{\sqrt{-1}t\cdot x} p_n(0,x) \right)$$

さらに, (17), (18), (16) を用いると

$$\varphi_{G,z}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (z\varphi(t))^n = \frac{1}{1 - z\varphi(t)} = \frac{1}{d^{-1}\sum_{k=1}^d (1 - z\cos t_k)}, \quad t \in \mathbb{R},\ |z| < 1 .$$

よって 命題 5 の証明と同様に,

$$\begin{aligned} &G_z(x,y) = G_z(0,y-x) = (2\pi)^{-d} \int_{[-\pi,\pi]^d} e^{-\sqrt{-1}t\cdot(y-x)} \varphi_{G,z}(t) dt \\ &= d(2\pi)^{-d} \int_{[-\pi,\pi]^d} \frac{e^{-\sqrt{-1}t\cdot(y-x)}}{\sum_{k=1}^d (1 - z\cos t_k)}\, dt, \\ &\ |z| < 1,\ x,y \in \mathbb{Z}^d. \end{aligned} \tag{27}$$

(25) と単調収束定理から $d > 2$ のとき (23) を得る.

□

2 d 次元 self-avoiding walk.

この節のテーマは SAW は SRW に比べて分かっていない, ということである. 何が分かっていないかを提示することが目的である.

2.1 Connective constant.

$\mathbb{Z}^d$ 上の長さ n の self-avoiding walk とは, $\mathbb{Z}^d$ の点の列 $w = (w(0), \cdots, w(n))$ であって, $|w(i+1) - w(i)| = 1$, $i = 0, \cdots, n-1$, および,

$$w(i) \neq w(j), \quad i \neq j, \tag{28}$$

を満たすものをいう. 原点 0 から出発する n 歩の self-avoiding walk の集合を $\mathcal{V}_n$ と書くことにする.

$d = 1$ のときは $\mathcal{V}_n$ は原点から右または左に等速直進運動する path だけだから何の問題もない. 要素の個数は 2 である. しかし, $d > 1$ は難問である.

[7] Green 関数で同様にやると絶対収束していないので Fubini が使えない. 母関数の有効性がここにある.

§1.2.2 で，原点から出発した 1 次元 simple random walk(の n 歩目まで) を，原点から出発する path の集合 $\mathcal{W}_n$ に対応させせられることを見た．また，path の総数 2^{-n} で割ることで，path の本数から，simple random walk の事象の確率を得ることができる．

以上は容易に $\mathbb{Z}^d$ 上の simple random walk に拡張できて，原点から出発した $\mathbb{Z}^d$ 上の n 歩の path の集合を $\mathcal{W}_n$ とおくと，その総数は $\sharp\mathcal{W}_n = (2d)^n$ であり，$W_1, \cdots, W_n$ で書かれた事象の確率は，対応する性質を持つ path の本数を $(2d)^n$ で割れば得ることができる．

Self-avoiding walk の定義で条件 (28) をはずせば，$\mathcal{W}_n$ の path の条件になるから，$\mathcal{V}_n \subset \mathcal{W}_n$ である．

$\mathcal{W}_n$ では path の総数を数えることは何の問題もなかった．Self-avoiding walk ではまず，path の総数 $C_n = \sharp\mathcal{V}_n$ (の漸近形) が難しい問題である．実際，$2 \leqq d \leqq 4$ では未解決である．

最も簡単な評価は次のように得られる．1 歩目は $2d$ 方向全てが考えられる． 2 歩目以降は直前にいた方向には戻れないので， $2d-1$ 方向の可能性を越えることはない．逆に，常に座標軸の正方向 (d 通り可能) にしか進まなければ必ず self-avoiding になる．そこで，

$$d^n \leqq C_n = \sharp\mathcal{V}_n \leqq 2d(2d-1)^{n-1}, n \in \mathbb{N}, \tag{29}$$

を得る．さらに C_n の対数漸近形の存在は分かる．

$A_n \approx B_n$ を $\log A_n \sim \log B_n$，即ち， $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\log A_n}{\log B_n} = 1$ の意味とする．

命題 7 (Hammersley 1957) $d \leqq \mu = \mu_d \leqq 2d-1$ なる定数 μ があって，$\mu = \displaystyle\inf_{n\in\mathbb{N}} C_n^{1/n}$ である．(従って，特に， $C_n \approx \mu^n$.)

証明. $w \in \mathcal{V}_{n+m}$ は最初の n 歩は $\mathcal{V}_n$ に，あとの m 歩は $\mathcal{V}_m$ に含まれるから，$C_{n+m} \leqq C_n C_m, n, m \geqq 1,$ が成り立つ．$C_n \geqq 1$ なので $\log C_n$ に 定理 24 を適用できて，$\log\mu = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log C_n$ が存在して，$\mu = \displaystyle\inf_{n\in\mathbb{N}} C_n^{1/n}$ である．よって，(29) より $d \leqq \mu \leqq 2d-1$．

□

$\mu = \mu_d$ の値の詳しいことは分かっていない．[8] 数値的な結果として $\mu_2 \doteqdot 2.64$, $\mu_3 \doteqdot 4.68$ くらいである．$2.58 < \mu_2 < 2.73$ は分かっている（[17, §6.2] とその文献参照）．Kesten が finite memory walk の方法で μ_d の $s = 1/(2d)$ についての漸近展開の最初の数項を証明した (1964).

1960 年代前半までに Hammersley と Kesten が得た結果が，その後 30 年近く， self avoiding walk の厳密な結果としては最善だった．1990 年代前半に Hara–Slade が lace 展開の方法によって，$d \geqq 5$ の場合の漸近的な結果を最終的に決着させた．その結果の一つとして，

$$\mu_d = s^{-1} - 1 - s - 3s^2 - 16s^3 - 102s^4 + O(s^5)$$

を得た（ [28] とその引用文献参照）.

Lace 展開は高次元 ($d \geqq 5$) の self avoiding walk が，simple random walk と exponent の意味で同じ漸近的性質を持つことを証明するのに強力な手法である．実際，命題 7 は $\log C_n$ と $\log\mu^n$ の比が 1 に収束することしか言えてないが，Hara–Slade は $d \geqq 5$ ならば $C_n \sim A\mu^n$ であることも証明した．

定理 8 (Hara–Slade (1990,1992)) $\mathbb{Z}^d$ 上の *self-avoiding walk* について，$d \geqq 5$ ならば $C_n \sim A\mu^n$ である，即ち $A = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \mu^{-n} C_n$ が存在する．

ここで係数 A は d による定数で $A = 1 + s + 4s^2 + O(s^3)$.

Lace 展開の技術的な話は手間がかかるので，講義では触れない．証明の詳細は原典 [27, 26] と教科書 [18] に譲る．

ところで， μ に対応するのは $\mathbb{Z}^d$ 上の simple random walk では $C_n(\mathrm{SRW}) = (2d)^n$ から $\mu(\mathrm{SRW}) = 2d$ である．三角格子では (2 次元であるけれども) C_n(三角格子の SRW) $= 6^n$ なので，(原点への帰還確率の指数とは逆に）格子の形によって異なる．

[8] Exponents と違って「定義の詳細に依存する」量で，きちんと求めるのは難しい．また，当面，それを求めることを急務とはしない．まずは普遍的な量を解決しないと！

- n 歩の path の総本数 C_n は random walk では明らかに $(2d)^n$ だが，self-avoiding walk では，既に難しい問題である．$2 \leqq d \leqq 4$ では漸近形も解決していない．
- 総本数の漸近形を決める $\mu = \lim_{n\to\infty} C_n^{1/n}$ そのものは,（存在することは self-avoiding walk でもわかるが,）random walk のときでも universal な量ではない (遷移確率の具体形の詳細によってしまう).
- C_n や μ は path 上の確率測度 (またはそれを特徴づける量) の分母になるので，これらの量が難しいことが path の性質を調べる上で障害になる．

2.2 Exponents．

Path の集合の典型的な性質を，その上の一様分布を考えて，それについて確率 1 で成り立つ性質や期待値の性質で測るのが自然である．

n 歩の path の集合のように有限集合では一様な測度の意味は明らか．Simple random walk の定義は，制限のない walk の集合上の一様分布になっていた．

n が小さい間はあからさまに数えればいい[9] から，$n \to \infty$ の漸近的性質 (指数) に興味がある．

このような量を path の (典型的な) 性質とよぶことにする．Random walk では (Markov 性や，そこから得られる差分方程式や Dirichlet form との関係を除けば) まさにそのようなものを調べてきた．

2.2.1 ２乗平均変位の指数 ν．

Path の性質のうち，もっとも基本と考えられるのは path がどれくらいぎざぎざしているかであろう．言い換えればある程度の距離に広がるまでに要する時間 (歩数) の order である．
この量は，本当は「一段細かいスケールで見たとき，歩数が平均何倍増えるか？」という量 (１スケールあたりの歩数行列の固有値) が定義可能なときは，それが基本にある．(Sierpiński gasket 上の SAW の平均歩数行列は §4 の (48).）Path の性質の殆ど全てに影響する基本量である．

§1.2.2 で simple random walk に対して mean square displacement の指数を定義した．Simple random walk では次元によらず W_n は $\sqrt{n}$ の order (指数 1/2) であった．

Self-avoiding walk でも同様に定義できる．ここではいちばん弱い形で書いておく．(そもそも低次元では存在すら証明されていないのだから，強い形で書く意味がまだない.）

n 歩の self-avoiding walk $\mathcal{V}_n$ の各要素に equal weight で重みを入れた確率空間の族 $(\mathcal{V}_n, \mathrm{P}_n)$, $n \in \mathbb{N}$, を考える．即ち，期待値は

$$\mathrm{E}_n[\ \cdot\ ] = \frac{1}{C_n} \sum_{w \in \mathcal{V}_n} \cdot$$

で定義する．このとき， mean square displacement の指数 ν を

$$\mathrm{E}_n[\ |w(n)|^2\ ] \approx n^{2\nu}$$

で定義する．

§1.2.2 の simple random walk の mean square displacement の定義と比べると,（$p=1$ の場合のみ，しかも log 比の収束のみ，という点で弱いが,）対応していることが分かる[10]．Simple random walk の path との対応から，その確率は n 歩の path に等しい重みを与えたものになっている点でも，ここでの self-avoiding walk における定義と対応していることも注意．また，simple random walk では $\nu(RW) = 1/2$ である．

$d \geqq 5$ では $\nu_d = 1/2$ が証明されている．$2 \leqq d \leqq 4$ では証明は何もない．予想されている値は $\nu_2 = 3/4$, $\nu_3 = 0.59\cdots$, $\nu_4 = 1/2$.（$d=4$ では「log 補正」$\mathrm{E}_n[\ |w(n)|^2\ ] \sim D_4 n (\log n)^{1/4}$ があると予想されている．[11]）．

[9] しかし，あからさまに数える方法は計算機をもってしても急速に破綻する（[18, Appendix C, §9]）．

[10] $p=1$ の場合のみ，というのはとにかく $p=1$ でもできなければお話にならないから．そして，おそらく，$p=1$ でできれば $p>1$ も同様になるだろうという期待の下に，他の問題を優先する傾向があるから．もちろん，一般化できればそのほうがめでたいが，優先順位の低い問題と考える傾向がある．

[11] 逆に言えば $d=2, d=3$ では $\mathrm{E}_n[\ |w(n)|^2\ ] \sim D_d n^{\nu}$ と想像しているということ．但し，ν すら分からないのにそれより低次の

2.2.2　帯磁率の指数 γ.

Path の本数 C_n について， $C_n = \mu^n r_n$ とおくと，命題 7 より $\lim_{n\to\infty} r_n^{1/n} = 1$ は分かるが，一般的には，r_n 自体は収束するとは限らない．例えば $r_n \sim n^{\gamma-1}$ のように振る舞うかという問題が考えられる．定理 8 によって $d \geqq 5$ ではたしかにこのようにふるまうこととと，$\gamma = \gamma_d = 1$ であること（つまり，r_n 自体が収束すること）が分かる．

Simple random walk では $r_n = 1$ だったから，自明な意味で $\gamma = 1$ となるので，$d \geqq 5$ では self-avoiding walk の値と一致する．しかし， $d \leqq 4$ では，simple random walk では自明な意味で $\gamma = 1$ なのに対して，self-avoiding walk では，少なくとも $\log r_n$ についての漸近形が

$$r_n \approx \begin{cases} n^{\gamma_d - 1}, & d = 2, 3, \\ (\log n)^a, & d = 4, \end{cases}$$

と予想されている．ここで $\gamma_2 - 1 = \dfrac{11}{32}$, $\gamma_3 - 1 \fallingdotseq 0.162$, $a = \dfrac{1}{4}$． $d = 2, 3, 4$ では γ の存在すら証明はされていない (無理に定義すれば ∞ かもしれない).

なお，命題 7 から

$$\mu^n \leqq C_n \tag{30}$$

を得るので， γ_d は（存在すれば） $\gamma_d \geqq 1$ である．

2.2.3　高次元における exponents.

1990 年代初めに，いくつかの指数について，$d \geqq 5$ では (log 比ではなく，元の量の比の漸近形という) 強い意味で存在し，しかもその値が対応する simple random walk の値と一致することが Hara–Slade によって分かった．

定理 9 (Hara–Slade (1990,1992)) $\mathbb{Z}^d$ 上の *self-avoiding walk* について，$d \geqq 5$ ならば $\nu = 1/2$, $\gamma = 1$ である．

注 2　*(i)* 漸近形は log 比ではなく，もっと強い意味で成り立つ．即ち，任意の $\epsilon > 0$ に対して

$$C_n = A_d \mu^n (1 + O(n^{-1/2+\epsilon})),$$
$$\mathrm{E}_n[\,|w(n)|^2\,] = D_d n (1 + O(n^{-1/4+\epsilon})).$$

ここで， A_d, D_d は次元だけで決まる定数で，例えば $1 \leqq A_5 \leqq 1.493$, $1.098 \leqq D_5 \leqq 1.803$.

(ii) ν に関して $p > 1$ の場合もできるかどうかは，できるであろうけれども技術的に $p = 1$ より難しい部分があるので，今のところやられていない．

(iii) ν に関しては指数の値よりも遙かに強く，スケーリング極限が *simple random walk* のスケーリング極限と同じ *(Brownian motion)* になることまで $d \geqq 5$ で分かっている．即ち，$n^{-1/2} w([nt])$ を線形内挿した確率過程の分布が $n \to \infty$ で *Wiener* 測度に弱収束する

◇

2.2.4　母関数による exponents の定義.

(23) でみたように，母関数は漸近形の評価に有効である．特に積分順序の交換を自由にできる点が強力である．ただし，元の変数に戻すとき（Tauber 型評価）に苦労する場合があって，そのために母関数に関しては漸近形が決着していても元の変数で未解決ということが起きている．

n 歩で原点から点 x まで行く self avoiding walk の本数を $C_n(x)$ とする．即ち，

$$C_n(x) = \sharp\{w \in \mathcal{V}_n \mid w(n) = x\} \tag{31}$$

とおく．$C_n = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} C_n(x)$.

$C_n(x)$ と C_n の Green 関数を，

$$\begin{aligned} G_z(x, y) &= G_z(0, y - x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(y - x) z^n, \\ \chi(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n = \sum_{w} z^{|w|} = \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} G_z(x, y) \end{aligned} \tag{32}$$

振る舞いにはとても言及できない，ということか，$d = 4$ のときのように歯切れ良い発言はない．

で定義する．

SAW では $x = y$ のときは自明な和である．これらの母関数は 命題 7 より，$|z| < z_c = \mu^{-1}$ で定義され，$|z| > z_c$ で発散．$|z| = z_c$ では場合 (d) による．特に，(30) より $C_n \geqq \mu^n$ だから，

$$\chi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n \geqq (1-\mu z)^{-1}, \quad 0 \leqq z < \mu^{-1},$$

なので，

$$\lim_{z \uparrow z_c} \chi(z) = \infty \tag{33}$$

となる．

Bridge(第 1 成分が出発点と到達点のそれらが作る閉区間の外に出ない SAW) に関する議論により，$G_z(x, y)$ の収束半径も (自明な $x = y$ を除いて) μ^{-1} である [18, §3.2].

Simple random walk の対応する量は $\chi_{SRW}(z) = (1-2dz)^{-1}$ となることは容易である．

相関距離 ξ を

$$\xi(z)^{-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log G_z(0, (n, 0, \cdots, 0))$$

で定義する．$z > \mu^{-1}$ で $\xi(z) < \infty$ となる．実際，定義 (32) において，直線で結ぶ道だけ考えると，$G_z(0, (n, 0 \cdots, 0)) \geqq z^n$ なので $\xi(z)^{-1} \leqq -\log z$．他方，$z < z_c = \mu^{-1}$ ならば，$r = z(\mu+\epsilon) < 1$ となるように $\epsilon > 0$ を選ぶと，μ の定義から十分大きい n に対して $C_n = O((\mu+\epsilon)^n)$ となるので，$G_z(0, (n, 0 \cdots, 0)) \leqq C \exp(-|\log r| n)$，即ち，$\xi(z)^{-1} \geqq -\log r$．Bridge に関する議論 [18, §4.1] によって $\lim\limits_{z \uparrow z_c} \xi(z)^{-1} = 0$ も分かっている．

Lace 展開によって $d \geqq 5$ では $\xi(z)^{-1} = 0$ である．$d = 2, 3, 4$ ではこれは予想にとどまっている．

母関数の言葉で書かれた指数の定義を考えることができる．十分良い性質があれば，Tauber 型定理によって元の指数も存在して一致する．そこで，同じ記号を用いることにする．例えば，$\chi(z) \asymp (z_c - z)^{-\gamma}$,

$\xi(z)$ は 1 歩で行ける範囲の大きさを表すので ν の指数に関連すると予想される．($d \geqq 5$ では証明された．) Mean square displacement と直接関係があるのは

$$\xi_p(z) = \left[\chi(z)^{-1} \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} |x|^p G_z(0, x) \right]^{1/p}, \quad p > 0\,.$$

$\xi(z) \approx \xi_p(z) \approx (z_c - z)^{-\nu}$ が予想されている．特に，強い ($\sim$ の) 意味で ν と γ の存在を仮定し，γ について Tauber 型定理が成り立てば (γ が元の定義でも母関数の非解析性による定義でも等しければ)，$\nu_2 = \nu$ を得る．

実際は，$d \geqq 5$ での lace 展開の結論は，先ず，n の母関数かつ x のフーリエ変換の量についての指数が証明され，それから Tauber 型定理によって n についての漸近形の指数に翻訳され，最後に x についての漸近形の議論が最近可能になった．

定理 10 (Hara–Slade (1990,1992)) $z_c = 1/\mu$ とおくとき，$d \geqq 5$ で以下が成り立つ．

(i) 任意の $\epsilon > 0$ に対して d, ϵ だけで決まる正数 $C_{\epsilon,d}$ が存在して，$\hat{G}_{z_c}(k) = \dfrac{C_{\epsilon,d}}{k^2 + O(k^{2.5-\epsilon})}$．(即ち，$\gamma = 1$．)

(ii) $\chi(z) \sim \dfrac{A}{1 - z/z_c}$．(即ち，$\gamma = 1$．)

(iii) $\xi(z) \sim \sqrt{\dfrac{D}{2d(1 - z/z_c)}}$．(即ち，$\nu = 1/2$．)

2.2.5 Exponents に関する予想．

高次元の exponents が解決しているのに比べて，低次元では存在も含めて殆ど未解決である．一つの重要な理由は，$d < 4$ では exponents の値が，simple random walk と異なるだろうと思われている点である．つまり，

> 漸近的性質が simple random walk と大きく異なると予想される次元では self-avoiding walk の漸近的性質は殆ど何も分かっていない．

Scaling とは本質的には path のギザギザの度合いに関する典型的な性質は，一つの指数 (即ち ν) だけで決まる，という提唱である．言い換えると，path に関する (漸近的) 情報は path の本数とぎざぎざの度合いを定める指数 γ, ν で決まる，という提唱である．結果として２つの指数を除いて他の全ての指数は (d も入れれば) 定まる．このことは証明されてはいないが，確率過程研究の重要な作業仮説として，研究や講義の構成の中心に据えないといけない[12] ．

Self avoiding walk の mean square displacement の指数の古い予想として，Flory の議論が知られている．それによると，ν は (もしあれば) およそ次の値に近いと予想される．

$$\nu = \begin{cases} \dfrac{3}{d+2}, & d \leqq 4, \\ \dfrac{1}{2}, & d > 4. \end{cases}$$

これは $d=1$ では自明に正しく，Hara–Slade の結果 定理 9 によって $d \geqq 5$ でも正しい．$d=4$ では厳密ではないが信憑性のある[13] 議論によって γ のときのような log の寄与を除いて正しいと予想されている．より具体的には $d=4$ では

$$\mathrm{E}_n[\ |w(n)|^2\ ] \asymp n(\log n)^{1/4}$$

が予想されている．

別の厳密でない議論によって $d=2$ でも正確な値だという予想がある．しかし，数値計算 (厳密性も精密性も要求しない数値計算) によれば，$d=3$ では $\nu_3 \fallingdotseq 0.59$ ではないか，と予想されている．

3　1 次元 simple random walk のくりこみ群．

F. B. Knight は 1 次元 SRW の概収束極限として 1 次元 Brown 運動を構成した citeKnight．その方法は decimation によるくりこみ群そのものである．すなわち，くりこみ群という言葉は物理学に由来して確率論ではなじみがないようにみえて，実は本質的なアイデアは知られていた．しかし，その後この方法は [24] による Sierpiński gasket 上の Brown 運動の構成まで主流となることはなかったようである．その理由を考えると，

- 今日で言う finitely ramified fractal 以外ではくりこみ群は難しい．
- Markov 性を持つ確率過程では Dirichlet form などの解析的方法を含めて強力な手段があり，確率論の主題はそちらに中心があったため，わざわざ難しい方法に挑戦する動機がなかった．
- Knight の構成はくりこみ群としては力学系の固定点の直上という自明な軌道をみていることになるので，くりこみ群部分は何もすることがなかった．その後も，大局的な軌道を追跡する必要のある問題は，重要性を感じないからか難しいからか，その両方だからか，省みられることは少なかった．

Knight の方法のとっかかりの部分を概観しよう．$n \in \mathbb{Z}_+$ に対して $G_n = 2^{-n}\mathbb{Z}$ とおき，原点を出発する G_n 上の path の集合を

$$\mathcal{W}_n = \{w :\ \mathbb{Z}_+ \to G_n,\ w(0) = 0,\ |w(i) - w(i+1)| = 2^{-n}\}$$

とおく．

$\mathcal{W}_{n+1}$ から $\mathcal{W}_n$ への次のような対応 (decimation) を考える．

(61) で，SRW W_n について，集合 A の hitting time $\tau = \inf\{n \in \mathbb{Z}_+ \mid W_n \in A\}$ を定義した．これを拡張して hitting time の列を考えることができる．(但し，ここではまだ確率測度は入っていない．)「 G_n の hitting time」の列 $T_{n,i} :\ \mathcal{W}_{n+1} \to \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$, $i \in \mathbb{Z}_+$, を $w \in \mathcal{W}_{n+1}$ に対して，$T_{n,0}(w) = 0$ および

$$T_{n,i+1}(w) = \inf\{j > T_{n,i}(w) \mid w(j) \in G_n \setminus \{w(T_{n,i}(w))\}\},\ i \in \mathbb{Z}_+, \tag{34}$$

で帰納的に定義する．

これを用いて $Q_n :\ \mathcal{W}_{n+1} \to \mathcal{W}_n$ を

$$(Q_n w)(j) = w(T_{n,j}(w)),\quad j \in \mathbb{Z}_+, \tag{35}$$

で定義する．w が通る点のうち G_n の点だけを残し，かつ，同一点が続けて現れた場合は無視することによって得られる G_n 上の path である．

[12] Markov 性より「ギザギザ」（スケール変換に対する応答）のほうが path の性質の本質ととらえたいからこそ，数学者は株価のグラフとブラウン運動の sample path に類似性を追求するのだろう．

[13] その議論をより単純なモデルに適用すればきちんとした結果が出る，その議論はそのまま本当の証明に生かせるだろうと考えられている，など．

$Q_n w \in \mathcal{W}_n$ は，$\mathbb{Z}$ が finitely ramified であるという強い性質を使っている．即ち，$w(T_{n,j}(w))$ が $a = w(T_{n,j-1}(w))$ の G_n における隣の点であるためには，a から自分以外の G_n の点に行くためには $a \pm 1$ を通らなければならない，という性質が必要である．このため decimation の方法が有効なのは finitely ramified fractals(直線を含む) に限られている．例えば，高次元空間上の path の集合に対しては decimation の方法はうまく行かない．

Simple random walk を考えるということは，path の k 歩目までに一様分布 (2^{-k} の確率) を与えることに等しい．G_n 上の path の集合 $\mathcal{W}_n$ 上のそのような確率測度を P_n と書くと，対称性から

$$P_{n+1} \circ Q_n^{-1} = P_n \tag{36}$$

を得る．

> 1 次元 SRW は粗くみた path が，確率測度として元の path と同じになる，という著しい性質がある．

このような性質を（漠然と）統計的自己相似性と言うことがある[14]

Q_n は (W_{n+1}, P_{n+1}) から (W_n, P_n) への projection になっているが，連続極限を作るときは，これを逆に読んで，G_n の上の path $w \in W_n$ の各 1 歩に細かい構造を追加して (W_{n+1}, P_{n+1}) を得ていると考えるべきである．このとき $w \in W_n$ の各 1 歩，例えば $a \in G_n$ から $a+1 \in G_n$ への 1 歩，に付け加える構造とは G_{n+1} の部分 path であって，a から出発して $a-1$ を通らずに $a+1$ に達したらそこで止まるものである．2^n 倍に拡大すれば，$G_1 = 2^{-1}\mathbb{Z}$ の上の path であって，0 から出発して -1 を通らずに 1 に達したら止まるものと相似なことが分かる．$\tilde{\mathcal{W}}_1$ をそのような path の集合としよう．

概収束極限による Brown 運動の構成の話では，n についてこれを帰納的に繰り返す．より具体的に言うと，(36) を consistency condition として Kolmogorov extension theorem によって 1 つの確率空間 (Ω, P) とそこから (W_n, P_n) への consistent な projection $Y_n(\cdot)$ を構成する．即ち，$P \circ Y_n^{-1} = P_n$ および，$Q_m(X_n) = X_m$, $n \geqq m$．この Y_n を線型内挿で連続関数 C に値を取る確率変数とみなすことができるが，このとき $Y_n(4^n \cdot)$ が $n \to \infty$ で (時間幅 $[0, M]$ における C の sup norm で) 概収束する．

最後の部分をもう少し詳しく言うと，$T_{k,i}(Y_n)$ は Y_k を固定する (G_k レベルの path の形で条件付ける) とき，$n \geqq k$ で N について分枝過程になる．その 1 世代あたりの平均成長率は 4 である．このことから $T_{k,i}(Y_n(4^n \cdot))$ が $n \to \infty$ で概収束する．これは n が十分大きければ $Y_n(4^n \cdot)$ が G_k の点を通る時刻は殆ど変わらないことを意味する．ということはある時刻では G_k のどの小区間にいるかが変わらないことを意味し，$Y_n(4^n \cdot)$ の位置のぶれは 2^{-k} で抑えられることになる．k は $n \geqq k$ なる限り，任意だから極限で sup norm で概収束する．

この話がうまく行くためには n を $n+1$ に置き換えるときに，G_n 上の 1 歩が G_{n+1} の何歩になるか，その歩数増大度の分布（特に平均歩数増大度）を知る必要がある．上に見たように，この歩数分布は $\tilde{\mathcal{W}}_1$ の path の歩数分布に等しい．

この置き換えを recursive に繰り返すと 0 から 1 への 1 歩を G_n 上の path に置き換えたときの path の集合を得る．くりこみ群について説明するために，この recursion までこめて調べよう．そこで，上に書いた $\tilde{\mathcal{W}}_1$ の定義を一般化して，$G_n = 2^{-n}\mathbb{Z}$ の上の path であって，0 から出発して -1 を通らずに 1 に達したら止まるものの集合を $\tilde{\mathcal{W}}_n$ とする．$G_0 = \mathbb{Z}$ の first hitting time は $L = T_{0,1}$ だから，

$$\begin{aligned}&\tilde{\mathcal{W}}_n = \{w : \mathbb{Z}_+ \to G_n \\ &\mid L < \infty,\ w(0) = 0,\ |w(i+1) - w(i)| = 1,\ i = 0, 1, \cdots, L(w) - 1, \\ &w(j) = 1,\ j \geqq L(w)\}.\end{aligned} \tag{37}$$

(時刻を $\mathbb{Z}_+$ にそろえるために歩数 L 以降とどまることにしたが，本質的ではない.)

$\tilde{\mathcal{W}}_n$ における L の母関数を

$$\Phi_n(z) = \sum_{w \in \tilde{\mathcal{W}}_n} z^{L(w)} = \sum_{w \in \tilde{\mathcal{W}}_n} z^{T_{0,1}(w)}, \quad z \in \mathbb{C}, \tag{38}$$

で (収束半径内で) 定義する．母関数の係数が 1 であることが，全ての path を平等に考慮すること，即ち SRW を考えることに対応している．

Φ_1 は**具体的に計算することにより**[15] 得られる：

$$\Phi_1(z) = \frac{z^2}{1 - 2z^2}, \quad |z| < \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{39}$$

---

[14] 「漠然と」と書いたことを厳密に定義することもできるが，この講義ではいらない．

[15] 即ち，ここで dynamics に関する情報が入ることで一般論から得られない系固有の特徴が入る．このように，一般的な「ギザギザの細かい構造」という再帰的な側面と系固有の特徴を分離するところがくりこみ群の定式化の特徴である．

問 3 *(39)* を導け. ◇

特に Φ_1 は 0 でない収束半径を持つ.（このことと次の 命題 11 から，全ての Φ_n が 0 でない収束半径を持つので Φ_n は well-defined.）

命題 11 (Renormalization group) $\Phi_{n+1}(z) = \Phi_n(\Phi_1(z))$.（右辺の収束半径内で左辺も収束.）

証明. $w \in \tilde{\mathcal{W}}_{n+1}$ を $Q_n(w) \in \tilde{\mathcal{W}}_n$ の形で分類し，$Q_n(w)$ の各 1 歩を $\tilde{\mathcal{W}}_1$ の要素（を相似縮小したもの）で置き換える形に書くことで，以下の変形を得る.

$$\begin{aligned}\Phi_{n+1}(z) &= \sum_{w \in \tilde{\mathcal{W}}_{n+1}} z^{L(w)} \\ &= \sum_{v \in \tilde{\mathcal{W}}_n} \sum_{\tilde{w}_1 \in \tilde{\mathcal{W}}_1} \cdots \sum_{\tilde{w}_{L(v)} \in \tilde{\mathcal{W}}_1} \prod_{i=1}^{L_1(v)} z^{L(\tilde{w}_i)} \\ &= \sum_{v \in \tilde{\mathcal{W}}_n} \Phi_1(z)^{L(v)} \\ &= \Phi_n(\Phi_1(z)).\end{aligned}$$

□

注 3 命題 *11* から $\Phi_n = \Phi_1 \circ \cdots \circ \Phi_1$ となるので，$\Phi_n(z) = \Phi_1(\Phi_{n-1}(z))$ なども同時に成り立つ. ◇

(39) と 命題 11 は path の漸近的性質に関する本質的な情報を持っている．私はこの recursion を (1 次元 SRW の) くりこみ群と呼ぶことにしている.

Knight の構成は，ある意味で,「力学系があれば，対応して確率過程が作れる」という精神と見ることができる．実際， Φ にパラメータを入れることで，$\mathbb{R}$ 上の等速直線運動と Brown 運動を内挿する確率過程を構成できる．このように，確率過程の構成を力学系の軌道追跡の問題に帰着させられることがくりこみ群の価値の一つと見ることができる.

命題 11 はスケール n 方向のマルコフ性を表していると見ることもできる．これがギザギザを付け加えるという描像に整合したモデルになっている.

全確率が 1 になることは 1/2 が Φ_1 の固定点になることから従う.

注 4 詳しく言うと， $L < \infty$*, a.s.,* を先ず言って，左右対称性から *decimated walk* の遷移確率は 1/2 ずつ，という論法と，$\Phi(1/2) = 1/2$ から $L < \infty$ を込めて答を出した，という理解がある. ◇

命題 11 があると，歩数の分布の $n \to \infty$ の漸近形 (スケールされた歩数分布の弱収束) について議論できる．§B.1.4 の定義に従うと，Φ_1 の固定点 x_c は (39) より明らかに $x_c = 1/2$，従って $\lambda = \Phi_1'(x_c) = 4$ となる．(84) に従って

$$G_n(s) = \frac{1}{x_c}\Phi_n(e^{-\lambda^{-n}s}x_c) = 2\Phi_n(\frac{1}{2}e^{-4^{-n}s}) \quad n = 1, 2, 3, \cdots,$$

とおくと，特に，定理 43 と 定理 45 と 定理 40 から次を得る.

系 12

$$G_n(s) = \int_0^\infty e^{-s\xi} P_n(d\xi)$$

を満たす $\mathbb{R}_+$ 上のボレル確率測度 P_n が存在し，$n \to \infty$ で $\mathbb{R}_+$ 上のボレル確率測度 P^* に弱収束する.

P^* の母関数

$$G^*(s) = \int_0^\infty e^{-s\xi} P^*(d\xi)$$

は

$$G^*(s) = G_1(-4\log G^*(s/4)), \quad {G^*}'(0) = 1,$$

によって定まる．P^* の特性関数を $\varphi^*(t) = G^*(-\sqrt{-1}t)$, $t \in \mathbb{R}$, とおくと，$C_1 > 0$ と $C_2 > 0$ が存在して，

$$|\varphi^*(t)| \leqq C_2 e^{-C_1|t|^{\nu_u}}, \quad t \in \mathbb{R},$$

となる．ここで $\nu = \dfrac{\log 2}{\log \lambda} = 1/2$．従って特に， P^* は密度 ρ を持つ：$P^*(d\xi) = \rho(\xi) d\xi$．そして，$C > 0$ が存在して，

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}} e^{C\xi} \rho(\xi) < \infty,$$

を満たし，また，$\rho(\xi) > 0$, $\xi > 0$, を満たす.

(38) から

$$G_n(s) = \sum_{w \in \tilde{\mathcal{W}}_n} 2^{1-T_{0,1}(w)} \, e^{-4^{-n} T_{0,1}(w) s})$$

となるので， P_n は $4^{-n}\mathbb{Z}_+$ 上に support され，

$$P_n(\{4^{-n}\ell\}) = \sharp\{w \in \tilde{\mathcal{W}}_n \mid T_{0,1}(w) = \ell\} \times 2^{1-\ell}$$

で与えられる．左辺は原点から出発する simple random walk において，1 を -1 より先に hit するという条件を付けたときの 1 を hit するまでの歩数が ℓ である確率になっている．それゆえ ℓ を 4^{-n} 倍したときに分布が収束するのは自然である．

Φ_n は歩数分布の情報を持っているので，原理的には SRW の漸近的性質を引き出すことができる．具体的にどうやるかについては，次節以降で Sierpiński gasket 上の SAW について調べる．

この節 §3 の冒頭に述べたように，ある意味でくりこみ群の描像は確率論でも古くから知られていた．筆者が現時点で新たに付け加えたいものは，節冒頭に述べた限界を裏返したものである．

- Markov 性を持たない確率過程を解析する手段．例えば self-avoiding walk や，確率過程としてとらえることにとどまらず，スピン系などのくりこみ群の発祥の地の問題の確率論的な解析．最終的な希望として，これらの異質な系を統一的に解析する手段としてのくりこみ群に興味がある．
- 大局的な軌道の追跡．くりこみ群の設定は統一的とするならば，軌道追跡に確率過程の漸近的性質の違いが反映するはずである．この追跡を可能にするようにパラメータ空間を選ぶことが重要である．

§4 ではこのような意味でのくりこみ群の具体例を掲げる．

4 Pre-Sierpiński gasket 上の self-avoiding walk のくりこみ群．

4.1 問題の背景と全体像．

自分自身の軌跡が交わることを禁止した self-avoiding walk (SAW) については，一般には random walk と比較すると極めて弱い性質しか知られていないことを $\mathbb{Z}^d$ の場合に説明した (§2)．SAW には random walk と違ってマルコフ性がないからである．Pre-fractal 上の SAW についても事情は同様である．

フラクタル上の確率過程論における一つの問題として，$d = 2, 3, 4, \cdots$, に対して定義される d 次元ガスケット (dSG) とよばれるフラクタルの上の self-avoiding walk の漸近的性質を調べよ，という問題を考えることができる．$d = 2$ と $d = 3$ については 1980 年代に物理の論文があり，筆者も関係した一連の研究で詳しい数学的な結論も得られた．具体的には，歩数の母関数の scaling limit の特異性や端点間平均距離の指数の決定，また，random walk の連続極限としてブラウン運動があるように，Sierpiński gasket 上の self-avoiding walk にも連続極限が存在すること，それが self-avoiding であること，および path の Hausdorff 次元の決定，などである．Self-avoiding walk の非マルコフ性を考えると，得られた結果は極めて精密である．これは Sierpiński gasket の特性を，くりこみ群を通して生かし得たからである．$d \geqq 4$ についてはその後 10 数年間新たな展開が世界的になかったが，立教大学の大学院生津田稔朗君との共同研究によって $d = 4$ で「reduce されたモデル」の場合がほぼ解決した．

この問題に関しては次元 d についての一般論が見つかっていない．これはガスケットに限るものではなく，著しい空間次元依存性は一般的な self-avoiding walk の特徴と言うべきで，どの空間上の self-avoiding walk であるかによって，その漸近的な振る舞いも，それを研究する手段も大きく変わる．この点は「兄貴分」的な研究対象である random walk （およびその連続極限である拡散過程）と対照的である．後者はマルコフ性や調和関数論との関係など，恐ろしいほど深い一般論があり，その多くがどの空間上の random walk （または拡散過程）に対しても適用可能である．

Self-avoiding walk も $\mathbb{Z}^d$ 上では 50 年以上研究されてきた課題であるにも関わらず，random walk の研究に比べたときの進歩の遅さは驚くほどである．逆に，マルコフ性という強力な性質を持たない self-avoiding walk を考察することは，「自分の手を縛る」ことによって確率過程 (連鎖) に対して広く成り立つ新しい普遍的結果を目指すことであり，成功すれば新しい数学的解析手段を手に入れることになる．

既に言及したように， self-avoiding walk と random walk の漸近的性質は d 次元正方格子においては $d > 4$ で一致することが知られている (§2)．これは大きな進歩であった．問題は低次元 $\mathbb{Z}^d$ 上の SAW であ

る．RW のアンチテーゼとしての SAW にこだわるならば，漸近的性質が RW と一致することが証明された高次元 SAW だけでなく，指数が異なると期待される低次元 SAW が重要である．d 次元ガスケットは，この意味では全ての d について 1 次元正方格子と 2 次元正方格子の「間」の次元に相当する．

フラクタルについてはもう一つの側面がある．正方格子ではフーリエ級数展開 (運動量表示) がもう一つの強力な武器であった．これは (離散) 並進対称性による．フラクタルという並進対称性のない空間上で考えることにより，フーリエ展開というもう一つの強力な解析手段を縛ることになる．このことの意義は十分くみ尽くし得ていないが，いつの日か重要になるかもしれない．

以下では，一般論には進まず，(2 次元)pre-Sierpiński gasket 上の SAW の解析についてのみ解説する．以下の内容は 3 次元 pre-Sierpiński gasket 上の self-avoiding walk (SAW) に関しても対応する結果が得られている [34]．4 次元 pre-Sierpiński gasket 上の SAW に関しても部分的に結果が得られている [39]．しかし，ここでは (2 次元)pre-Sierpiński gasket に限って [34] の論理構成に基づいて述べる．他の次元の場合に関しては文献を参照されたい．

4.2 フラクタル．

広い意味での自己相似な図形を一般にフラクタルと呼ぶ [19]．ここでは話を簡単にするために狭い意味の自己相似な図形を考える．自己相似性は，ある図形を縮小した図形をいくつか合わせて元の図形を再現できること，と理解できる．典型的な例として，以下では Sierpiński gasket と呼ばれる図形に話を限る．

Sierpiński gasket は単位三角形の内部に複雑な構造を持つ図形である．Sierpiński gasket は，長さを半分に縮小すると元の図形の 1/3 の部分に重なる（図は省略）．重ね方は 3 通りある．

一般に縮小写像の組を与えると，それらによって写された図形の和集合が元の図形に一致する，という条件から（空でない有界閉集合が一意的に定まるという意味で）フラクタル図形が定義できる [14]．

Sierpiński gasket は次のようにして作ることもできる．一辺の長さが 1 の三角形（周と内部）を F_0 とおく．F_0 から一辺 1/2 の下向きの三角形の内部を 1 個くり抜いてできる，一辺 1/2 の上向きの三角形 3 つからなる図形を F'_1 とおく．

同様に F'_1 から一辺 1/4 の下向きの三角形を 3 個くり抜いてできる，上向き三角形 9 個からなる図形を F'_2 とおく．これを繰り返して，一般に，F'_{n-1} から一辺 $1/2^n$ の下向きの三角形を 3^{n-1} 個くり抜いてできる図形を F'_n とおく．F'_n は一辺 $1/2^n$ の上向きの三角形を 3^n 個つないでできる図形になるが，その $n\to\infty$ の極限として Sierpiński gasket を得る．

フラクタルは自己相似になるように無限に細かい構造を持っている．フラクタルに対して，上のような F'_n たちを，フラクタル前駆図形という気持ちで，プレ-フラクタル (pre-Sierpiński gasket) と呼ぶ．

フラクタルとの関連で細かい構造を付け加えて F'_n を定義したが，今まで調べてきた $\mathbb{Z}^d$ 上の walk との類推では，単位構造を 1 に固定して外に広げて定義するほうが便利である．F'_n の一つの頂点を原点，原点から出ている一つの辺を x 軸，F_n 全体は第 1 象限，にそれぞれおさまるように $\mathbb{R}^2$ に埋め込んであるとする．$F'_0\subset F'_1\subset\cdots$ とみなせる．F'_n とその y 軸に関する鏡映の合併を 2^n 倍した図形を F_n とおき，そして，$\tilde{F}_0=\bigcap_{n=0}^{\infty}F_n$ とおいて $\tilde{F}_0$ を構成する単位正三角形たちの頂点の集合を $\tilde{G}_0$ とする.（これが $\mathbb{Z}$ のアナロジーとなる.）を以下では F_n と書く．なお，F_n は一応単位正三角形板をつないだものとして定義しているが，実際は，頂点と辺をつないだ network の構造しか見ていないので，以下では F_n を network とみなす．

4.3 Pre-Sierpiński gasket 上の SAW．

以下では（今までと同様）連続極限は考えないので，$\mathbb{Z}^d$ 上の walk との類推のきくように，単位構造を 1 に固定して外に広げて定義した F_n の定義の類推を採用する．以下では F_n で一辺 2^n の正三角形（に単位長さを最小単位とする Sierpiński gasket 型内部構造をつけた図形）を表すことにする．なお，F_n は一応単位正三角形板をつないだものとして定義しているが，実際は，頂点と辺をつないだ network の構造しか見ていないので，以下では F_n を network とみなす．F_n の単位正三角形たちの頂点の集合を G_n とする．

念のため繰り返すと，$O=(0,0)$, $a_0=(1,0)$, $b_0=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，とし，$F_0$ を正三角形 Oa_0b_0 の頂点と辺からなる network とする．集合 $F_0\subset F_1\subset F_2\cdots$ を

$$F_{n+1}=F_n\cup(F_n+2^n a_0)\cup(F_n+2^n b_0),\quad n=0,1,2,\cdots,$$

で帰納的に定義する．ここで，$A+a=\{x+a\mid x\in A\}$ および $kA=\{kx\mid x\in A\}$ と書いた．

$F=\bigcup_{n=0}^{\infty}F_n$ が (2 次元)pre-Sierpiński gasket である．F の node (辺の交点) の集合を G，$a_n=2^n a_0$，$b_n=2^n b_0$，と書く．

$n \in \mathbb{Z}_+$ と $w:\ \mathbb{Z}_+ \to G$ のうち，$w(0)=0$ を満たすものに対して，a_n の hitting time を $L_n(w) = \inf\{k>0 \mid w(k)=a_n\}$ とおく．原点を出発点とし，a_n を到着点とする G 上の self-avoiding path の集合を

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_n = \{w :\ & \mathbb{Z}_+ \to G \mid w(0)=0,\\ & |w(i)-w(i+1)|=1,\ \overline{w(i)w(i+1)} \subset F_n,\ 0 \leqq i \leqq L_n(w)-1,\ w(i)=a_n,\ i \geqq L_n(w),\\ & w(i_1) \neq w(i_2),\ 0 \leqq i_1 < i_2 \leqq L_n(w)\}\end{aligned} \tag{40}$$

で定義する．最後の条件を除いて，SRW のときと同様である ($L_n(w) < \infty$ という条件は自動的に満たされる)．最後の条件が一度通った点を通らない，という self-avoiding 条件になっていることは $\mathbb{Z}^d$ のときと同様である．

以下の点についてこれから調べる．

(i) 全ての議論の本質的出発点として，L_n の母関数に関するくりこみ群解析を行う (§4.4).

(ii) $\mathcal{W}_n$ （'Pinned'-SAW) の歩数 L_n の分布の $n \to \infty$ での漸近的な様子を見る (§5.1).

(iii) 歩数を固定した SAW の本数と到達点の位置 (mean square displacement) の漸近的な様子を見る (§5.2, §5.3).

4.4 くりこみ群の軌道解析．

以下，L を $\mathcal{W}_n$ 上で $L=L_n$ と定義する．$\mathcal{W}_n$ の path を分類するために次の事実に注目する．

$\mathcal{T}$ を F の単位正三角形（F 上に辺を持つ一辺 1 の上向き正三角形）全てからなる集合とする．各正三角形 $\triangle \in \mathcal{T}$ を 各 $w \in \mathcal{W}_n$ が通る通り方は（通るとすれば），

(1): １辺だけ通って通り抜けるか,

(2): 続けざまに２辺を (三角形内で折れ曲がって) 通るか,（Self-avoiding なので，pre-Sierpiński gasket の構造上，一度三角形を出たら戻れない[16] .）

２通りである．対応して，$S_i(w),\ i=1,2$ を

$$S_i(w) = \{\triangle \in \mathcal{T} \mid w \text{ は } \triangle \text{ を (1) 型で通る }\}$$

で定義し，$s_i(w)$ を $S_i(w)$ の元の数とする．

$$s_1 + 2s_2 = L \tag{41}$$

である．

単位三角形の path の通り方を上のように 2 種類に分類したことに対応して，$\mathcal{W}_{n,i},\ i=1,2,\ n \in \mathbb{Z},$ を，F_n の頂点 $O,\ a_n,\ b_n$ の通り方で 2 種類に分類して次を定義する．

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_{n,1} &= \{w \in \mathcal{W}_n \mid b_n \notin w(\mathbb{Z})\},\\ \mathcal{W}_{n,2} &= \{w \in \mathcal{W}_n \mid b_n \in w(\mathbb{Z})\}\}.\end{aligned} \tag{42}$$

$\mathcal{W}_n$ の部分集合 $\mathcal{V}$ の generating function $X(\mathcal{V}):\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を

$$X(\mathcal{V})(\vec{x}) = \sum_{w \in \mathcal{V}} \prod_{i=1}^{2} x_i^{s_i(w)},\quad \vec{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

で定義し，

$$X_{n,i} = X(\mathcal{W}_{n,i}),\quad i=1,2\ n \in \mathbb{Z}_+, \tag{43}$$

とおく．

注 5 *§3 では１種類の path の集合しか用意しなかったのに対して，ここでは２種類の path の集合を用意していることに注意．一般に，最終的にほしい path の集合を包含し，かつ，くりこみ群 (recursion) が閉じるだけの集合を用意しなければならない．閉じるための集合は，上でやったように，単位要素図形の path の通り方の種類で決まる．*

特に，dSG ($d \geqq 3$) 上の SAW では，最終的に原点から出発する１本の path しか考えなくても，くりこみ群は２本以上の path の列を考える（必然的に原点以外から出発するものも考える）必要がある． ◇

[16] この点は高次元 pre-gasket では複雑になる．

命題 13 (くりこみ群) $\vec{X}_n = (X_{n,1}, X_{n,2})$ は次の漸化式で決まる．

$$\begin{aligned}&\vec{X}_0(\vec{x}) = \vec{x}, \quad x \in \mathbb{R}^2,\\&\vec{X}_{n+1}(\vec{x}) = \vec{\Phi}(\vec{X}_n(\vec{x})), \quad x \in \mathbb{R}^2,\ n \in \mathbb{Z},\end{aligned}$$

ここで $\vec{\Phi} = (\Phi_1, \Phi_2) = \vec{X}_1$.

証明. G_{n+1} のうち $2G_n$ だけを見ることで G_{n+1} に値を取る path $w \in \mathcal{W}_{n+1}$ から $2G_n$ に値を取る path を得て，図形を半分に縮小することで $\mathcal{W}_n$ の要素 $Q_n w$ (decimation) を §3 の (35) と同様に定義できる．命題 11 の証明と同様に $\mathcal{W}_1$ の path で分類することで，くりこみ群を得る． □

もちろん $\vec{\Phi} = \vec{X}_1$ をあらわに求めるのも難しくはない．

$$\begin{aligned}&\Phi_1(\vec{x}) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + x_1^3 + 2x_1^2x_2\,,\\&\Phi_2(\vec{x}) = (x_1^2 + 2x_1x_2)x_2\,,\end{aligned} \tag{44}$$

注 6 $d \geqq 3$ のとき dSG の $\vec{\Phi}$ を求めるのは手ではできない．$d \geqq 4$ ではパソコンでも完全に求めるのは楽ではない．

◇

問 4 *(i) (44)* を導け．

(ii) 命題 *13* の証明で「命題 *11* の証明と同様に」となっている部分を遂行せよ．

(iii) $\vec{X}_n(\vec{x})$, $n \in \mathbb{Z}_+$, をいろいろな $\vec{x}$ に対して計算機で計算して求め，*flow* の様子の概形を描け．

◇

最終的にほしいのは総歩数 $L = s_1 + 2s_2$ と path の終点位置 (n で決まる) の関係だから， L の母関数 $\vec{Z}_n = (Z_{n,I}\,,\ I \in \{1,2\})$ を

$$Z_{n,I}(\beta) = \sum_{w \in W_I^{(n)}} e^{-\beta L(w)}, \quad \beta \in \mathbb{R},\ n = 0, 1, 2, \cdots,\ I \in \{1,2\}, \tag{45}$$

で定義する．くりこみ群が閉じる母関数 $\vec{X}_n$ との関係は，(41) から，

$$Z_{n,I}(\beta) = X_{n,I}(\vec{x}_{can}(\beta)). \tag{46}$$

ここで

$$x_{can,I}(\beta) = e^{-I\beta|I|},\ I = 1, 2. \tag{47}$$

$\vec{\Phi}$ が定める $\mathbb{R}_+^2$ 上の力学系（くりこみ群）の基本性質を調べる．

定理 14 以下が成り立つ．

(FP1) $\vec{\Phi}$ の固定点 *(*$\vec{\Phi}(\vec{x}_c) = \vec{x}_c$ なる $\vec{a} = \vec{x}_c$*)* が $\{\vec{x} \in \mathbb{R}_+^2 \mid x_1 > 0\}$ にただ 1 つ存在する．

(FP2) $\vec{\Phi}$ の *Jacobi* 行列を $B = \mathcal{J} = (\mathcal{J}_{IJ})$ とおく：

$$\mathcal{J}_{IJ}(\vec{x}) = \frac{\partial \Phi_I}{\partial x_J}(\vec{x}), \quad I, J \in \{1,2\}\,,\ \vec{x} \in \mathbb{R}_+^2. \tag{48}$$

このとき， *(FP1)* の $\vec{x}_c$ に対して，$\mathcal{J}(\vec{x}_c)$ は対角化可能で，その固有値は $\lambda > 1$ を満たす λ と絶対値が 1 未満のものの 2 つである．

λ に対応する左固有ベクトルを $\vec{v}_L = (v_{L,1}, v_{L,2})$ とする：

$$\sum_{I \in \{1,2\}} v_{L,I}\mathcal{J}_{IJ}(\vec{x}_c) = \lambda v_{L,J}\,, \quad J \in \{1,2\}.$$

Fröbenius の定理から全成分非負としてよいが，このとき， $v_{L,J} > 0$, $J \in \{1,2\}$.

右固有ベクトル $\vec{v}_R$ については $v_{R,1} > 0$.

さらに次が成り立つ．

(CS1) *(FP1)* の $\vec{x}_c$ に対して，

$$\lim_{n\to\infty}\vec{Z}_n(\beta_c)=\vec{x}_c$$

となる $\beta_c\in\mathbb{R}$ が存在する．

証明. **(FP1)** $\vec{\Phi}(\vec{x}_c)=\vec{x}_c$，即ち，$\Phi_1(x,y)=x$, $\Phi_2(x,y)=y$, を $x>0$, $y\geqq 0$ で実際に解いてみれば，解はただ一つ

$$x=x_{c,1}=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{5}),\ y=x_{c,2}=0$$

と決まる．

(FP2) 定義と上の結果から，$x_{c1}^2+x_{c1}=1$ なども使うと

$$\mathcal{J}(\vec{x}_c)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}(7-\sqrt{5}) & 2\\ 0 & \frac{1}{2}(3-\sqrt{5})\end{pmatrix}$$

となって，上三角行列だから対角成分が固有値である．$\lambda=\dfrac{1}{2}(7-\sqrt{5})=2.38\cdots>1>0.38\cdots=\dfrac{1}{2}(3-\sqrt{5})$ は明らか．λ に対応する左右固有ベクトルは $\vec{v}_L=(1,1)$, $\vec{v}_R=(1,0)^T$ ととれる．

(CS1) この証明はやさしくない．

$$D=\{\vec{x}\in\mathbb{R}_+^2\mid\sup_{n\geqq 0}(X_{n,1}(\vec{x})+X_{n,2}(\vec{x}))<\infty\}$$

および

$$D_1=\{\vec{x}\in\mathbb{R}_+^2\mid\sup_{n\geqq 0}(X_{n,1}(\vec{x})\vee X_{n,2}(\vec{x}))\leqq 1\}\quad\subset\ D$$

および

$$\tilde{D}=\{\vec{x}\in\mathbb{R}_+^2\mid\lim_{n\to\infty}(X_{n,1}(\vec{x})+X_{n,2}(\vec{x}))=0\}\quad\subset\ D$$

とおく．$D^c=\mathbb{R}_+^2\setminus D$ を外部，D の点のうち D^c からの距離が正の点の集合を内部 D^o，D^c の内部でも D の内部でもない（両者から距離 0 の）点の集合を境界 ∂D，ということにする．D^o は $\mathbb{R}_+^2$ の開集合（D^c までの距離が正の点の集合だから，その距離の半分の円内の点は D^o に含まれる）．D_1 は $\mathbb{R}_+^2$ の閉集合（$\vec{x}_n\to\vec{x}$ とすると，$\vec{x}_n\in D_1$ と $\vec{X}_n(\vec{x})$ の $\vec{x}$ に関する連続性から， $X_{n,1}(\vec{x})\vee X_{n,2}(\vec{x})\leqq 1$ を得て，その n に関する sup も 1 以下になる）．

補題 15 $D=D_1$, $D^o=\tilde{D}$．さらに D^c, ∂D, D^o は $\vec{\Phi}$ の空でない不変部分集合．

証明. $D_1\subset D$ だから $D_1^c\subset D^c$ ($\mathbb{R}_+$ の中の補集合) を言えばいいが，$\vec{x}\in D_1^c$ ならば，ある n, I に対して $X_{n,I}>1$．$\vec{\Phi}$ の具体形から $X_{n+1,1}>1$ となって，$\Phi_1(\vec{x})$ は x^2 を含むから $X_{n,1}\to\infty$．

$\vec{\Phi}$ が 2 次以上の項からなる正係数多項式なので，$\vec{x}$ が十分小さければ $\tilde{D}$ に入る．他方定義から $\vec{x}\in\tilde{D}$ ならば十分大きい n に対して $\vec{X}_n(\vec{x})$ は十分小さくなる．従って $\vec{x}$ の近傍の点から初めても $\vec{X}_n(\vec{x})$ は十分小さくなるので 0 に収束する．即ち $\tilde{D}$ は開集合． D^o は D の最大の開集合なので $\tilde{D}\subset D^o$．

逆に $\vec{x}'\in D^o$ とすると，開集合なので $\vec{x}$ より両成分とも大きい $\vec{x}\in D$ が存在する． $0\leqq r=\max_I x'_I/x_I<1$ とおくと，Φ_I は 2 次以上の項からなる正係数多項式なので $\Phi_I(\vec{x}')\leqq r^2\Phi_I(\vec{x})$．帰納的に $\max_I X_{n,I}(\vec{x}')\leqq r^{2^n}\max_I X_{n,I}(\vec{x})$．$\vec{x}\in D$ だから右辺の max 部分は n について有界．よって右辺は $n\to\infty$ で 0 に収束．よって $\vec{x}'\in\tilde{D}$．

$D=D_1$ と $D^o=\tilde{D}$ は右辺の定義から不変部分集合．D^c は定義から不変部分集合．よって ∂D も $\vec{X}_n$ の連続性から不変部分集合．D^o も D^c も空でないから ∂D も空でない． □

(CS1) の証明に入る．$\vec{x}_{can}(\beta_c)=(e^{-\beta},e^{-2\beta})$ は両成分とも β について減少で，十分大きい β に対して D^o に入り，十分小さい β に対して D^c に入る．単調性からどこか 1 点 β_c を境にして D^o と D^c に分かれる．当然， $\vec{x}_{can}(\beta_c)\in\partial D$．ということは 補題 15 から，$\vec{Z}_n(\beta_c)=\vec{X}_n(\vec{x}_{can}(\beta_c))$ は n について有界だが 0 には収束しない．

$R_n(\vec{x}) = X_{n,2}/X_{n,1}(\vec{x})$ とおく．$\vec{\Phi}$ の具体形から R_n は n について非増加．$R(\vec{x}) = \lim_{n\to\infty} R_n(\vec{x}) \geqq 0$ とおくと，くりこみ群から， $R > 0$ ならば

$$R = R\left(1 - \frac{(1+R)^2}{(1+R)^2 + (1+2R)\lim_{n\to\infty} X_{n,1}}\right).$$

とならねばならないから $\vec{x} \in D^c$．逆に言えば $\vec{x} \in D$ ならば $R(\vec{x}) = 0$．D は閉集合だから $\partial D \subset D$．よって $\lim_{n\to\infty} Z_{n,2}(\beta_c) = 0$.

∂D は有界閉集合なので，無限列 $\{\vec{Z}_n(\beta_c)\}$ は ∂D に集積点 (x', y') を持つ．から $\lim_{n\to\infty} Z_{n,2}(\beta_c) = 0$ なので $y' = 0$．∂D の点で $y' = 0$ となるのは $\Phi_1(x,0) = x^2 + x^3$ から，$(x_c, 0)$ だけである．よって，集積点は $(x_c, 0)$ のみとなるので，この点に収束する．即ち， $\lim_{n\to\infty} \vec{Z}_n(\beta_c) = \vec{x}_c$ を得る．

□

問 5 *(FP1)* の証明を実際にやってみよ． ◇

注 7 *(i)* $\vec{x}_c$ は力学系の言葉で言えば，軌道が動かない（固定点直上理論）ということであるが，これを対応する確率連鎖の言葉で言えば，*SRW* のように (W_n, P_n) と (W_{n+1}, P_{n+1}) が本質的に同じ（単に空間的に半分に縮小しただけ）としたとき，*decimation* Q_n が整合的 $P_{n+1} \circ Q_n^{-1} = P_n$ ということを意味する．1 型だけからなる道だけを考えて，有限長 *path* の出現確率はその *path* の歩数 L を用いて $x_{c,1}^L$ と定義したとき，F_1 では確率 $x_{c,1}^2$, $x_{c,1}^3$ の *path* が 1 本ずつ可能だが，*decimation* によってこれを F_0 上の 1 歩にまとめたとき，その和は $x_{c,1}$ なので，たしかに 1 歩の確率になっている．

λ の直感的な意味は，この固定点直上理論について，F_1 を通り抜けるのに要する平均歩数（即ち F_0 の 1 歩に一段細かい構造を入れたとき，平均何歩に増えるか）を表す．即ち $\lambda = (2x_{c,1}^2 + 3x_{c,1}^3)/x_{c,1}$．ここで分母の $x_{c,1}$ は条件付き確率（大きい 1 歩が $x_{c,1}$ の確率を持っている）から来る．

(ii) この定理の証明の前半も高次元 *gasket* 上では未解決．固定点の存在や唯一性は単純ではない．*dSG* において d についての一般論を構築するとき，最大の困難は固定点の決定と軌道の収束の証明である．その意味で， $d = 2$ では極めて簡単であった以上の部分 *(*くりこみ群の軌道解析*)* が一般論では本質となる．

最大の本質的困難は，$d = 2$ では ϕ が $\mathbb{R}$ 上の写像だったのに対して $d \geqq 3$ では高次元空間になるため，仮に期待通りに ϕ が Φ の定める力学系の軌道の漸近形の本質的部分を与えるとしても，可能な行き先が高次元で，一点だけではないから，収束を自明とできない．

(iii) *SRW* をくりこみ群で解析したときは軌道の収束を議論する必要がなかった．これは最初から固定点直上 *(*x_c*)* が *SRW* であったからである．伝統的な立場に則った研究はこのような固定点直上の解析になっている．逆にこのために，くりこみ群の難しさが今日まで数学において意識されにくかったのかもしれない．

SAW はここでの解析が示すとおり，一本を *relative weight* 1 で定義する本来の自然な *weight (micro canonical ensemble)* と，くりこみ群の解析に乗りやすい母関数 *(canonical ensemble)* が，自明でない．*SRW* は母関数の *weight* x^L が固定点で x_c^L となって，L が一定なら *weight* が共通だったが，*SAW* では x^L で始めても，固定点は $(x_c, 0)$ なので z^L の形にはまとまらない．

(iv) x_c と違って β_c の値や領域 D の具体形は軌道の大局的な振舞に依存するため，求めにくい．そのため，通常これらの量の詳細研究は「後回し」になっている．

◇

ここまでくりこみ群と呼んだ（一見確率連鎖とは何の関係もなさそうな）力学系の軌道を調べてきた．真に驚くべきことは，定理 14 があれば（あと若干の技術的条件があるものの本質的には）SAP の漸近的性質，例えば mean square displacement，が導ける，という事実である．このことは Sierpiński gasket の高次元拡張でも一般的に示すことができる [39]．次節で Sierpiński gasket の場合について，その若干の様子を眺める．

5 Pre-Sierpiński gasket 上の self-avoiding walk のくりこみ群から漸近的性質へ．

5.1 端点を固定した path の歩数分布．

§4.4 におけるくりこみ群解析の結果を path の漸近的性質に翻訳する道筋を概観する．より詳しいことは数理物理学講義録 [1] の該当の節を参照していただきたい．

$\vec{x}=(x,y)\in\mathbb{R}_+^2\setminus\{0\}$ と $n\in\mathbb{Z}_+$ と $I\in\{1,2\}$ に対して， $W_I^{(n)}$ 上の測度 (canonical ensemble) を

$$\mu_{\vec{x},n,I}(w)=\frac{1}{X_{n,I}(\vec{x})}x^{s_1(w)}y^{s_2(w)}$$

で定義する．

§3 の意味で decimation が縮小と整合する確率測度（固定点直上理論）は $\vec{x}=\vec{x}_c$ ととった場合で，これが SRW における $\tilde{\mathcal{W}}_n$ 上の path 測度を $(1/2)^{L(w)-1}$ ととった場合（通常の SRW）に相当する．SRW からの連続極限による Brown 運動の構成のように，Sierpiński gasket 上の self-avodiding walk の連続極限 (self-avoiding process) を構成することができるが，このときは $\mu_{\vec{x}_c,n,I}$ に基づいて構成する ([31, 34])．

他方，SAW の漸近的性質でほしいのは L の分布なので，$\vec{x}=\vec{x}_{can}(\beta_c)$ とった場合，即ち，

$$\mu_{\vec{x}_{can}(\beta_c),n,I}(w)=\frac{1}{Z_{n,I}(\beta_c)}e^{-\beta_c L(w)}$$

を調べる必要がある．SRW では両者が一致するので問題がないが，SAW ではパラメータ空間で両者がずれているので，くりこみ群の軌道追跡が必要になる．

$\mu_{\vec{x}_{can}(\beta_c),n,I}$ で測った $\lambda^{-n}(s_1,s_2)$ の分布を $p_{\vec{x}_{can}(\beta_c),n,I}$ と書く．λ^n が平均歩数だから $p_{\vec{x}_{can}(\beta_c),n,I}$ が $n\to\infty$ で収束するはず.（パラメータ空間で固定点に吸い込まれる軌道の図.）これの母関数は，

$$\begin{aligned}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{\vec{t}\cdot\vec{\xi}}p_{\vec{x}_{can}(\beta_c),n,I}(d\vec{\xi})&=\sum_{w\in W_I^{(n)}}e^{\lambda^{-n}\vec{t}\cdot\vec{s}(w)}\frac{1}{Z_{n,I}(\beta_c)}e^{-\beta_c(s_1(w)+2s_2(w))}\\&=\frac{X_{n,I}(e^{-\beta_c+\lambda^{-n}t_1},e^{-2\beta_c+\lambda^{-n}t_2})}{X_{n,I}(e^{-\beta_c},e^{-2\beta_c})}.\end{aligned}\tag{49}$$

くりこみ群のパラメータ空間で見ると，分子は安定多様体から $O(\lambda^{-n})$ ずれたところから出発して n 回 iteration を繰り返しているから， n によらず $O(1)$ のずれですむ．それ故この量は $n\to\infty$ で収束する可能性がある．実際,（以上の考察だけではすぐには見えないが）$\{\vec{t}\in\mathbb{C}^2\mid \mathbf{Im}t_1\geqq 0,\ \mathbf{Im}t_2\geqq 0\}$ で広義一様収束する．

言葉を換えると，λ^{-n} でスケールするのは (49) の $\vec{t}$ の 1 次が (軌道が固定点に収束することから)

$$\lambda^{-n}\left(\frac{\partial X_{n,I}}{\partial x_J}\right)(\vec{x}_{can}(\beta_c))\approx\lambda^{-n}\times M\mathcal{J}(\vec{x}_c)^n\approx\lambda^{-n}\times M'\lambda^n$$

となって収束することを目指している．

なお，(FP2) で左固有ベクトルの成分の正値性に言及したが，これは上記変形で行列から最大固有値を抜き出すときに実際には誤差評価を行うのにノルムとして

$$|\vec{z}|_*=\sum_I v_{LI}|z_I|$$

を用いることができるようになって，これで測ると

$$|\mathcal{J}(\vec{x}_c)\vec{z}|_*\leqq\lambda|\vec{z}|_*$$

が言えるからである．

さて，(49) の $n\to\infty$ での収束は $\{\vec{t}\in\mathbb{C}^2\mid \mathbf{Im}t_1\geqq 0,\ \mathbf{Im}t_2\geqq 0\}$ で言えるので、特に純虚数でも言える． $p_{\vec{x}_{can}(\beta_c),n,I}$ は $\mathbb{R}_+^2$ に support されているので，純虚数での値は $p_{\vec{x}_{can}(\beta_c),n,I}$ の特性関数である．即ち，特性関数が広義一様収束しているので，$p_{\vec{x}_{can}(\beta_c),n,I}$ は $n\to\infty$ で弱収束する．

さらに，母関数の recursion で $n\to\infty$ とすることで，特性関数の方程式が得られる．$\vec{t}$ の 1 次の項を除いて，この方程式で特性関数は決まる（即ち母関数の recursion がスケーリングの自由度を除いて極限特性関数の全情報を持っている）．この他，recursion から種々の重要な性質を得る．証明は略すが，極限測度の下での「スケールされた総歩数」の分布（後述）がルベーグ測度に対して絶対連続で，密度が正になることなどを得る．

5.2 歩数を固定した path の本数．

ここまでは端点 n を固定した path $W_I^{(n)}$ の歩数 L の分布について調べた．これを歩数 k を固定した path の位置 $w(k)$ の分布に翻訳する．(その際，これまで考慮していなかった，途中点で止まる path も考慮しなければならない.)

$W^{(0)}$ を原点 O から出発する SAP の集合とする：$W^{(0)} = \{w \in W_0 \mid w(0) = O\}$.

先ず，次を示す.

定理 16 $k \in \mathbb{Z}_+$ に対して

$$N(k) = \sharp\{w \in W^{(0)} \mid L(w) = k\}$$

を O から出発し歩数 k の *SAP* の本数とするとき，

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \log N(k) = \beta_c\,.$$

証明. 先ず，**上からの評価**

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \log N(k) \leqq \beta_c$$

を証明する.

$\tilde{\nu}:\ W^{(0)} \to \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$ を

$$\tilde{\nu}(w) = \min\{n \in \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\} \mid w(k) \in G_n\,,\ k = 0, 1, 2, \cdots, L(w)\}, \quad w \in W^{(0)}. \tag{50}$$

で定義して

$$\zeta_n = \sum_{w \in W^{(0)};\, \tilde{\nu}(w) \leqq n} e^{-\beta_c L(w)}, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{51}$$

とおくと， 命題 13 と同様の図形的考察から，最高次数 $d+1$ の正係数多項式 $f_1:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ が存在して

$$\zeta_{n+1} \leqq f_1(\vec{Z}_n(\beta_c))\zeta_n, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{52}$$

を満たす．これと (CS1) ($\vec{Z}_n(\beta_c)$ が bounded) から，$A_1, A_2 > 0$ が存在して，

$$\zeta_n \leqq A_1 A_2^n,\ n \in \mathbb{Z}_+. \tag{53}$$

さらに，自明の関係式 $L > 2^{\tilde{\nu}-1}$ から，k 歩の SAP w は $\tilde{\nu}(w) \leqq 1 + \dfrac{\log k}{\log 2}$ を満たすので，

$$N(k)e^{-\beta_c k} \leqq \sum_{\tilde{\nu}(w) \leqq 1 + \frac{\log k}{\log 2}} e^{-\beta_c L(w)} \leqq \zeta_{1+\left[\frac{\log k}{\log 2}\right]}$$

を満たすので，

$$N(k) \leqq A' e^{\beta_c k} k^{\alpha}, \quad k \in \mathbb{N},$$

なる正定数 A' と実定数 α が存在することが分かる.

次に，**下からの評価**

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \log N(k) \geqq \beta_c$$

を証明する．こちらはこみ入っている.

$\mu_{\vec{x}_{can}(\beta_c),n,I}$ の下でのスケールされた総歩数 $\lambda^{-n}L(w)$ の分布を $\bar{p}_{\vec{x}_{can}(\beta_c),n,I}$ とする.

$$\bar{p}_{\vec{x}_{can}(\beta_c),n,I}([\lambda^{-n}a, \lambda^{-n}b]) = \frac{1}{Z_{n,I}(\beta_c)} \sum_{w \in W_I^{(n)},\ a \leqq L(w) \leqq b} e^{-\beta_c L(w)}. \tag{54}$$

母関数で言えば，$p_{\vec{x}_{can}(\beta_c),n,I}$ の母関数 (49) で $\vec{t} = (t, 2t)$ と置いたものに等しい.

$$\int_0^\infty e^{t\xi} \bar{p}_{\vec{x}_{can}(\beta_c),n,I}(d\xi) = \frac{Z_{n,I}(\beta_c - \lambda^{-n}t)}{Z_{n,I}(\beta_c)}\,.$$

命題 17 $\exists\epsilon > 0, b > 0, n_0 > 0$; $(\forall n \geqq n_0)$ に対して $k = k(n)$ を $\lambda^n \leqq k < \lambda^{n+1}$ なるようにとるとき，

$$\bar{p}_{\vec{x}_{can}(\beta_c),n,1}([\lambda^{-n}k - 2d_n, \lambda^{-n}k]) \geqq c_n\epsilon.$$

ここで， $c_n = sqrtn\lambda^{-n}$, $d_n = \sqrt{2\lambda}bn\lambda^{-n}$.

この命題の証明は省略する.（特性関数の遠方での減衰を証明することで行う.）命題の意味は単純で，歩数幅をある程度取っておけば，その中に必ず path が（総数に比べて無視できない程度に）ある，ということである.

命題 17 と path の延長による対応

$$\{w \in W_1^{(n)} \mid L(w) \leqq k\} \to \{w \in W^{(0)} \mid L(w) = k\}$$

が単射であることから,

$$\begin{aligned} &Z_{n,(1)}(\beta_c)c_n\epsilon \leqq Z_{n,(1)}(\beta_c)\bar{p}_{\vec{x}_{can}(\beta_c),n,1}([\lambda^{-n}k - 2d_n, \lambda^{-n}k]) \\ &\leqq \sum_{w \in W_{(1)}^{(n)};\ k-2d_n\lambda^n \leqq L(w) \leqq k} e^{-\beta_c L(w)} \leqq e^{2\beta_c d_n \lambda^n} e^{-\beta_c k} N(k). \end{aligned}$$

$n \approx \dfrac{\log k}{\log \lambda}$ と (CS1) ($\vec{Z}_n(\beta_c)$ が bounded) から，定理 16 の下からの評価を得る.

□

5.3 Mean square displacement.

自然数 k に対して，歩数 k の SAP の集合上の一様分布を $\tilde{P}_k$ とする．即ち,

$$\tilde{P}_k[A] = \frac{1}{N(k)} \sharp\{w \in A \mid L(w) = k\}, \quad A \subset W^{(0)}.$$

次の結果は，mean square displacement の指数の存在を意味する．即ち，(対数比の意味で) 長さ $L(w) = k$ の典型的な SAP w は $|w(k)| \asymp k^\nu$ 程度の距離に届く．ここで,

$$\nu = \frac{\log 2}{\log \lambda}. \tag{55}$$

定理 18

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\log k} \log E_k[|w(k)|^s] = s\nu, \quad s \geqq 0.$$

ここで E_k は $\tilde{P}_k$ に関する期待値，$|\cdot|$ は $\mathbb{R}^d \supset F$ のユークリッド距離.

証明. この証明は 3 つの要素

(i) reflection principle で $|w(k)|$ を $\tilde{\nu}(w)$ に翻訳すること,

(ii) large deviation 型の評価で $L \approx \lambda^{\tilde{\nu}}$ から大きくずれた path が少ないこと,

(iii) 一様分布の分母 $N(k)$ に関する定理 16 の評価,

からなる.

1. Reflection principle.

命題 19 (Reflection principle) $E_k[2^{s(\tilde{\nu}(w)-1); |w(k)| \leqq 2^{\tilde{\nu}(w)-1}} \leqq E_k[2^{s(\tilde{\nu}(w)-1)}; |w(k)| \geqq 2^{\tilde{\nu}(w)-1}$.

これは [37, Lemma (4.2)] の図を参照して頂きたい．ここでは証明は略す.

命題 19 と自明の関係式

$$|w(L(w))| \leqq 2^{\tilde{\nu}(w)} \leqq L(w)$$

から

$$\begin{aligned} &E_k[2^{\tilde{\nu}s}] \geqq E_k[|w(k)|^s] \geqq E_k[|w(k)|^s;\ |w(k)| \geqq 2^{\tilde{\nu}(w)-1}] \\ &\geqq E_k[2^{s(\tilde{\nu}(w)-1)};\ |w(k)| \geqq 2^{\tilde{\nu}(w)-1}] \\ &\geqq \frac{1}{2}(E_k[2^{s(\tilde{\nu}(w)-1)};\ |w(k)| \geqq 2^{\tilde{\nu}(w)-1}] + E_k[2^{s(\tilde{\nu}(w)-1)};\ |w(k)| \leqq 2^{\tilde{\nu}(w)-1}]) \\ &= 2^{-s-1}E_k[2^{s\tilde{\nu}(w)}] \end{aligned}$$

これから

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\log k} \log E_k[|w(k)|^s] = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\log k} \log E_k[2^{s\tilde{\nu}}]$$

を得るので，定理 18 は

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\log k}\log E_k[2^{s\tilde{\nu}}]=s\nu$$

に帰着する．

2. Large deviation principle.

$L\sim\lambda^{\tilde{\nu}}$ となるはずなので，$\tilde{\nu}\leqq n$ なのに $L\geqq\lambda^{n+m/2}$ となることは (m が大きいほど) 可能性が小さい．

命題 20 (Large deviation principle.)

$$U_{n,m}=\sum_{\substack{w\in W^{(0)};\\ \tilde{\nu}(w)\leqq n,\\ L(w)\geqq\lambda^{n+(m/2)}}} e^{-\beta_c L(w)}$$

と

$$V_{n,m}=\sum_{\substack{w\in W^{(0)};\\ \nu(w)=n+1,\\ L(w)\leqq\lambda^{n-m}}} e^{-\beta_c L(w)}$$

とおくと，$\exists C',C'',A_2>0;$

$$\begin{aligned}U_{n,m}&\leqq C'A_2^n e^{-C''\lambda^{m/2}}\\ V_{n,m}&\leqq C'A_2^n e^{-C''2^m}\end{aligned}$$

ここで A_2 は *(53)* と同じにとれる．

証明．(52) の f_1 を使った recursion を $U_{n,m}$, $V_{n,m}$ に対して立てる．長い path は 1 つ n の小さい三角形のいずれかで長い path でなければならない．最後の断片が長いケースは recursion でより細かい三角形に遡る．

$$S_{n,m,I}=\sum_{w\in W_I^{(n)};\ L(w)\geqq C''\lambda^{n+m/2}} e^{-\beta_c L(w)}$$

とおくと，

$$U_{n,m}\leqq C_1A_2^n\sum_{k=0}^{k_0}\sum_I S_{n-k-1,m+k,I}$$

そして，

$$S_{n,m,I}\leqq Z_{n,I}(\beta_c-\lambda^{-n})e^{-C''\lambda^{m/2}}$$

を得る．$Z_{n,I}(\beta_c-\lambda^{-n})$ が有界であることは別途証明しておく．

以上から $U_{n,m}$ の評価を得る．$V_{n,m}$ も同様である．

□

$k\in\mathbb{N}$ に対して $\tilde{n}(k)=\left[\dfrac{\log k}{\log\lambda}\right]$ とおく．明らかに $\lambda^{\tilde{n}(k)}\leqq k<\lambda^{\tilde{n}(k)+1}$. 命題 20 から

$$\begin{aligned}&\sharp\{w\in W^{(0)}\mid L(w)=k,\ \tilde{\nu}(w)\leqq\tilde{n}(k)-m\}\leqq e^{\beta_c k}U_{\tilde{n}(k)-m,2m}\\ &\leqq C'\exp(\beta_c k+(\tilde{n}(k)-m)\log A_2-C''\lambda^m)\\ &\leqq C'\exp(\beta_c k+\log_{\log\lambda}A_2\log k-C''\lambda^m).\end{aligned}$$

これで $\tilde{P}_k[\nu(w)\leqq\tilde{n}(k)-\alpha\log\log k]$ の分子を上から評価できる．分母 $N(k)$ の下からの評価は，定理 16 の証明の中にある評価を用いる．こうして十分大きい α に対して $\tilde{P}_k[\nu(w)\leqq\tilde{n}(k)-\alpha\log\log k]$ は $k\to\infty$ で 0 に収束する．これと Chebishev

$$E_k[2^{s\tilde{\nu}(w)}]\geqq(k(\log k)^{-\alpha})^{s\nu}(1-\tilde{P}_k[2^{\tilde{\nu}}\leqq k^{\nu}(\log k)^{-\alpha\nu}])$$

から lower bound

$$\varliminf_{k\to\infty}\frac{1}{\log k}\log E_k[2^{s\tilde{\nu}}]\geqq s\nu$$

を得る．

Upper bound も同様であるが，Chebishev の代わりに自明の評価 $2^{\tilde{\nu}s}<L$ から得られる

$$E_k[2^{s\tilde{\nu}(w)}]\leqq(k(\log k)^{\alpha})^{s\nu}+(2k)^s\tilde{P}_k[2^{\tilde{\nu}}\geqq k^{\nu}(\log k)^{\alpha\nu}]$$

を用いると，

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{1}{\log k} \log E_k[2^{s\tilde{\nu}}] \leqq s\nu$$

を得る．

$\square$

補遺．

A　初等的事項の補遺．

A.1　大数の法則，中心極限定理

確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ 上の確率変数列 X_n, $n \in \mathbb{N}$, に対して，$\{X_n\}$ が i.i.d. で $\mathrm{E}[\, X_1^2 \,] < \infty$（従って，Schwarz の不等式から $\mathrm{E}[\, |X_1| \,] < \infty$，また，分散 $\mathrm{V}[\, X_1 \,] = \mathrm{E}[\, (X_1 - \mathrm{E}[\, X_1 \,])^2 \,] < \infty$）とする．

和 $W_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ は分散有限な i.i.d. の和だから，大数の強法則と中心極限定理が成り立つ[17]．

命題 21 (大数の強法則，中心極限定理) $\{X_n\}$ が *i.i.d.* で $\mathrm{E}[\, X_1^2 \,] < \infty$ ならば，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} W_n = \mathrm{E}[\, X_1 \,]$, *a.e.,* が成り立つ．また，$\dfrac{1}{\sqrt{n}}(W_n - n\mathrm{E}[\, X_1 \,])$ の分布は $n \to \infty$ のとき平均 0，分散 $v = \mathrm{V}[\, X_1 \,]$ の正規分布 $N(0, v)$ に弱収束する．

$N(0, v)$ は連続分布なので，このことから任意のボレル集合 A に対して

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}[\, \frac{1}{\sqrt{n}}(W_n - n\mathrm{E}[\, X_1 \,]) \in A \,] = N(0, v)(A) = \int_A e^{-x^2/(2v)} \frac{dx}{\sqrt{2\pi v}}$$

となる．

A.2　SRW の mean square displacement の指数 (非整数べきの場合)．

A.2.1　1 次元の場合．

中心極限定理 命題 21 から，$\dfrac{1}{\sqrt{n}} W_n$ の分布は $n \to \infty$ のとき標準正規分布 $N(0, 1)$ に弱収束するので，Z が $N(0, 1)$ を分布に持つ確率変数，f が有界連続関数のとき，

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}[\, f(n^{-1/2} W_n) \,] = \mathrm{E}[\, f(Z) \,].$$

[18] $M > 0$ に対して $f_M(x) = (|x| \wedge M)^{2p}$ とおく[19] と

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}[\, (n^{-1/2} |W_n|)^{2p} \wedge M^{2p} \,] = \mathrm{E}[\, |Z|^{2p} \wedge M^{2p} \,]. \tag{56}$$

$M \to \infty$ とすればよいが，そのためには大きいところからのモーメントへの寄与が小さいことを言う必要がある．以下それを示す．

Hölder の不等式：$p^{-1} + q^{-1} = 1$, $1 < p < \infty$, のとき $\|X\|_p < \infty$, $\|Y\|_q < \infty$ ならば $\mathrm{E}[\, |XY| \,] \leqq \|X\|_p \|Y\|_q$．ここで $\|X\|_p = \mathrm{E}[\, |X|^p \,]^{1/p}$.

---

[17] 4 次のモーメントも有限ならば，大数の強法則はやさしい証明が成り立つことも思い出しておくとよい．

[18] 特に特性関数の各点収束 (tightness argument から実際は広義一様収束) を得る：

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}[\, e^{\sqrt{-1} t \sqrt{n}^{-1} W_n} \,] = e^{-t^2/2}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

しかし，これの微分 (モーメント) の収束は得られるか？L^1 収束よりは弱いが，弱収束から期待値の収束は自明ではない．

[19] $a \wedge b = \min\{a, b\}$.

注 8 *Hölder* の不等式の自明な使い方の一つに $Y=1$ とおく方法がある．これは発散する X_n に対しては指数を損するが，$n^{-a}X_n$ が有界に近いならば，これを X として使うことにより，指数に関して損のない不等式を得る．これがここでの使い方． ◇

$\ell > 2p$ なる自然数 ℓ をとると，Hölder の不等式 ($Y=1$，p を $\ell/(2p)$ として適用) と (2) から

$$\mathrm{E}[\,(n^{-1/2}|W_n|)^{4p}\,] \leqq \left(\mathrm{E}[\,(n^{-1/2}|W_n|)^{2\ell}\,]\right)^{2p/\ell} = ((2\ell-1)!!)^{2p/\ell}\,(1+O(n^{-1}))$$

だから

$$C = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{E}[\,(n^{-1/2}|W_n|)^{4p}\,] < \infty.$$

よって Schwarz の不等式から，任意の $\epsilon>0$ に対して $\mathrm{P}[\,|n^{-1/2}W_n| \geqq M\,] \leqq \epsilon^2/C$ ならば

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}[\,|n^{-1/2}W_n|^{2p};\ |n^{-1/2}W_n| \geqq M\,] = \mathrm{E}[\,|n^{-1/2}W_n|^{2p}\,\chi_{|n^{-1/2}W_n|\geqq M}\,]\\ &\leqq \sqrt{\mathrm{E}[\,|n^{-1/2}W_n|^{4p}\,]\,\mathrm{P}[\,|n^{-1/2}W_n| \geqq M\,]} \leqq \epsilon.\end{aligned}$$

また，チェビシェフの不等式から

$$M^{4p}\,\mathrm{P}[\,|n^{-1/2}W_n| \geqq M\,] \leqq \mathrm{E}[\,|n^{-1/2}W_n|^{4p}\,] \leqq C$$

なので， $M > (C/\epsilon)^{1/2p}$ にとれば $\mathrm{P}[\,|n^{-1/2}W_n| \geqq M\,] \leqq \epsilon^2/C$ となる．このとき，

$$0 \leqq \mathrm{E}[\,|n^{-1/2}W_n|^{2p}\,] - \mathrm{E}[\,|n^{-1/2}W_n|^{2p}\wedge M^{2p}\,] \leqq \mathrm{E}[\,|n^{-1/2}W_n|^{2p};\ |n^{-1/2}W_n| \geqq M\,] \leqq \epsilon.$$

$\mathrm{E}[\,|Z|^{2p}\,] - \mathrm{E}[\,|Z|^{2p}\wedge M^{2p}\,]$ についても同様にできる．これらを (56) と合わせれば

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}[\,|n^{-1/2}W_n|^{2p}\,] = \mathrm{E}[\,|Z|^{2p}\,] < \infty \tag{57}$$

を得る．よって (1) が成り立つ．

A.2.2 d 次元の場合．

高次の場合も §A.2 の議論を使うことができる．即ち $t\in\mathbb{R}^d$ を固定する毎に，§A.2 の議論で W_n を d 次元の $t\cdot W_n$ に，Z を分布 $N(0,t^2/d)$ を持つ確率変数に置き換えると，$p>1$ と $t\in\mathbb{R}^d$ の各点で

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}[\,|n^{-1/2}t\cdot W_n|^{2p}\,] = \mathrm{E}[\,|Z|^{2p}\,] < \infty,\quad t\in\mathbb{R}^d,\ d=1,2,3,\cdots,p>1, \tag{58}$$

を得る．よって，$C_{p,t,d}>0$ があって，

$$\mathrm{E}[\,|t\cdot W_n|^{2p}\,] \sim C_{p,t,d}\,n^p,\quad t\in\mathbb{R}^d,\ d=1,2,3,\cdots,p>1, \tag{59}$$

の意味で (1) の一般次元化が成り立つ．

A.3 Stirling の公式．

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{B_n}=1$ なることを $A_n \sim B_n$, $(n\gg 1)$ と書くとき，$n! \sim \sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}$, $n \gg 1$, となる．これは非常によく知られた公式で，その導出方法も初等的教科書に種々ある．例えば $\log n!$ を $\int \log x dx$ と比較する [15, vol. 1 §II.9]，[7, §5.1] など．ここでは $n!$ の積分表示を直接評価する方法を紹介する．前提とするのはガウス積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2}\,dy = \sqrt{2\pi}$.

アイデア１ (CLT)． $f(x) = x - n\log x$ とおくと，

$$n! = \int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx = \int_0^\infty e^{-f(x)}\,dx.$$

$f'(x) = 1-\dfrac{n}{x}$, $f''(x) = \dfrac{n}{x^2}$ より，f は $x=n$ で最小値をとり，その周辺で $f(x) \fallingdotseq f(n) + \dfrac{1}{2}f''(n)(x-n) = n - n\log n + \dfrac{1}{2n}(x-n)^2$ を得る．よって， $x = n + y\sqrt{n}$ として

$$n! \fallingdotseq n^n e^{-n}\int_0^\infty e^{-(x-n)^2/2}\,dx \fallingdotseq n^n e^{-n}\sqrt{n}\int_{-\infty}^\infty e^{-y^2/2}\,dy = n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$$

が期待される．

（以上の手法は鞍点法と呼ばれていて，積分の漸近形を評価するのに有効である．但し，上下からの評価をきちんと行わないと証明としては完結しない．一般にそのためには，あとで見るようにもう一つアイデアが必要になる.）

証明前半． $n! = \int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx$ において $x = n + y\sqrt{n}$ として

$$n! = n^n e^{-n}\sqrt{n}\int_{-\sqrt{n}}^\infty (1 + y/\sqrt{n})^n e^{-y\sqrt{n}}\,dy.$$

よって

$$F_m = \int_{-m}^\infty \left(e^{-y}(1 + y/m)^m\right)^m\,dy$$

とおくとき，$\lim_{m\to\infty} F_m = \sqrt{2\pi}$ を言えばよい．**アイデア１**から $-y + m\log(1 + y/m) \fallingdotseq -y^2/(2m)$ が期待されるので，$m > 1$ と $\alpha > 0$ に対して

$$f(y) = -y + m\log(1 + y/m) + \frac{\alpha y^2}{2m}, \quad y > -m,$$

とおくと，

$$F_m = \int_{-m}^\infty e^{mf(y)} e^{-\alpha y^2/2} dy.$$

$$f'(y) = -\frac{\alpha}{m(m+y)}\, y(y - \frac{1-\alpha}{\alpha}m)$$

だから $\alpha > 1$ と $\alpha < 1$ に分けて増減表を書く．

$\alpha > 1$ **のとき．**

y	$-m$		$-(1-1/\alpha)m$		0		∞
$f(y)$	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$	0	$\nearrow$	∞

よって，$y \geqq -(1-1/\alpha)m$ のとき $f(y) \geqq 0$．これより，

$$F_m \geqq \int_{-(1-1/\alpha)m}^\infty e^{-\alpha y^2/2} dy = \sqrt{2\pi/\alpha} - \int_{-\infty}^{-(1-1/\alpha)m} e^{-\alpha y^2/2} dy = \sqrt{2\pi/\alpha} - \int_{(1-1/\alpha)m}^\infty e^{-\alpha y^2/2} dy.$$

ここで，$m > 1$ のとき

$$\int_{(1-1/\alpha)m}^\infty e^{-\alpha y^2/2} dy \leqq \int_{(1-1/\alpha)m}^\infty y e^{-\alpha y^2/2} dy = -\frac{1}{\alpha}\, e^{-\alpha y^2/2}\Big|_{(1-1/\alpha)m}^\infty = \frac{1}{\alpha} e^{-m^2(\alpha-1)^2/(2\alpha)}$$
$$\to\ 0,\quad m\to\infty,$$

だから $\alpha > 1$ のとき

$$\varliminf_{m\to\infty} F_m \geqq \sqrt{2\pi/\alpha}.$$

よって

$$\varliminf_{m\to\infty} F_m \geqq \sup_{\alpha>1}\sqrt{2\pi/\alpha} = \sqrt{2\pi}.$$

あとは $\varlimsup_{m\to\infty} F_m \leqq \sqrt{2\pi}$ が言えればよい．

$0 < \alpha < 1$ **のとき．**

y	$-m$		0		$m(1-\alpha)/\alpha$		∞
$f(y)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$		$\nearrow$	∞

よって，$-m \leqq y \leqq m(1-\alpha)/\alpha$ のとき $f(y) \leqq 0$．これより，$\alpha > 1$ のときと同様に

$$F_m \leqq \int_{-m}^{m(1-\alpha)/\alpha} e^{-\alpha y^2/2} dy + \int_{m(1-\alpha)/\alpha}^\infty \left(e^{-y}(1+y/m)^m\right)^m\,dy$$
$$\leqq \sqrt{2\pi/\alpha} + \int_{m(1-\alpha)/\alpha}^\infty \left(e^{-y}(1+y/m)^m\right)^m\,dy.$$

もし

$$\lim_{m\to\infty}\int_{m(1-\alpha)/\alpha}^\infty \left(e^{-y}(1+y/m)^m\right)^m\,dy = 0 \tag{60}$$

が言えれば，$\alpha > 1$ のときと同様の議論で

$$\varlimsup_{m\to\infty} F_m \leqq \inf_{0<\alpha<1}\sqrt{2\pi/\alpha} = \sqrt{2\pi}$$

が言えるので証明が終わる．そこで (60) を証明する．

以下，$\delta = (1-\alpha)/\alpha\ (>0)$ とおく．

アイデア２（LDP）．　$-y+m\log(1+y/m)$ を $y>m\delta$ で上から押さえたい．しかし，２次式では，今までの増減表から分かるように，y の大きいところで上から押さえきれない．主要な寄与を与えるはずの $y=0$ から $O(m)$ 離れたところなので，粗く１次式で押さえても悪すぎないことを期待して，$g(y)=-y+m\log(1+y/m)+\epsilon y$ とおいてみると，

$$g'(y)=-\frac{1-\epsilon}{m+y}\,y(y-m\frac{\epsilon}{1-\epsilon}).$$

　$0<\epsilon<1$，かつ，$\dfrac{\epsilon}{1-\epsilon}<\delta$ となるように ϵ をとる．即ち，$0<\epsilon<\dfrac{\delta}{1+\delta}$ とする．

y	0		$m\frac{\epsilon}{1-\epsilon}$		$m\delta$		∞
$f(y)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	$-m((1-\epsilon)\delta-\log(1+\delta))$	$\searrow$	$-\infty$

よって $g(m\delta)\leqq 0$ すなわち $0<\epsilon\leqq 1-\dfrac{1}{\delta}\log(1+\delta)$ が選べれば，$g(y)\leqq 0$, $y\geqq m\delta$, となって，ほしい方向の評価がほしい y の範囲で得られる．

証明後半．　容易に分かる事実 $x>\log(1+x)$, $x>0$, から，任意の $\delta>0$ に対して $0<\epsilon<(1-\dfrac{1}{\delta}\log(1+\delta))\wedge(\dfrac{\delta}{1+\delta})$ を満たす ϵ が存在する．このとき，**アイデア２**の計算によって，$-y+m\log(1+y/m)\leqq-\epsilon y$, $y\geqq m\delta$ を得るから，

$$\int_{m\delta}^{\infty}\left(e^{-y}(1+y/m)^m\right)^m\,dy\leqq\int_{m\delta}^{\infty}e^{-m\epsilon y}\,dy=\frac{1}{m\epsilon}e^{-m^2\delta\epsilon}$$
$$\to\ 0,\quad m\to\infty.$$

よって，(60) が証明できた．

A.4　誤差関数の漸近形．

命題 22 $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_x^{\infty}e^{-y^2/2}\,dy\sim\frac{1}{x}e^{-x^2/2}$.

証明．[15, §VII.1] の証明はすばらしい．

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{x}e^{-x^2/2}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^{\infty}e^{-y^2/2}\left(1+\frac{1}{y^2}\right)\,dy,$$
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right)e^{-x^2/2}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^{\infty}e^{-y^2/2}\left(1-\frac{3}{y^4}\right)\,dy,$$

が両辺を微分することにより得られるので主張が証明された．　□

A.5　Stopping time．

A.5.1　Stopping time．

確率空間 $(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})$ 上の確率変数列 X_n, $n\in\mathbb{N}$, に対して，確率変数 $\tau:\ \Omega\to\mathbb{N}\cup\{\infty\}$ が $(\sigma[\{X_n\}]\text{–})$stopping time であるとは，各 $n\in\mathbb{N}$ に対して $\{\tau\leqq n\}$ が $X_1,\cdots,X_n$ が生成する σ 加法族 $\mathcal{F}_n=\sigma[X_1,\cdots,X_n]$ の要素になっていることをいう．ここで $\sigma[X_1,\cdots,X_n]$ は $X_1,\cdots,X_n$ が生成する σ 加法族，即ち $X_i^{-1}(\mathcal{B}_1)$, $i=1,\cdots,n$, たちを含む最小の σ 加法族．

　即ち，τ が stopping time であるとは，時刻（無限大を許す）に値をとる確率変数であって，τ がある時刻になることがその時刻までの path によって決まることをいう．

　$\mathcal{F}_1\subset\mathcal{F}_2\subset\mathcal{F}_3\subset\cdots$ だから，τ が stopping time になることは

$$\{\tau=n\}\in\mathcal{F}_n,\quad n\in\mathbb{N},$$

と同値である．

例 1　*(i)* １次元 *simple random walk* W_n と $A\subset\mathbb{Z}$ に対して

$$\tau=\inf\{n\in\mathbb{Z}_+\mid W_n\in A\}\tag{61}$$

なる τ を A の *hitting time* という（条件不成立なら $\tau=\infty$ の約束）．*Hitting time* は *stopping time* である．

(ii) 定数関数は *stopping time* である．

S, T が *stopping time* ならば $S \wedge T$, $S \vee T$ も *stopping time*．特に， n を定数とするとき $T \wedge n$, $T \wedge n$ も *stopping time*．しかし，$S+T$ は *stopping time* とは限らない．

◇

注 9 情報は σ 加法族で決まるので，一般に，以上の定義を次のように拡張する．可測空間 $(\Omega, \mathcal{F})$ と $\mathcal{F}$ の部分 σ 加法族の列で増大するもの $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_3 \subset \cdots$ が与えられたとき，$\tau :\ \Omega \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ が *stopping time* であるとは,

$$\{\tau \leqq n\} \in \mathcal{F}_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

が成り立つことをいう．

Stopping time は σ 加法族の増大列によって定まるので，σ 加法族列が複数出てくるときは $\{\mathcal{F}_n\}$–*stopping time* とも書く． ◇

問 6 定数関数が *stopping time* であることを確認せよ． ◇

A.5.2 Wald の定理．

Stopping time の一つの興味深い使い方は W_τ という確率変数の期待値を考えるときである．ここで W_τ は $W_\tau(\omega) = W(\omega)_{\tau(\omega)}$, $\omega \in \Omega$, なる，確率変数 $W_\tau :\ \Omega \to \mathbb{Z}$.

問 7 W_τ が確率変数（即ち可測関数）であることを確認せよ．

（*Stopping time* の定義は，W_τ が可測関数になるようにできている！） ◇

定理 23 (Wald) $\{X_n\}$ が *i.i.d.* で $\mathrm{E}[\,|X_1|\,] < \infty$ とし，$\mathcal{F}_n = \sigma[X_1, \cdots, X_n]$, $W_n = X_1 + \cdots + X_n$, $n \in \mathbb{N}$ とおく．τ は $\mathrm{E}[\,\tau\,] < \infty$ を満たす $\{\mathcal{F}_n\}$–*stopping time* とする．このとき

$$\mathrm{E}[\,W_\tau\,] = \mathrm{E}[\,X_1\,]\mathrm{E}[\,\tau\,].$$

証明．$\mathrm{E}[\,\tau\,] < \infty$ だから $\tau \neq \infty$, a.s. に注意．即ち，最初から $\tau \in \mathbb{N}$ としてよいので，$\chi_\Omega = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{\tau=n}$, a.s.

[13, §3.1 Theorem (1.6)] に従う．まず $X_k \geqq 0$, $k = 1, \cdots, n$, の場合を扱う．和の順序交換が自由になるので

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[\,W_\tau\,] &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{E}[\,W_n \chi_{\tau=n}\,] = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}[\,X_k \chi_{\tau=n}\,] \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \mathrm{E}[\,X_k \chi_{\tau=n}\,] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{E}[\,X_k \chi_{\tau \geqq k}\,].
\end{aligned}$$

ここで， $\{\tau \geqq k\} = \{\tau < k-1\}^c \in \mathcal{F}_{k-1}$ だから，特に X_k と独立であることに注意し，また $\mathrm{E}[\,X_k\,] = \mathrm{E}[\,X_1\,]$ だから,

$$\mathrm{E}[\,W_\tau\,] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{E}[\,X_k\,]\mathrm{P}[\,\tau \geqq k\,] = \mathrm{E}[\,X_1\,]\mathrm{E}[\,\tau\,].$$

一般の場合，この結果，特に $|X_k|$ に対して以上の証明が成り立つので,

$$\infty > \mathrm{E}[\,|X_1|\,]\mathrm{E}[\,\tau\,] = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \mathrm{E}[\,|X_k| \chi_{\tau=n}\,].$$

従って，元の級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{E}[\,W_n \chi_{\tau=n}\,]$ は絶対収束するので，和の順序交換がやはり自由になり，よって $\mathrm{E}[\,W_\tau\,] = \mathrm{E}[\,X_1\,]\mathrm{E}[\,\tau\,]$ を得る． □

A.5.3　区間からの脱出 (classical ruin problem)，再帰性．

[15, vol. 1 XIV 章] では classical ruin problem と呼んでいる．

定理 23 を simple random walk に適用する．0 をはさんで 2 つの整数 $-a < 0 < b$ をとる．0 から出発する simple random walk が（行ったり来たりしながらやがて）$-a$ または b にたどり着いたらそこで止まる，という状況を考える．硬貨を投げて表なら右裏なら左に行くすごろくで，$-a$ に着いたら A の勝ち，b に着いたら B の勝ち，というゲームを想像すればよい．問題は，A, B それぞれの勝つ確率である．

言い換えると，simple random walk を stopping time $\tau = \inf\{n \in \mathbb{N} \mid W_n \in \{-a, b\}\}$ までの時間で見ることになる．定理 23 が使えるには $\mathrm{E}[\,\tau\,] < \infty$ が必要だが，その証明を後回しにして，定理 23 を使うと，$\mathrm{E}[\,X_1\,] = 0$ なので，

$$b\mathrm{P}[\,W_\tau = b\,] - a\mathrm{P}[\,W_\tau = -a\,] = \mathrm{E}[\,W_\tau\,] = \mathrm{E}[\,X_1\,]\mathrm{E}[\,\tau\,] = 0\,.$$

($\mathrm{E}[\,\tau\,] < \infty$ なので $\tau \in \mathbb{N}$, a.e., に注意．) $\mathrm{P}[\,W_\tau = b\,] + \mathrm{P}[\,W_\tau = -a\,] = 1$ と合わせると，

$$\mathrm{P}[\,W_\tau = -a\,] = \frac{b}{a+b}, \quad \mathrm{P}[\,W_\tau = b\,] = \frac{a}{a+b}\,. \tag{62}$$

こうやってこのすごろくの勝敗確率が計算できる！ちょうど内分点をベクトル表示するときの係数と等しくなっていて覚えやすい．

残っていた $\mathrm{E}[\,\tau\,] < \infty$ の証明．

$-a < x < b$ ならば $a+b$ 歩まっすぐ進めば必ず開区間 $(-a, b)$ から出るので，$\mathrm{P}[\,(x+W_{a+b}) \in (-a,b)\,] \leqq 1 - 2^{-(a+b)}$．このまっすぐ進行評価を n 回繰り返すと，$\{X_n\}$ の独立性（$\{W_n\}$ のマルコフ性）を使って，$\mathrm{P}[\,\tau > n(a+b)\,] \leqq (1 - 2^{-(a+b)})^n$．特に，

$$\mathrm{P}[\,\tau = \infty\,] = \mathrm{P}[\,\bigcap_{n=1}^{\infty} \tau > n(a+b)\,] = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}[\,\tau > n(a+b)\,] = 0\,.$$

よって

$$\mathrm{E}[\,\tau\,] = \sum_{m=1}^{\infty} m\,\mathrm{P}[\,\tau = m\,] = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{(a+b)(n-1) < m \leqq (a+b)n} m\,\mathrm{P}[\,\tau = m\,] \leqq \sum_{n=1}^{\infty} (a+b)^2 n (1 - 2^{-(a+b)})^{n-1} < \infty.$$

特に，このことから，1 次元 simple random walk が各点にいつかは到達するか？という問に答えられる．

$T_a = \inf\{n \in \mathbb{N} \mid W_n = -a\}$, $T_b = \inf\{n \in \mathbb{N} \mid W_n = b\}$ とおくと (62) は $\mathrm{P}[\,T_a < T_b\,] = \dfrac{b}{a+b}$ を意味する．ここで $b \to \infty$ とすると，

$$\mathrm{P}[\,T_a < \infty\,] \geqq \sup_{b>0} \mathrm{P}[\,T_a < T_b\,] = 1, \quad a < 0\,.$$

対称性と $T_0 = 0$ から全ての $x \in \mathbb{Z}$ に対して，$T_x < \infty$, a.e., 即ち，

> 1 次元 simple random walk はどの点も殆ど必ず hit する．このことを「1 次元 simple random walk は再帰的 (recurrent) である」と言う．[20]

高次元 random walk の場合にどうなるかが §1.4 の一つの興味である．

一方，hit するまでの平均時間は（最初から hit している原点以外は）∞ であることも分かる．なぜなら，もし $\mathrm{E}[\,T_x\,] < \infty$ ならば定理 23 から $x = \mathrm{E}[\,W_{T_x}\,] = \mathrm{E}[\,X_1\,]\mathrm{E}[\,T_x\,] = 0$ となって，$x \neq 0$ では矛盾するから．

A.6　Subadditivity argument．

定理 24 非負実数列 $\{a_n\}$ が $a_{n+m} \leqq a_n + a_m$, $n, m \geqq 1$, を満たせば，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} a_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} a_n\,.$$

即ち，特に，極限が存在する．

---

[20] 実際は 1 次元 simple random walk では recurrence は $0-1$ 法則からすぐ分かる [13, §3.1].

証明. N を自然数とすると任意の自然数 n に対して，$n=Nk+r$ となる $r\in\{1,\cdots,N\}$ と非負整数 k が唯一存在する．仮定から

$$\frac{1}{n}a_n \leqq \frac{k}{n}a_N+\frac{1}{n}a_r \leqq (1-\frac{r}{n})\frac{1}{N}a_N+\frac{1}{n}\max\{a_1,\cdots,a_N\} \leqq \frac{1}{N}a_N+\frac{1}{n}\max\{a_1,\cdots,a_N\}\,.$$

よって，

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}a_n \leqq \frac{1}{N}a_N\,,\quad N\in\mathbb{N},$$

だから，

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}a_n \leqq \inf_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{n}a_n$$

となるので両者は等しく，従って $\displaystyle\varliminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}a_n$ とも等しくなるので，極限が存在して主張の右辺に等しい．

□

A.7 Basic facts related to weak convergence of probability measures.

定理 25 ([10, §5.4]) *(i) Let P_n, $n=1,2,3,\cdots$, be a sequence of Borel probability measures on reals, and P a Borel probability measure on reals. Then the following are equivalent (and if they hold then we say that P_n converges to P weakly as $n\to\infty$).*

(a) For all real valued, bounded, continuous function g on reals, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int g\,dP=\int g\,dP$.

(b) For all real valued, continuous function f on reals with compact support, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int f\,dP=\int f\,dP$.

(c) For all open set G, $\displaystyle\varliminf_{n\to\infty}P_n(G)\geqq P(G)$.

(d) For all closed set F, $\displaystyle\varlimsup_{n\to\infty}P_n(F)\leqq P(F)$.

(e) For all Borel set A satisfying $P(\partial A)=0$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}P_n(A)=P(A)$, where $\partial A=A\cap A^c$ denotes the boundary set of A.

(ii) Let $\mathcal{M}$ be a family of Borel probability measures on reals. A necessary and sufficient condition for $\mathcal{M}$ to be tight is

$$(\forall\epsilon>0)\ \exists F\subset\mathbb{R}:\ \textit{compact};\ (\forall n=1,2,3,\cdots)P_n(F)>1-\epsilon.$$

(By tightness we mean that for any sequence in $\mathcal{M}$, there exists a subsequence converging weakly to a Borel probability measure (not necessarily in $\mathcal{M}$.))

(iii) For a Borel probability measure on P, denote its characteristic function by $\displaystyle\varphi_P(t)=\int_{\mathbb{R}}e^{\sqrt{-1}\xi t}P(d\xi)$, which is a complex valued function defined on reals, and satisfies $|\varphi_P(t)|\leqq 1$, $t\in\mathbb{R}$. Then the following hold.

(a) For $a<b$,

$$\begin{aligned}&\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-\sqrt{-1}bt}-e^{-\sqrt{-1}at}}{-\sqrt{-1}t}\varphi_P(t)\,dt\\&=P((a,b))+\frac{1}{2}(P(\{a\})+P(\{b\})).\end{aligned}$$

(Levi's inversion formula.)

(b) Characteristic functions determine probability measure. Namely, if, for Borel probability measures P and P', $\varphi_P=\varphi'_P$ hold, then $P=P'$.

(c) For a sequence of Borel probability measures P_n, $n=1,2,3,\cdots$, and a Borel probability measure P,

i. if P_n converges to P weakly, then $\lim_{n\to\infty} \varphi_{P_n}(t) = \varphi_P(t)$ uniformly in t on compact sets of reals, and

ii. if $\lim_{n\to\infty} \varphi_{P_n}(t) = \varphi_P(t)$, pointwise in $t \in \mathbb{R}$, then P_n converges to P weakly.

(d) *For a sequence of Borel probability measures P_n, $n = 1, 2, 3, \cdots$, and for a function defined on reals f, if*

i. $f(t)$ is continuous at $t = 0$ and $\lim_{n\to\infty} \varphi_{P_n}(t) = f(t)$ pointwise in $t \in \mathbb{R}$, or

ii. if $\lim_{n\to\infty} \varphi_{P_n}(t) = f(t)$ pointwise in $t \in \mathbb{R}$ and uniformly in a neighborhood of $t = 0$,

then P_n converges to a Borel probability measure P, and $f = \varphi_P$.

A.8 Existence of density and its analytic properties from decay of characteristic function.

Here we focus on a sufficient condition for an exponential decay of a characteristic function, which implies existence of smooth density.

In the following, $\mathcal{U}$ denotes arbitrary set, not necessarily the one specified in the main sections. In particular, one may take $\mathcal{U} = \{1\}$ which results in the case of probability measures without parameters.

The next theorem says that positive variance implies that the absolute value of characteristic function is strictly less than 1 in a neighborhood of 0.

定理 26 *Let $\{P_u \mid u \in \mathcal{U}\}$ be a family of Borel probability measures supported on non-negative reals, and for each $u \in \mathcal{U}$, let*

$$G_u(s) = \int_{[0,\infty)} e^{-s\xi} P_u(d\xi),$$

be its generating function, defined (according to 命題 33) on $\mathbf{Re(s)} \geqq \mathbf{0}$. Assume the following properties.

(i) There exists a positive constant C such that

$$\sup_{u\in\mathcal{U}} G_u(-C) = \sup_{u\in\mathcal{U}} \int_0^\infty e^{C\xi} P_u(d\xi) < \infty.$$

(ii) The variances v_u, $u \in \mathcal{U}$ satisfy $v_- = \inf_{u\in\mathcal{U}} v_u > 0$.

Then there exists $a > 0$ (independent of $u \in \mathcal{U}$) such that the characteristic functions φ_u, $u \in \mathcal{U}$, satisfy

$$|\varphi_u(t)| < 1, \quad 0 < |t| \leqq a, \ u \in \mathcal{U}.$$

As an explicit choice of a, one may take

$$a = \sqrt{\frac{2}{v_+}} \wedge \frac{\epsilon}{K + m_+},$$

where $m_+ = \sup_{u\in\mathcal{U}} m_u$ and $v_+ = \sup_{u\in\mathcal{U}} v_u$ are the superemums of the mean m_u and variance v_u of P_u, $u \in \mathcal{U}$, and K is a number such that

$$\int_{|\xi|\geqq K} (\xi - m_u)^2 P_u(d\xi) \leqq \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}, \quad u \in \mathcal{U},$$

where

$$\epsilon = 2 \wedge \frac{v_-}{2(1 + \sqrt{2}v_-)} \ (> 0).$$

(It holds that m_+, v_+, and K exist (are finite), hence a chosen as above is positive.)

For the case without parameters, i.e, for $\mathcal{U} = \{1\}$, the theorem reads as follows (with weaker assumptions; actually, the original theorem assumed more than necessary to simplify the statement).

系 27 *If a Borel probability measure on reals P has finite expectation $m = \int \xi P(d\xi)$ and non-zero variance $v = \int (\xi - m)^2 P(d\xi)$, then there exists $a > 0$ such that the characteristic function φ_P satisfies $|\varphi_P(t)| < 1$, $0 < |t| \leqq a$.*

As an explicit choice of constants, one may take $m_+ = m_u = m$ and $v_+ = v_- = v$ in 定理 26

証明. Note first that 命題 34 implies that m_+ and v_+ are finite.

Using Taylor's Theorem for real valued functions, we see that there exist functions $\theta_{u,1,t}:\ \mathbb{R}\to(0,1)$ and $\theta_{u,2,t}:\ \mathbb{R}\to(0,1)$ such that

$$\begin{aligned}
&e^{-\sqrt{-1}m_u t}\varphi_u(t)-1+\frac{1}{2}v_u t^2\\
&=\int[\cos((\xi-m_u)t)-1+\frac{1}{2}t^2(\xi-m_u)^2+\sqrt{-1}(\sin((\xi-m_u)t)-t(\xi-m_u))]P_u(d\xi)\\
&=\frac{t^2}{2}\int[(\xi-m_u)^2(1-\cos(\theta_{u,1,t}(\xi)\,(\xi-m_u)t)-\sqrt{-1}\sin(\theta_{u,2,t}(\xi)\,(\xi-m_u)t))]P_u(d\xi).
\end{aligned}$$

Therefore

$$\begin{aligned}
&|\varphi_u(t)|-|1-\frac{1}{2}v_u t^2|\leqq|e^{-\sqrt{-1}m_u t}\varphi_u(t)-1+\frac{1}{2}v_u t^2|\\
&\leqq\frac{1}{2}t^2\int(\xi-m_u)^2\sqrt{(1-\cos(\theta_{u,1,t}(\xi)\,(\xi-m_u)t))^2+(\sin(\theta_{u,2,t}(\xi)\,(\xi-m_u)t))^2}P_u(d\xi)\\
&\leqq\frac{1}{2}t^2\left(\sqrt{2}\int_{|\xi|\geqq K}(\xi-m_u)^2P_u(d\xi)\right.\\
&\qquad\left.+\int_{|\xi|<K}(\xi-m_u)^2\sqrt{(1-\cos(\theta_{u,1,t}(\xi)\,(\xi-m_u)t))^2+(\sin(\theta_{u,2,t}(\xi)\,(\xi-m_u)t))^2}P_u(d\xi)\right),
\end{aligned}$$

for any $K>0$.

Let $\epsilon>0$. 命題 34 implies that there exists $K>0$ (independent of u) such that

$$\sqrt{2}\int_{|\xi|\geqq K}(\xi-m_u)^2P_u(d\xi)<\epsilon,\quad u\in\mathcal{U}.$$

(For the case $\mathcal{U}=\{1\}$, this is implied by existence of variance, hence 命題 34 is unnecessary.) Put $t_0=\dfrac{\epsilon}{K+m_+}$ (>0). Note that this is independent of u. Then noting that

$$|\theta_{u,j,t}(\xi)\,(\xi-m_u)t|\leqq\epsilon,\quad|\xi|\leqq K,\ |t|\leqq t_0,\ j=1,2,$$

we have

$$\begin{aligned}
&\int_{|\xi|<K}(\xi-m_u)^2\sqrt{(1-\cos(\theta_{u,1,t}(\xi)\,(\xi-m_u)t))^2+(\sin(\theta_{u,2,t}(\xi)\,(\xi-m_u)t))^2}P_u(d\xi)\\
&\leqq\epsilon\sqrt{1+\frac{1}{4}\epsilon^2}\int_{|\xi|<K}(\xi-m_u)^2P_u(d\xi)\leqq\epsilon\sqrt{1+\frac{1}{4}\epsilon^2}v_+,\quad u\in\mathcal{U}.
\end{aligned}$$

Combining all the estimates,

$$|\varphi_u(t)|-|1-\frac{1}{2}v_u t^2|\leqq\frac{1}{2}\epsilon t^2\left(1+v_+\sqrt{1+\frac{1}{4}\epsilon^2}\right),\ |t|\leqq t_0\,,\quad u\in\mathcal{U}.$$

Taking $\epsilon>0$ small enough so that

$$\epsilon\left(1+v_u\sqrt{1+\frac{1}{4}\epsilon^2}\right)<v_u\,,\quad u\in\mathcal{U},\tag{63}$$

we have

$$|\varphi_u(t)|<1,\quad u\in\mathcal{U},\ 0<|t|\leqq t_0\wedge\sqrt{\frac{2}{v_+}}\,.$$

If, for example, we take

$$\epsilon=2\wedge\frac{v_-}{2(1+\sqrt{2}v_-)}\ (>0)\,,$$

then (63) holds, because,

$$\epsilon\left(1+v_u\sqrt{1+\frac{1}{4}\epsilon^2}\right)\leqq\epsilon\left(1+\sqrt{2}v_u\right)\leqq\frac{v_u}{2}<v_u,$$

so that we can adopt this value. This leads to the explicit value of a in the statement. □

Let P be a Borel probability measure on reals, and let $\varphi_P(t) = \displaystyle\int e^{\sqrt{-1}\xi t} P(d\xi)$, $t \in \mathbb{R}$, be its characteristic function.

定理 28 *Assume the following.*

(i) P has finite expectation m and non-zero variance v.

(ii) φ_P satisfies $|\varphi_P(\lambda t)| \leqq |\varphi_P(t)|^b$, $t \in \mathbb{R}$, for constants $\lambda > 1$ and $b > 1$.

Then the following hold.

(i) There exists $C_1 > 0$ and $C_2 > 0$ such that

$$|\varphi_P(t)| \leqq C_2 e^{-C_1 |t|^{\nu}}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{64}$$

where $\nu = \dfrac{\log b}{\log \lambda}$ (> 0).

C_1 and C_2 can be chosen to be $C_2 = \dfrac{1}{|\varphi_P(t_1)|}$ and $C_1 = \left(\dfrac{\lambda}{a}\right)^{\nu} \log \dfrac{1}{|\varphi_P(t_1)|}$ for some $t_1 \in [a/\lambda, a]$, and

$$a = \sqrt{\frac{2}{v}} \wedge \frac{\epsilon}{K+m},$$

where

$$K = \inf\left\{ L > 0 \mid \int_{|\xi| \geqq L} (\xi - m)^2 P(d\xi) \leqq \frac{\epsilon}{\sqrt{2}} \right\},$$
$$\epsilon = 2 \wedge \frac{v}{2(1+\sqrt{2}v)}.$$

(ii) There exists a non-negative valued C^{∞} function ρ on $\mathbb{R}$ such that

(a) $P(d\xi) = \rho(\xi) d\xi$,

(b) $\displaystyle\lim_{|\xi| \to \infty} \rho(\xi) = 0$,

(c) ρ is supported on $[0, \infty)$.

定理 *28* の証明. (i) Since dominated convergence theorem implies that $\varphi_P(t)$ is continuous, 系 27 implies that there exists $a > 0$ and t_1 satisfying $a/\lambda \leqq |t_1| \leqq a$ such that

$$\sup_{a/\lambda \leqq |t| \leqq a} |\varphi_P(t)| = |\varphi_P(t_1)| < 1.$$

Put $\nu = \dfrac{\log b}{\log \lambda}$ (> 0), and $h(t) = -|t|^{-\nu} \log |\varphi_P(t)|$, $t \in \mathbb{R}$. Then the assumptions imply

$$h(\lambda t) \geqq h(t), \ t \in \mathbb{R}.$$

For $|t| \geqq \dfrac{a}{\lambda}$, let n be the integer satisfying $\dfrac{a}{\lambda} \leqq |t| \lambda^{-n} < a$. Then

$$h(t) \geqq h(\lambda^{-n} t) = -b^n |t|^{-\nu} \log |\varphi_P(\lambda^{-n} t)| \geqq -b^n |t|^{-\nu} \log |\varphi_P(t_1)| \geqq -\left(\frac{\lambda t}{a}\right)^{\nu} |t|^{-\nu} \log |\varphi_P(t_1)|.$$

Therefore

$$|\varphi_P(t)| \leqq e^{-C_1 |t|^{\nu}}, \quad |t| \geqq \frac{a}{\lambda},$$

with $C_1 = \left(\dfrac{\lambda}{a}\right)^{\nu} \log \dfrac{1}{|\varphi_P(t_1)|}$. For $|t| \leqq \dfrac{a}{\lambda}$, a trivial estimate $|\varphi_P(t)| \leqq 1$ is sufficient for the statement to hold.

(ii) Since (64) implies that φ_P is integrable,

$$\rho(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-\sqrt{-1} t\xi} \varphi_P(t)\, dt, \quad \xi \in \mathbb{R},$$

exists, bounded and continuous. Riemann-Lebesgue theorem also implies $\lim_{|\xi|\to\infty} \rho(\xi) = 0$. Fubini's theorem and dominated convergence theorem implies, for $a < b$,

$$\int_a^b \rho(\xi)\,d\xi = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\sqrt{-1}bt} - e^{-\sqrt{-1}at}}{-\sqrt{-1}t}\varphi_P(t)\,dt = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} \frac{e^{-\sqrt{-1}bt} - e^{-\sqrt{-1}at}}{-\sqrt{-1}t}\varphi_P(t)\,dt$$
$$= P((a,b)) + \frac{1}{2}(P(\{a\}) + P(\{b\})).$$

where we used Levi's inversion formula in the last line. Since the left hand side is continuous in a and b, we see that $P(\{a\}) = 0$, $a \in \mathbb{R}$, and $\rho(\xi)d\xi = P(d\xi)$. Since P is supported on $[0,\infty)$, so is ρ. The exponential decay of φ_P (64) also implies by induction in k, together with dominated convergence theorem, that

$$\frac{d^k\rho}{d\xi^k}(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} (-\sqrt{-1}t)^k e^{-\sqrt{-1}t\xi}\varphi_P(t)\,dt$$

exists and is finite, for all $k = 1, 2, 3, \cdots$.

□

With extra assumptions on continuity and some bounds on φ_u, the consequences of 定理 28 can be made uniform in u.

定理 29 *Let, as in 定理 26, $\{P_u \mid u \in \mathcal{U}\}$ be a family of Borel probability measures supported on non-negative reals, and assume the following.*

(i) The assumptions of 定理 28 hold for $P = P_u$ for each $u \in [0,1]$.

(ii) The variances v_u, $u \in \mathcal{U}$ satisfy $v_- = \inf_{u\in\mathcal{U}} v_u > 0$.

(iii) The consequence of 定理 26 holds; namely, there exists $a > 0$ (independent of $u \in \mathcal{U}$) such that the characteristic functions φ_u, $u \in \mathcal{U}$, satisfy

$$|\varphi_u(t)| < 1, \quad 0 < |t| \leqq a, \ u \in \mathcal{U}.$$

(iv) $\varphi_u(t)$ is continuous in $(u,t) \in [0,1] \times \mathbb{R}$.

Then the constants ν, C_1, C_2 in (64) can be chosen to be independent of $u \in [0,1]$.
In particular,

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}}\sup_{u\in[0,1]} \rho_u(\xi) < \infty.$$

証明. We proceed with our proof by reconsidering the proof of 定理 28 with extra attention on uniformity of bounds in u.

定理 26 and the continuity of $\varphi_u(t)$ in (u,t) implies that there exist $a > 0$ and t_1 and u_1, satisfying $a/\lambda_u \leqq |t_1| \leqq a$ and $0 \leqq t_1 \leqq 1$, such that

$$\sup_{a/\lambda_u \leqq |t| \leqq a,\ u\in[0,1]} |\varphi_u(t)| = |\varphi_{u_1}(t_1)| < 1\,.$$

Put $\rho = |\varphi_{u_1}(t_1)|$.

For each $u \in [0,1]$, put $\nu_u = \dfrac{\log 2}{\log \lambda_u}$ (> 0), and $h_u(t) = -|t|^{-\nu_u}\log|\varphi_u(t)|$, $t \in \mathbb{R}$. Then the assumptions imply

$$h_u(\lambda_u t) \geqq h_u(t), \ t \in \mathbb{R}.$$

For $|t| \geqq \dfrac{a}{\lambda_u}$, let n be the integer satisfying $\dfrac{a}{\lambda_u} \leqq |t|\lambda_u^{-n} < a$. Then

$$h_u(t) \geqq h_u(\lambda_u^{-n}t) = -2^n|t|^{-\nu_u}\log|\varphi_u(\lambda_u^{-n}t)| \geqq 2^n|t|^{-\nu_u}(-\log\rho) \geqq \left(\frac{\lambda_u t}{a}\right)^{\nu_u}|t|^{-\nu_u}\log\frac{1}{\rho}.$$

Therefore

$$|\varphi_u(t)| \leqq e^{-C_1|t|^{\nu_-}}, \quad |t| \geqq \frac{a}{\lambda_-}, \ u \in [0,1],$$

where $\nu_- = \inf_{u\in[0,1]} \nu_u$, $\lambda_- = \inf_{u\in[0,1]} \lambda_u$, and $C_1 = \left(\frac{\lambda_-}{a}\right)^{\nu_-} \log\frac{1}{\rho}$, are positive constants independent of u.

For $|t| \leqq \frac{a}{\lambda_-}$, a trivial estimate $|\varphi_u(t)| \leqq 1$ is sufficient for the statement to hold.

The claim $\sup_{\xi\in\mathbb{R}} \sup_{u\in[0,1]} \rho_u(\xi) < \infty$ is an easy consequence of the inversion formula

$$\rho_u(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-\sqrt{-1}\xi t}\varphi_u(t)\,dt$$

and the uniform estimate we have just proved. □

B Uniform weak convergence of probability measures on positive reals, which are defined by iteration.

[21]

B.1 Main results.

A notion of uniform weak convergence of probability measures on reals are defined, and an example is presented. The example is based on properties of (i) probability measures supported on non-negative reals, (ii) analytic properties of generating functions, and (ii) iterative definitions. Many of the results in the example are along the line of [45, §3]. Emphasis on uniformness of convergences with respect to a parameter is the main new ingredient.

B.1.1 Uniform convergence of a sequence of analytic functions defined by iteration.

Let λ_u, $u \in \mathcal{U}$, be real numbers indexed by a parameter set $\mathcal{U}$ with a property

$$\lambda_- = \inf_{u\in\mathcal{U}} \lambda_u > 1\,.$$

Let $g_{n,u}$ be complex valued functions of complex variables indexed by $n = 1, 2, 3, \cdots$ and $u \in \mathcal{U}$, satisfying the following:

(i) There exist positive constants C and M, such that for any $u \in \mathcal{U}$, $g_{1,u}(s)$ is regular on $|s| \leqq C$, and satisfies

$$|g_{1,u}(s) - s| \leqq M|s|^2, \quad |s| \leqq C. \tag{65}$$

(By a function being regular on a (not necessarily open) set, we imply that there exists an open set containing the original set such that the function is defined and regular on the open set. Estimate of a form (65) always exists for a function regular and vanishing at 0, but we are also interested in estimates uniform in $u \in \mathcal{U}$.)

(ii) For $u \in \mathcal{U}$ and $n = 1, 2, 3, \cdots$,

$$g_{n+1,u}(s) = g_{1,u}(\lambda_u g_{n,u}(s/\lambda_u)), \tag{66}$$

wherever the right hand side is defined and regular.

We prove that the above assumptions imply the following regularity estimates on $g_{n,u}$, uniform in n and u.

定理 30 *There exist positive constants C_∞ and M_∞ such that for any $u \in \mathcal{U}$ and any $n = 1, 2, 3, \cdots$, $g_{n,u}(s)$ is regular on $|s| \leqq C_\infty$, and satisfies*

$$|g_{n,u}(s) - s| \leqq M_\infty|s|^2, \quad |s| \leqq C_\infty. \tag{67}$$

定理 30 implies that the family of regular functions

$$\{g_{n,u} \mid n = 1, 2, 3, \cdots,\ u \in \mathcal{U}\}$$

is normal on $|s| < C_\infty$. This is due to the following.

[21] regular.tex, ver. 20010110.

定理 31 **([9, §XI.3, Theorem XI.3])** *A family of uniformly bounded regular functions on a domain is normal. Namely, for any sequence of functions in the family, there exists a subsequence which is uniformly converging (to a regular function on the domain) on every compact sets.*

The defining recursion (66) furthermore implies the following.

定理 32 *(i) Assume that $\{g_{n,u}\}$ satisfies the assumptions given in the beginning of §B.1.1. Then for each $u \in \mathcal{U}$, $g_{n,u}$, $n = 1, 2, 3, \cdots$, uniformly converges on every compact sets in $|s| < C_\infty$ to a regular function g^*_u on $|s| < C_\infty$. g^*_u satisfies*

$$g^*_u(s) = g_{1,u}(\lambda_u g^*_u(s/\lambda_u)), \quad |s| < C_\infty, \tag{68}$$

and

$$|g^*_u(s) - s| \leqq M_\infty |s|^2, \quad |s| < C_\infty, \tag{69}$$

for some positive constants C_∞ and M_∞.

(ii) The two equations (68) and (69) uniquely determine g^*_u. Namely, if there is a regular function h on $|s| < C_\infty$ which satisfies (68) and (69) (with h in place of g^*_u), then $h = g^*_u$.

B.1.2 Weak convergence of a sequence of probability measures on non-negative reals defined by iteration.

Let P be a Borel probability measure supported on non-negative reals $[0, \infty)$, and define its generating function by

$$G(s) = \int_{[0,\infty)} e^{-s\xi} P(d\xi). \tag{70}$$

In general, for a Borel probability measure on reals, (70) is defined when s is pure imaginary (characteristic function), but as P is supported on non-negative reals, G has a wider domain.

命題 33 *$G(s)$ is defined on complex s satisfying $\mathbf{Re(s)} \geqq \mathbf{0}$, analytic on $\mathbf{Re(s)} > \mathbf{0}$ and continuous on $\mathbf{Re(s)} \geqq \mathbf{0}$.*

証明. Assume that $\mathbf{Re(s)} \geqq \mathbf{0}$. Since P is supported on $[0, \infty)$, $|e^{-s\xi}| \leqq 1$, $P(d\xi)$–a.s.. Hence $|G(s)| \leqq 1$. Therefore $G(s)$ exists, and dominated convergence theorem implies continuity with respect to s:

$$\lim_{s \to s_0} G(s) = G(s_0), \quad \text{if } \mathbf{Re(s)} \geqq \mathbf{0} \text{ and } \mathbf{Re(s_0)} \geqq \mathbf{0}.$$

Also if $\mathbf{Re(s)} > \mathbf{0}$, then

$$\frac{\partial e^{-s\xi}}{\partial \mathbf{Re(s)}} = -\xi e^{-s\xi}, \quad \frac{\partial e^{-s\xi}}{\partial \mathbf{Im}(s)} = -i\xi e^{-s\xi},$$

is bounded uniformly in $\xi \geqq 0$, hence dominated convergence theorem implies that $\dfrac{\partial G(s)}{\partial \mathbf{Re(s)}}$ and $\dfrac{\partial G(s)}{\partial \mathbf{Im}(s)}$ exist on $\mathbf{Re(s)} > \mathbf{0}$. Obviously Cauchy-Riemann equations hold, implying regularity of G on $\mathbf{Re(s)} > \mathbf{0}$. □

For later applications, We note a basic implication of regularity of genrating function at 0.

命題 34 *Let $\{P_u \mid u \in \mathcal{U}\}$ be a family of Borel probability measures supported on non-negative reals indexed by an arbitrary set $\mathcal{U}$, and for each $u \in \mathcal{U}$, let*

$$G_u(s) = \int_{[0,\infty)} e^{-s\xi} P_u(d\xi),$$

be its generating function, defined (according to 命題 33) on $\mathbf{Re(s)} \geqq \mathbf{0}$. If there exists a positive constant C such that

$$\sup_{u \in \mathcal{U}} G_u(-C) = \sup_{u \in \mathcal{U}} \int_0^\infty e^{C\xi} P_u(d\xi) < \infty,$$

then the family of Borel probability measures $\{P_{n,u} \mid u \in \mathcal{U}\}$ is tight, and all the moments are uniformly bounded, and uniformly integrable. Namely, for each $p \geqq 0$,

$$\sup_{u \in \mathcal{U}} \int_0^\infty \xi^p P_u(d\xi) < \infty, \quad \lim_{K \to \infty} \sup_{u \in \mathcal{U}} \int_K^\infty \xi^p P_u(d\xi) = 0.$$

証明. For each $p \geqq 0$ there exists $\xi_p > 0$ such that if $\xi \geqq \xi_p$ then $e^{C\xi} \geqq \xi^p$. Hence

$$\sup_{u\in\mathcal{U}} \int_0^\infty \xi^p P_u(d\xi) \leqq \sup_{u\in\mathcal{U}} \int_0^\infty e^{C\xi}\ P_u(d\xi) + \xi_p^p < \infty.$$

Next, put

$$M = \sup_{u\in\mathcal{U}} \int_0^\infty \xi^{p+1} P_u(d\xi) \ \ (< \infty).$$

Note that if $K > 0$, then

$$\sup_{u\in\mathcal{U}} \int_{\xi\geqq K} \xi^p P_u(d\xi) \leqq \frac{1}{K} \sup_{u\in\mathcal{U}} \int_{\xi\geqq K} \xi^{p+1} P_u(d\xi) \leqq \frac{M}{K}\,.$$

Hence

$$\lim_{K\to\infty} \sup_{u\in\mathcal{U}} \int_K^\infty \xi^p P_u(d\xi) = 0.$$

□

注 10 *An alternative proof of tightness.*

Put

$$M = \sup_{u\in\mathcal{U}} \int_0^\infty e^{C\xi} P_u(d\xi),$$

and for $\epsilon > 0$ define a constant independent of u by $K = \dfrac{1}{C}\log\dfrac{M-1+\epsilon}{\epsilon}$. If $\xi = 0$, $P_u(d\xi)$–a.s., for all $u \in \mathcal{U}$, then the claim trivially holds. Otherwise $M > 1$, hence $K > 0$. Then, since P_u is supported on non-negative reals,

$$M - 1 \geqq \int_K^\infty (e^{C\xi} - 1) P_u(d\xi) = (e^{KC} - 1) P_u((K,\infty)) = \frac{M-1}{\epsilon} P_u((K,\infty)),$$

which implies $P_u((K,\infty)) \leqq \epsilon$ for all $u \in \mathcal{U}$. □

In the following, we will use several basic facts related to weak convergence of probability measures, which we summarize in §A.7.

We also note an elementary property.

命題 35 *Let P_n, $n = 1,2,3,\cdots$, be a sequence of Borel probability measures on reals, and assume that it converges weakly to a probability measure P^*. If P_n is supported on non-negative reals for all n, then P^* is also supported on non-negative reals.*

注 11 *The proof below obviously holds also when the index n is a continuous parameter. It also holds (with a standard generalization) when the space in consideration is any topological space and the probability measures are supported on any closed subset.* ◇

証明. Weak convergence implies

$$P^*((-\infty,0)) \leqq \varliminf_{k\to\infty} P_{n_k,u}((-\infty,0)) = 0,$$

which implies that P_u^* is supported on non-negative reals. □

We are interested in the case where §B.1.1 is applicable.

定理 36 *For $n = 1,2,3,\cdots$, let P_n be a Borel probability measure supported on non-negative reals $[0,\infty)$, and let G_n be its generating function*

$$G_n(s) = \int_0^\infty e^{-s\xi} P_n(d\xi),$$

defined, according to 命題 33, on $\mathbf{Re(s)} \geqq \mathbf{0}$. Assume that there exists $C > 0$ such that G_n, $n = 1,2,3,\cdots$, are regular functions on $|s| < C$, and also assume that there exists a regular function G^* on $|s| < C$ such that

$$\lim_{n\to\infty} G_n(s) = G^*(s), \quad |s| < C\,, \tag{71}$$

pointwise.

Then P_n converges weakly to a Borel probability measure supported on non-negative reals, whose generating function is defined both on $\mathbf{Re(s)} \geqq \mathbf{0}$ and $|s| < C$, and is equal to G^* on $|s| < C$.

Furthermore, if we denote the analytic continuation of G^* to $\mathbf{Re(s)} \geqq \mathbf{0}$ also by G^*, then $G_n(s)$ converges to $G^*(s)$ uniformly on compact sets in $\{s \in \mathbb{C} \mid \mathbf{Re(s)} \geqq \mathbf{0}\}$.

B.1.3 Uniform weak convergence.

The estimates given by 定理 30 is uniform in $u \in \mathcal{U}$. This implies further uniformity results in u, when $\mathcal{U}$ is a topological space. In this section we focus on uniformity in u.

To be specific, let $\mathcal{U}$ be a complex neghborhood of a finite closed interval on reals, say $[0,1]$, in the following.

First we introduce a new notion of uniform weak convergence. Let $P_{n,u}$, $n \in \mathbb{N}$, $u \in [0,1]$, be a family of Borel probability measures on reals. We say that $P_{n,u}$ converges weakly as $n \to \infty$ to a Borel probability measure P_u^* **uniformly in** $u \in [0,1]$, if

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{u\in[0,1]} |P_{u,n}(A) - P_u^*(A)| = 0, \tag{72}$$

for all Borel set A, satisfying $P_u^*(\partial A) = 0$, $u \in [0,1]$.

The following theorem gives a sufficient condition for a family of measures to converge uniformly, of which we will give an application in the later sections.

定理 37 *Let $\phi_{u,n}$, $n = 1,2,3,\cdots$, ϕ_u^*, $u \in [0,1]$, be the characteristic functions of $P_{u,n}$, $n = 1,2,3,\cdots$, P_u^*, $u \in [0,1]$, and assume that the following hold.*

(i) For each t, $\phi_{u,n}(t)$ converges as $n \to \infty$ uniformly in u to $\phi_u^*(t)$:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{u\in[0,1]} |\phi_{u,n}(t) - \phi_{u,*}(t)| = 0, \quad t \in \mathbb{R},$$

(ii) For each n and t, $\phi_{u,n}(t)$ is continuous in u:

$$\lim_{u'\to u} |\phi_{u',n}(t) - \phi_{u,n}(t)| = 0, \quad t \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N},$$

(iii) $\{P_u^* \mid u \in [0,1]\}$ is tight:

$$\lim_{K\to\infty} \sup_{u\in[0,1]} P_u^*([-K,K]^c) = 0,$$

(iv) P_u^*, $u \in [0,1]$, has density functions ρ_u, $u \in [0,1]$, which are uniformly bounded:

$$P_u^*(dx) = \rho_u(x)dx, \qquad \sup_{x\in\mathbb{R},\ u\in[0,1]} \rho_u(x) < \infty.$$

Then $P_{n,u}$ converges weakly as $n \to \infty$ to P_u^* uniformly in $u \in [0,1]$.

We are interested in the case where the results in §B.1.1 are applicable to deduce uniformity in u.

定理 38 *Assume, as in 定理 32, that for each $u \in \mathcal{U}$ $\{g_{n,u}\}$ satisfies the assumptions given in the beginning of §B.1.1. Assume furthermore, that $g_{1,u}(s)$ is regular in $u \in \mathcal{U}$ for each s.*

Then, in addition to all the consequences in 定理 32, the convergence of $g_{n,u}(s)$ to $g_u^*(s)$ is uniform in $(s,u) \in K \times [0,1]$ for any compact set $K \subset \{s \in \mathbb{C} \mid |s| < C_\infty\}$.

定理 32 and 定理 38 can be rewritten in exponentiated form.

系 39 *Let λ_u, $u \in \mathcal{U}$, be real numbers satisfying*

$$\lambda_- = \inf_{u\in\mathcal{U}} \lambda_u > 1\,. \tag{73}$$

Let $G_{n,u}$ be complex valued functions of complex variables, indexed by $n = 1,2,3,\cdots$ and $u \in \mathcal{U}$, satisfying the following.

(i) $G_{1,u}(0) = 1$ and $G'_{1,u}(0) = -1$, $u \in \mathcal{U}$.

(ii) There exists $C_0 > 0$ such that for any $u \in \mathcal{U}$, $G_{1,u}(s)$ is regular on $|s| \leqq C_0$, and

$$\sup_{|s|\leqq C_0,\ u\in\mathcal{U}} |G_{1,u}(s) - 1| < 1\,. \tag{74}$$

(iii) *For $u \in \mathcal{U}$ and $n = 1, 2, 3, \cdots$,*

$$G_{n+1,u}(s) = G_{1,u}(-\lambda_u \log G_{n,u}(s/\lambda_u)), \tag{75}$$

wherever the right hand side is defined and regular.

(iv) *$G_{1,u}(s)$ is regular in $u \in \mathcal{U}$ for each s,*

Then there exists $C_\infty > 0$ such that for each $u \in \mathcal{U}$,

$$\lim_{n\to\infty} G_{n,u}(s) = G_u^*(s),$$

uniformly in $(s,u) \in K \times [0,1]$ for any compact set $K \subset \{s \in \mathbb{C} \mid |s| < C_\infty\}$, where G_u^* is a regular function on $|s| < C_\infty$ satisfying the defining equations ${G_u^*}'(0) = -1$ and

$$G_u^*(s) = G_{1,u}(-\lambda_u \log G_u^*(s/\lambda_u)). \tag{76}$$

$G_{n,u}$ and G_u^* satisfy

$$\begin{aligned} &|-\log G_{n,u}(s) - s| \leqq M_\infty |s|^2, \quad |s| \leqq C_\infty\,, \ n = 1, 2, 3, \cdots, \ u \in \mathcal{U}, \\ &|-\log G_u^*(s) - s| \leqq M_\infty |s|^2, \quad |s| < C_\infty\,, \ u \in \mathcal{U}, \end{aligned}$$

for some positive constant M_∞, and

$$\begin{aligned} &|G_{n,u}(s) - 1 + s| \leqq M' |s|^2, \quad |s| \leqq C'\,, \ n = 1, 2, 3, \cdots, \ u \in \mathcal{U}, \\ &|G_u^*(s) - 1 + s| \leqq M' |s|^2, \quad |s| \leqq C'\,, \ u \in \mathcal{U}, \end{aligned}$$

for some $C' > 0$ and $M' > 0$.

定理 40 *For $n = 1, 2, 3, \cdots$ and $u \in \mathcal{U}$, let $P_{n,u}$ be a Borel probability measure supported on non-negative reals $[0, \infty)$, and let $G_{n,u}$ be its generating function*

$$G_{n,u}(s) = \int_0^\infty e^{-s\xi} P_{n,u}(d\xi). \tag{77}$$

Assume that all the assumptions in 系 39 hold for $G_{n,u}$ and λ_u, $u \in \mathcal{U}$.

Then, (75) holds also on $\mathbf{Re}(\mathbf{s}) \geqq \mathbf{0}$, and for each $u \in \mathcal{U}$, $P_{n,u}$ converges weakly as $n \to \infty$ to a Borel probability measure P_u^*, supported on non-negative reals, whose generating function $G_u^*(s)$ is defined and satisfies (76) both on $\mathbf{Re}(\mathbf{s}) \geqq \mathbf{0}$ and in a neighborhood of 0, say $|s| < C_\infty$. ${G_u^*}'(0) = -1$ and (76) uniquely determines G_u^*.

$G_{n,u}$ and G_u^* satisfy

$$\begin{aligned} &|-\log G_{n,u}(s) - s| \leqq M_\infty |s|^2, \quad |s| \leqq C_\infty\,, \ u \in \mathcal{U}, \\ &|-\log G_u^*(s) - s| \leqq M_\infty |s|^2, \quad |s| < C_\infty\,, \ u \in \mathcal{U}, \end{aligned}$$

for some positive constant M_∞, and

$$|G_{n,u}(s) - 1 + s| \leqq M' |s|^2, \quad |s| \leqq C'\,, \ n = 1, 2, 3, \cdots, \ u \in \mathcal{U}, \tag{78}$$

and a similar uniform estimate for G_u^*, for some $C' > 0$ and $M' > 0$. In particular, the family of measures $\{P_u^* \mid u \in \mathcal{U}\} \cup \{P_{n,u} \mid u \in \mathcal{U},\ n \in \mathbb{N}\}$ is tight.

Also,

$$\lim_{n\to\infty} G_{n,u}(s) = G_u^*(s),$$

(i) *uniformly in $(s,u) \in K \times [0,1]$ for any compact set $K \subset \{s \in \mathbb{C} \mid |s| < C_\infty\}$,*

(ii) *uniformly on compact sets in $\mathbf{Re}(\mathbf{s}) \geqq \mathbf{0}$, for each $u \in \mathcal{U}$,*

(iii) *with additional assumption $\sup_{u\in[0,1]} \lambda_u < \infty$, uniformly in $u \in [0,1]$, for each s satisfying $\mathbf{Re}(\mathbf{s}) \geqq \mathbf{0}$.*

If $\lim_{u\to u_0} G_{1,u}(s) = G_{1,u_0}(s)$ uniformly on $|s| \leqq C_0$ for a $u_0 \in \mathcal{U}$, and $\lim_{u\to u_0} \lambda_u = \lambda_{u_0}$, then $P_u^* \to P_{u_0}^*$ weakly as $u \to u_0$. In particular, the characteristic function $\varphi_u^*(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{\sqrt{-1}\xi t} P_u^*(d\xi)$ satisfies $\lim_{u\to u_0} \varphi_u^*(t) = \varphi_{u_0}^*(t)$, for each $t \in \mathbb{R}$.

注 12 *(i) Note that* $G'_{n,u}(0) = -\int_{[0,\infty)} \xi P_{n,u}(d\xi)$, *hence for a Borel probability measure with finite non-zero mean* m, $G'_{n,u}(0) = -1$ *is possible by scale transformation, i.e., by defining* $P_{n,u}$ *as an image measure of* $\xi \to \xi/m$. *Thus the assumption* $G'_{1,u}(0) = -1$ *is not an essential restriction.*

(ii) We stated uniformity in u *of the convergene of* $G_{n,u}(s)$ *for* ***each*** s *satisfying* $\mathbf{Re(s)} \geqq \mathbf{0}$ *(with additional assumption). It may be possible that we may also have uniformity in* (u, s) *on compact sets on* $\mathbf{Re(s)} \geqq \mathbf{0}$, *similarly as we stated for* $|s| < C_\infty$. *This is left open.*

◇

B.1.4 Canonical ensemble defined by iteration.

We now give a situation where all the assumptions in the previous theorems hold, with additional properties of exponential decays of characteristic functions and the existence of smooth densities, for which we summarize some basic facts in §A.8.

Let $\mathcal{U}$ be a bounded open complex neighborhood of closed interval on reals, say $[0, 1]$, and for each $u \in \mathcal{U}$ let $\Phi_{1,u}$ be a regular function defined by power series:

$$\Phi_{1,u}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{k,u} z^k, \tag{79}$$

with following properties among the coefficients:

(i) $c_{k,u} \geqq 0$, $k = 1, 2, 3, \cdots$,

(ii) $c_{0,u} = c_{1,u} = 0$,

(iii) $\inf_{u \in \mathcal{U}} c_{2,u} > 0$,

(iv) There exists $k > 2$ such that $\inf_{u \in \mathcal{U}} c_{k,u} > 0$,

(v) The radius of convergence r_u of (79) is uniformly positive in u; $\inf_{u \in \mathcal{U}} r_u > 0$.

(vi) r_u is continuous in $u \in \bar{\mathcal{U}}$, $\Phi_{1,u}(z)$ is continuous on $\{(u, z) \in \bar{\mathcal{U}} \times \mathbb{C} \mid |z| < r_u\}$, where $\bar{\mathcal{U}}$ is the closure of $\mathcal{U}$, and $\Phi'_{1,u}(x)$ is continuous on $\{(u, x) \in \mathcal{U} \times \mathbb{R} \mid 0 < x < r_u\}$.

(Polynomial is not excluded for $\Phi_{1,u}$. $r_u = \infty$ is also allowed.)

注 13 *(i) Uniform positivity of* $c_{2,u}$ *and* $c_{k,u}$ *are used only to prove uniform positivity of variance of characteristic functions in 定理 45, which in turn is used to prove that their density functions are bounded uniformly in* u.

(ii) Continuity of $\Phi_{1,u}(z)$ *on* (u, z) *with* $u \in \bar{\mathcal{U}}$ *is used in the proof of 定理 43 to prove (74). To prove continuity in* u *of* $x_{c,u}$ *and* λ_u *in 命題 41, continuity in* $u \in \mathcal{U}$ *and real* z *suffices.*

◇

Note the following simple properties.

命題 41 *For each* $u \in \mathcal{U}$ *the following holds.*

(i) $|\Phi_{1,u}(z)| \leqq \Phi_{1,u}(|z|)$, $|z| < r_u$.

(ii) For each $u \in \mathcal{U}$ *there exists a unique positive real* $x_{c,u} < r_u$ *such that*

$$\Phi_{1,u}(x_{c,u}) = x_{c,u} \, . \tag{80}$$

(iii) $\lambda_u = \Phi'_{1,u}(x_{c,u}) \geqq 2$, $u \in \mathcal{U}$.

(iv) $x_{c,u}$ *and* λ_u *are continuous in* $u \in \mathcal{U}$.

証明. The first claim is obvious from the definition.

It also obviously holds that $\Phi_{1,u}(0) = \Phi'_{1,u}(0) = 0$, $\inf_{x \geqq 0} \Phi''_{1,u}(x) = \Phi''_{1,u}(0) = c_{2,u} > 0$. Therefore $\Phi'_{1,u}(x) - 1$ is increasing in $x \geqq 0$, negative at $x = 0$ and diverges to $+\infty$ as $x \to r_u$. Existence and uniqueness of fixed point follows.

Since the terms in (79) are degree 2 or higher, we have

$$\Phi'_{1,u}(x) \geqq \frac{2}{x}\Phi_{1,u}(x), \quad 0 \leqq x \leqq r_u .$$

Therefore $\lambda_u \geqq 2\dfrac{\Phi_{1,u}(x_{c,u})}{x_{c,u}} = 2$.

Note that continuity of $\Phi_{1,u}(x)$ in $\{(u,x) \in \mathcal{U} \times \mathbb{R} \mid 0 < x < r_u\}$ and $\lambda_u = \Phi'_{1,u}(x_{c,u}) \geqq 2$ imply that $x_{c,u}$ is continuous in u. In fact, if not, then there exists $u_0 \in \mathcal{U}$, a sequence $u'_n \in \mathcal{U}$, $n = 1, 2, 3, \cdots$, $y \in [0, r_{u_0}]$ such that $\lim_{n\to\infty} u'_n = u_0$, $\lim_{n\to\infty} x_{c,u'_n} = y \neq x_{c,u_0}$. Continuity of $\Phi_{1,u}(x)$ then implies, by letting $n \to \infty$ in $\Phi_{1,u'_n}(x_{c,u'_n}) = x_{c,u'_n}$, $\Phi_{1,u_0}(y) = y$, which contradicts $\Phi_{1,u_0}(x_{c,u_0}) = x_{c,u_0}$, $x_{c,u_0} \neq y$, and uniqueness of the fixed point.

Since $x_{c,u}$ is continuous in u and, by assumption, $\Phi'_{1,u}(x)$ is continuous in (u,x), $\lambda_u = \Phi'_{1,u}(x_{c,u})$ is also continuous in u.

□

Let $\Phi_{n,u}$, $n = 1, 2, 3, \cdots$, be a series of functions defined inductively by

$$\Phi_{n+1,u}(z) = \Phi_{1,u}(\Phi_{n,u}(z)), \quad n = 1, 2, 3, \cdots, \tag{81}$$

wherever the right hand side is defined and regular. There are many nice estimates [33, 37, 34] on asymptotics of $\Phi_{n,u}$, among which we note the following.

定理 42 *For each $u \in \mathcal{U}$ the following holds.*

(i) For each $n = 1, 2, 3, \cdots$, $\Phi_{n,u}(x_{c,u}) = x_{c,u}$ and $\Phi'_{n,u}(x_{c,u}) = \lambda_u^n$.

(ii) If $0 \leqq x < x_{c,u}$, then

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_{n,u}(x) = 0 . \tag{82}$$

(iii) If $0 \leqq x < x_{c,u}$, then

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, 2^{-n} \log \Phi_n(x) < 0 . \tag{83}$$

注 14 *The last claim (83) is used in (87).* ◇

Put

$$G_{n,u}(s) = \frac{1}{x_{c,u}} \Phi_{n,u}(e^{-\lambda_u^{-n} s} x_{c,u}), \quad n = 1, 2, 3, \cdots, \ u \in \mathcal{U}, \tag{84}$$

whenever the right hand side is defined and regular in s.

定理 43 *The following holds.*

(i) Each $G_{n,u}$ is a generating function of a Borel probability measure supported on non-negative reals $[0, \infty)$. Namely, there exists a Borel probability measure $P_{n,u}$ supported on $\{k\lambda_u^{-n} \mid k = 0, 1, 2, \cdots\} \subset [0, \infty)$ such that (77) holds.

(ii) $G_{n,u}$ satisfies all the assumptions in 定理 40 (except those assumed in the last half of 定理 40 as additional assumptions), with λ_u defined in 命題 41.

In particular, all the results in 定理 40 that are derived without additional assumptions hold.

(iii) Put $\varphi_u^*(t) = G_u^*(-\sqrt{-1}t)$, $t \in \mathbb{R}$, where G_u^* is that given in the consequences of 定理 40. Then P_u^* (also given by 定理 40) and φ_u^* satisfy all the assumptions in 定理 28 with $P = P_u^*$ and $\varphi_P = \varphi_u^*$, and $b = 2$, $\lambda = \lambda_u$.

In particular, all the corresponding results in 定理 28 hold. Namely,

(a) *There exists* $C_{1,u} > 0$ *and* $C_{2,u} > 0$ *such that*

$$|\varphi_u^*(t)| \leqq C_{2,u} e^{-C_{1,u}|t|^{\nu_u}}, \quad t \in \mathbb{R}\,, \tag{85}$$

where $\nu_u = \dfrac{\log 2}{\log \lambda_u}$.

(b) *There exists a non-negative valued* C^∞ *function* ρ_u *on* $\mathbb{R}$ *such that* $P_u^*(d\xi) = \rho_u(\xi)d\xi$ *and* ρ_u *is supported on* $[0, \infty)$.

To obtain uniform bound of density ρ_u , we need uniform lower bound of variance. Note that $m_u = \int \xi P_u^*(d\xi) = 1$.

命題 44 *The variance* v_u *of* P_u^* *, defined by* $v_u = \int (\xi - 1)^2 P_u^*(d\xi) = 1$, *is uniformly positive;* $\inf\limits_{u\in[0,1]} v_u > 0$.

証明. Note that

$$\varphi_u^*(\lambda_u t) = \frac{1}{x_{c,u}} \Phi_{1,u}(\varphi_u^*(t) x_{c,u}). \tag{86}$$

By differentiating (86) twice, putting $t = 0$, and using ${\varphi_u^*}'(0) = \sqrt{-1}m_u = \sqrt{-1}$, and $\Phi_{1,u}'(x_{c,u}) = \lambda_u$, we have

$$v_u \lambda_u (\lambda_u - 1) = x_{c,u} \Phi_{1,u}''(x_{c,u}) - \lambda_u(\lambda_u - 1).$$

Using (79), and noting

$$x_{c,u} = \Phi_{1,u}(x_{c,u}) = \sum_{k=0}^\infty c_{k,u} x_{c,u}^k,$$

and

$$\lambda_u = \Phi_{1,u}'(x_{c,u}) = \sum_{k=0}^\infty k c_{k,u} x_{c,u}^{k-1},$$

we further have

$$v_u \lambda_u (\lambda_u - 1) = \frac{1}{2} \sum_{n,m \geqq 0} (n-m)^2 c_{n,u} c_{m,u} x_{c,u}^{n+m-2}.$$

By assumption, there exists $k > 2$ such that $\inf\limits_{u\in[0,1]} c_{k,u} > 0$, hence

$$\inf_{u\in[0,1]} v_u \geqq \frac{1}{(k-2)^2 \sup\limits_{u\in[0,1]} \lambda_u (\sup\limits_{u\in[0,1]} \lambda_u - 1)} \inf_{u\in[0,1]} (c_{2,u} c_{k,u} x_{c,u}^k) > 0.$$

($\inf_{u\in[0,1]} x_{c,u} > 0$ holds because $x_{c,u}$ is continuous in u.)

□

注 15 *The proof relates scaling limit to statistical expectations. In other words, the proof shows that (86) implies that the expectations with respect to* P_u^* *can be rewritten as the expectations with respect to another probability measure on non-negative integers, which is formally directly seen from the original setting (79) and (84).* ◇

定理 45 (i) *There exists* $C > 0$ *such that*

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}} e^{C\xi} \rho_u(\xi) < \infty, \quad u \in \mathcal{U}.$$

(C can be chosen to be independent of u*, i.e., we have uniform decay of* $\rho(\xi)$ *as* $\xi \to \infty$*. However, note that this claim does not imply that* ρ *is bounded uniformly in* u*. We have to prove the latter property separately.)*

(ii) $\rho_u(\xi) > 0$, $\xi > 0$, $u \in \mathcal{U}$.

(iii) For $b>0$ and $n=1,2,3,\cdots$, put $h_n = h_{n,u} = b\lambda_u^{-n}\sqrt{n}$ and $g_n(\xi) = g_{n,u}(\xi) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}h_{n,u}} e^{-\xi^2/(2h_{n,u}^2)}$, $\xi \in \mathbb{R}$. Then for each $u \in \mathcal{U}$. there exists $b_0 > 0$ such that if $b > b_0$ then

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} g_{n,u}(\xi-\eta) P_{n,u}(d\eta) = \rho_u(\xi), \tag{87}$$

uniformly in $\xi \in \mathbb{R}$.

(iv) $\varphi_u^*(t)$ is continuous in $(u,t) \in [0,1] \times \mathbb{R}$.

(v) The constants ν_u, $C_{1,u}$, $C_{2,u}$ in (85) can be chosen to be independent of $u \in [0,1]$. In particular,

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}} \sup_{u\in[0,1]} \rho_u(\xi) < \infty.$$

注 16 *(i) Possibly, the constant b_0 in the theorem can be chosen to be independent of $u \in \mathcal{U}$, and the convergence in (87) may be uniform in u. This is left open.*

(ii) Is it possible that (85) and related assumptions (originally from the second assumption in 定理 28) would imply $P(\{0\}) = 0$ and the tightness of $\{P_n\}$ on $(0,\infty)$ (namely, the mass of P_n do not accumulate at $\{0\}$), and consequently uniformity of convergence $\lim_{n\to\infty} G_n(s) = G(s)$ on $\mathbf{Re}(\mathbf{s}) \geqq \mathbf{K}$, which did not hold in general from the assumptions in 定理 36?

$\diamond$

The following is a direct consequence of 定理 43, 定理 45, and 定理 37.

系 46 *$P_{n,u}$ in 定理 43 converges weakly as $n\to\infty$ to P_u^* uniformly in $u \in [0,1]$.*

References

[1] 服部哲弥，数理物理学講義録（名大），http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~hattori/，2001.
この集中講義の完全版.

[2] 服部哲弥，確率論講義録（名大），http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~hattori/，2000.
この講義の確率論に関する基礎事項.

[3] 服部哲弥，数理解析特論講義録 (宇都宮大学)，http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~hattori，1995.

[4] 服部哲弥,「フラクタルにおける対称性の回復」，数理科学 (1997.4) 55–62.

[5] 服部哲弥，*Uniform weak convergence of probability measures on positive reals, which are defined by iteration*, Unpublished note, 2000–2001.

[6] K. Ito, 確率論，岩波基礎数学選書，1991.

[7] 小針あき[22] 宏，確率・統計入門，岩波書店，1973.
初等確率論の教科書．１次元 random walk の結果も初等的に証明している.

[8] 志賀徳造，ルベーグ積分論から確率論，共立講座 21 世紀の数学 10，共立出版，2000.
1990 年代以降に出た確率論の基礎教科書の一つ．ランダムウォーク，母関数と漸近解析に，それぞれ一章をあてているのが特色．著者の研究の関係で voter model にも章を当てている.

[9] 辻正次，複素関数論，槙書店，第７版，1985.

[10] 西尾真紀子，確率論，実教出版，1978.

[11] 樋口保成，パーコレーション — ちょっと変わった確率論入門，遊星社，1992.

[12] P. G. Doyle, J. L. Snell, *Random walks and electric networks,* MAA, Math. Monograghs **22**, 1984.

[22] Unicode 774D 目見

[13] R. Durrett, *Probability: Theory and examples,* 2nd ed., Wadsworth, 1996.

確率論の本格的現代的教科書．確率論の基礎からブラウン運動までカバーする．Random walk についてもコンパクトな記述がある．

[14] フラクタルに関する数学の基礎教科書としては例えば，K. Falconer, *Fractal geometry,* Wiley, Chichester, 1990. 縮小写像の話は同書第 9 章.

[15] W. Feller, *An introduction to probability theory and its applications,* vol. I, II, 3rd ed., John Wiley & Sons, 1968.

W. フェラー (卜部舜一訳)，確率論とその応用１上・下，２上・下，紀伊国屋書店，1988.

20 世紀中頃の確率論の定番の教科書．盛りだくさんの内容．Random walk の取り扱いに詳しい．

[16] G. Grimmett, *Percolation,* Springer–Verlag, New York.

[17] G. Lawler, *Intersections of random walks,* Birkhäuser, 1996.

著者の専門の random walk の交差確率の次元依存性を中心にした random walk 関連の確率論の専門的教科書.

[18] N. Madras, G. Slade, *The Self-Avoiding Walk,* Birkhäuser, 1993.

著者の専門の self-avoiding walk の数学・数理物理学に関する専門的教科書.（ただし，本講義後半のフラクタルの話は皆無.）

[19] フラクタルを広めたマンデルブローの著作，B. T. Mandelbrot, *The fractal geometry of nature,* Freeman, San Francisco, 1982, は有名.

[20] 電気抵抗の計算は教科書を参照していただきたい．例えば，高橋秀俊,「電磁気学」，裳華房（物理学選書３）.

[21] Arcsine 法則の一般化に関しては次のものがあるとのことである.

M. T. Barlow, J. W. Pitman, M. Yor, *Une extension multidimentionnelle de la loi de l'arc sinus,* Séminaire de Prob. XXIII, ed. J. Azéma, P. A. Meyer, M. Yor, Lecture notes in mathematics **1372** (1989) 294–314.

S. Watanabe, *Generalized arc-sine laws for one-dimensional diffusion processes and random walks,* Stochastic analysis (Ithaca, NY, 1993), 157–172, Proc. Sympos. Pure Math. **57**, American Mathematical Society (1995).

佐藤裕子，笠原勇二，科研費シンポジウム「確率過程とその周辺」(2000.12.11-14) 講演.

[22] M. T. Barlow, K. Hattori, T. Hattori, H. Watanabe, *Restoration of isotropy on fractals,* Physical Review Letters **75** (1995) 3042–3045.

[23] M. T. Barlow, K. Hattori, T. Hattori, H. Watanabe, *Weak homogenization of anisotropic diffusion on pre-Sierpiński carpet,* Communications in Mathematical Physics **188** (1997) 1–28.

[24] M. T. Barlow, E. A. Perkins, *Brownian Motion on the Sierpiński gasket,* Probab. Theor. Relat. Fields **79** (1988) 543–623.

[25] T. Hara, R. van der Hofstad, G. Slade, *Critical two-point functions and the lace expansion for spread-out high-dimensional percolation and related models,* preprint (MPEJ 00-468), 2000.

[26] T. Hara, G. Slade, *The lace expansion for self-avoiding walk in five or more dimensions,* Reviews in Math. Phys. **4** (1990) 235–327.

[27] T. Hara, G. Slade, *Self-avoiding walk in five or more dimensions. I. The critical behaviour,* Commun. Math. Phys. **147** (1992) 101–136.

[28] T. Hara, G. Slade, *The self-avoiding-walk and percolation critical points in High dimensions,* Cominatorics, Probability and Computing **4** (1995) 197–215.

[29] T. Hattori, *Asymptotically one-dimensional diffusions on scale-irregular gaskets,* Journal of Mathematical Science University of Tokyo **4** (1997) 229–278.

[30] T. Hattori, H. Watanabe, *Anisotropic random walks and the asymptotically one-dimensional diffusions on the abc-gaskets,* Journal of Statistical Physics **88** (1997) 105–128.

[31] K. Hattori, T. Hattori, *Self-avoiding process on the Sierpiński gasket,* Probability Theory and Related Fields **88** (1991) 405–428.

[32] B. Hambly, K. Hattori, T. Hattori, *Self-repelling walk on the Sierpiński gasket,* preprint (2001).

[33] K. Hattori, T. Hattori, S. Kusuoka, *Self-avoiding paths on the pre-Sierpiński gasket,* Probability Theory and Related Fields **84** (1990) 1–26.

[34] K. Hattori, T. Hattori, S. Kusuoka, *Self-avoiding paths on the three dimensional Sierpiński gasket,* Publications of RIMS **29** (1993) 455–509.

[35] K. Hattori, T. Hattori, H. Watanabe, *Gaussian field theories on general networks and the spectral dimensions,* Progress of Theoretical Physics Supplement **92** (1987) 108–143.

[36] K. Hattori, T. Hattori, H. Watanabe, *Asymptotically one-dimensional diffusions on the Sierpiński gasket and the abc-gaskets,* Probability Theory and Related Fields **100** (1994) 85–116.

[37] T. Hattori, S. Kusuoka, *The exponent for mean square displacement of self-avoiding random walk on Sierpiński gasket,* Probability Theory and Related Fields **93** (1992) 273–284.

[38] T. Hattori, H. Nakajima, *Transition density of diffusion on the Sierpiński gasket and extension of Flory's formula,* Physical Review E **52** (1995) 1202–1205.

[39] T. Hattori, T. Tsuda, preprint (2001).

[40] N. C. Jain, W. E. Pruitt, *Further limit theorems for the range of random walk,* J. Analyse Math., **27** (1974) 94–117，および，その引用文献.（1990 年代以降の発展は別に調べる必要がある.）

[41] F. B. Knight, *On the random walk and Brownian motion,* Trans. Amer. Math. **103** (1962) 218–228.

[42] N. Kosugi, *Tauberian theorems of exponential type and its application to mutliple convolution,* J. Math. Kyoto Univ., **39** (1999) 331–346, (Errata) J. Math. Kyoto Univ., **40** (2000) 203–203,

[43] N. Kosugi, *Tauberian theorems of exponential type on limits of oscillation,* J. Math. Kyoto Univ., **39** (1999) 783–792.

[44] 熊谷隆，ランダムウォークの訪問点に関する最近の話題１，濱名裕治，ランダムウォークの訪問点に関する最近の話題２，科研費シンポジウム「確率過程とその周辺」(2000.12.11–14) 講演，および，プレプリント (2000).

[45] S. Kusuoka, *A diffusion process on a fractal,* Proc. Taniguchi Symposium (1987) 251–274.