確率論セミナー 20050915(木) 15:45-17:15@518
Martin T. Barlow 氏　（British Columbia 大学）
Jump processes of mixed order
with R. Bass, Z. Chen, M. Kassmann

# 1　背景.

## 1.1　調和不等式.

(i) 自己共役作用素 $L$
(ii) Dirichlet form $(\mathcal{E},\mathcal{F})$
(iii) マルコフ過程 $(X_t,\ t\geqq 0)$

の間の関係はよく知られている.
調和関数： $Lh(x)=0,\, x\in D$.
熱方程式： $\dot{u}=Lu$　 (HE).
$X$ が遷移確率密度，すなわち，$P^x(X_t\in B)=\displaystyle\int_B p(t,x,y)dy$ を満たす $p(t,x,y),\ x,y\in\mathbb{R}^d$，を持てば，$\dot{p}=Lp$.

**問題：**　調和関数および (HE) の解の regularity？

**歴史的に重要な例：**　$x$ について可測な $a_{ij}(x)=a_{ji}(x)$ に対して
$L=\displaystyle\sum_i\frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j})=\nabla\cdot(a\nabla)$
が一様楕円型：$0<\lambda_1|\xi|^2\leqq\xi^Ta(x)\xi\leqq\lambda_2|\xi|^2,\ \forall\xi\in\mathbb{R}^d$, とする.
エネルギー積分：$f,g\in C_0^\infty$ に対して,
$(-Lf,g)=\displaystyle\int-\nabla\cdot(a\nabla f)g=\int(\nabla g)^Ta\nabla f=\mathcal{E}(f,g)$.
$a_{ij}(x)$ が $x$ に関して $C^2$ ならば，標準的方法（Schauder 型評価など）から (HE) の連続性を得る．一方，弱解などの概念によって $a_{ij}$ が微分可能でなくても (HE) は意味を持つ．そのとき，$a_{ij}(x)$ が $x$ について可測という仮定だけでどこまで言えるか？
Giorgi, Moser, Nash (1959–61) による解決.（フィールズ賞クラスの成果だが，３人が解いたため受賞せず．代わりに，Nash は後に経済学でノーベル賞を受賞.）
Moser (1961): この問題を解くために $\nabla\cdot(a\nabla)$ に対する楕円型 Harnack 不等式を開発.

**重要性.**　$F:\ \mathbb{R}\to[1,2]\in C^\infty$ に対して $\nabla\cdot(F(u)\nabla u)=0$ なる非線形偏微分方程式を考える.
解 $u$ が分かったとして $a=F(u)$ とおくと $\nabla\cdot(a\nabla u)=0$．$a$ がもし連続ならば調和方程式の一般論から $u$ が存在して連続になり，矛盾のない答えを得るが，実際は $u$ の連続性を最初に知らないので，$a$ の連続性の仮定無しに始める必要がある.

**定義.**　楕円型 Harnack 不等式 (EHI)： $Lh=0$ に対する Harnack 不等式.（(HE) に対する Harnack 不等式よりも説明が容易なのでこちらで説明.）
$L$ （または $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ または $X$）が EHI を満たすとは $C_H<\infty$ が存在して，$B=Ball(x_0,R)$ に対して $h$ が $B$ 上非負値調和関数ならば
$\displaystyle\sup_{B(x_0,R/2)}h\leqq C_H\inf_{B(x_0,R/2)}h$ が成り立つことを言う.　◇

例： $h(x)=P^x(X_\tau\in\Gamma)$.
EHI は球 $B$ の中で mixing が起きていることを意味する.
広い応用，たとえば Strook は Nash の結果を確率論的視点から拡張

### 1.2 Jump process.

(i) 確率論の自然な対象.
超平面 $H \subset \mathbb{R}^d$. $\mathbb{R}^d$ 上の拡散を $H$ に制限（そこだけを見る）と jump process.
(ii) 解析でも現れることがある（「拡散のトレース」）.
(iii) Barlow – Bass – Gui (ある種の非線形 PDE に付随した jump process)

基本量 — jump rate $x \to y$: $n(x,y) = n(y,x)$, $x, y \in \mathbb{R}^d$.
Energy form: $\mathcal{E} = \mathcal{E}[n]$;
$\mathcal{E}[n](f,f) = \int_{\mathbb{R}^d} (f(x) - f(y))^2 n(x,y)\,dx\,dy$, $x \in L^2$. （$\infty$ を許す.）
「良い」process であるための必要条件：
$N_1(x) := \int_{B(x,1)^c} n(x,y)\,dy \in L^1_{loc}$
（大きい jump があまりないという条件.）
$M_1(x) := \int_{B(x,1)^c} |x-y|^2 n(x,y)\,dy \in L^1_{loc}$.
これらの仮定の下で，$f \in C^1_c(\mathbb{R}^d)$ ならば $\mathcal{E}[n](f,f) < \infty$ に注意.
$Lf(x) = p.v. \int (f(y) - f(x)) n(x,y)\,dx\,dy$, $f \in C^2_c(\mathbb{R}^d)$
最も簡単な例：指数 $\alpha$ ($\in (0,2)$) の定常過程.
$n(x,y) = |x-y|^{-d-\alpha}$: Lévy process （並進不変なことに注意）.
性質：

(i) $E^0[e^{\sqrt{-1}\lambda X_t}] = e^{-t|\lambda|^\alpha}$. ($\alpha = 2$ は BM.)
(ii) $d = 1$ のとき， $X$ が point recurrent $\Leftrightarrow \alpha \in (1,2)$.

1930s からずっと研究されている.

**定常過程の摂動.** 最近研究が始まったばかり（Bass–Leven, Kumagai–Chen, 一般の距離空間で）.
$c_1|x-y|^{-d-\alpha} \leqq n(x,y) = n(y,x) \leqq c_2|x-y|^{-d-\alpha}$
（以下，この種の bounds を $n \asymp |x-y|^{-d-\alpha}$ のように書く.）
不連続かもしれないし，並進不変とも限らない（フーリエ変換は使えない）.
結果：

(i) Dirichlet form $(\mathcal{E}[n], \mathcal{F}[n])$ に付随した強 Markov (Feller) 過程 $Y$ が存在.
(ii) $Y$ は遷移確率密度を持ち，$p(t,x,y) \asymp t^{-d/\alpha} \wedge t|x-y|^{-d-\alpha}$ を満たす.
(iii) $Y$ は EHI を満たす.
(iv) 調和関数が連続.

# 2 問題と結果.

以下の (A1)(A2) を満たす $n(x,y)$ を考察する：
(A1) $K_1 > 0, K_2 > 0, 0 < \alpha < \beta < 2$ に対して，$K_1|x-y|^{-d-\alpha} \leqq n(x,y) \leqq K_2|x-y|^{-d-\beta}$, $|x-y| < 1$.
(A2) $n(x,y) = 0$ if $|x-y| > 1$ （弱めることができる）.
（動機はこれまでの成功したケースの拡張，特定の応用から来たのではない.）

**問題：**

(i) $\mathcal{E}[n]$ に付随する強 Markov 過程の存在
(ii) 調和関数の連続性
(iii) Harnack 不等式，等.

Regular Dirichlet form $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ があると，一般論から Hunt（特に強マルコフ）過程が構成できる

しかし：困難．$(\mathcal{E}[n],\mathcal{F}[n])$ を考えるのが自然だが，regularity を証明するのが難しかった．

ほしいもの：$(\forall f\in\mathcal{F}[n])\ \exists g_n\in\mathcal{F}[n]\cap C(\mathbb{R}^n);\ \mathcal{E}_1(f-g_n)=\mathcal{E}(f-g_n)+\|f-g\|_2^2\to 0$

直接の評価ではこれは得られない．代わりに，$(\mathcal{E}[n],\mathcal{F}')$ を考察する．ここで $\mathcal{F}'=\overline{C_c^1(\mathbb{R}^d)}^{\mathcal{E}_1}$．($C_c^1$ は energy が有限なので，定義から regular とわかる．)

うまくやったことに対する代価：

(i) $f$ が与えられたとき $f\in\mathcal{F}'$ を証明するのは難しい場合があるかも．
(ii) $(\mathcal{E},\mathcal{F}')$ に付随する過程 $Y$ が conservative なこと（つまり，有限時間で無限遠に行かないこと）を証明する必要がある．

**結果．**

**定理 1．**

(i) $(\mathcal{E},\mathcal{F}')$ に付随する $S=\mathbb{R}^d\setminus N$ （$N$ はある零集合）上の Hunt 過程 $Y$ が存在する．
(ii) $Y$ は遷移確率密度 $p(t,x,y)$ を持ち，$p(t,x,y)\leqq c_1t^{-\alpha/d}$ を満たす．
(iii) $\exists t_0=t_0(\alpha,\beta,\kappa_1,\kappa_2);\ P^x[\sup_{s\leqq t_0}|Y_s-x|\geqq 1/4]\leqq 1/4.$
（これと強マルコフ性から次を得る：）
(iv) $Y$ は conservative
(v) $B=B(x_0,2)$ とし，$Y^B$ は $Y$ を $B$ を脱出するときに kill したもの，$P^B(t,x,y)$ を $Y^B$ の遷移確率密度とする．このとき $P^B(t,x,y)\geqq C_1,\ x,y\in B(x_0,1),\ 1/2\leqq t\leqq 2.$
（意味は，過程が通れない集合がないということ；最低限の regularity.） ◇

**定理 2．** EHI が $B(x_0,2)$ に対して成り立つ． ◇

証明は Nash – Stroock の方法を用いる．

**定理 3．** (A1), (A2) を満たす $n(x,y)$ と一様連続ではない調和関数 $h(x)$ が存在する． ◇

**$d=2$ に対する定理 3 の $h$ の例：** Lévy 過程 $n_0(x,y)=n_0(0,y-x)$ と定数 $0<a_1<a_2<2$ から始めて，$m(x_1,x_2)=n_0(0,(x_1,x_2))=|x_1|^{-a_1-2}\wedge|x_2|^{-a_2-2},\ |x_1|,|x_2|\leqq 1$, and $m(x_1,x_2)=0$, otherwise，とおく．

その Levy 過程を $Y_t=(Y_t^1,Y_t^2)$ とおく．Levy 過程の射影は Levy 過程なので $Y_t^1$ と $Y_t^2$ は 1 次元 Levy（独立ではない），その jump measures は

$n_1(x_1)=\int_{-1}^1 m_1(x_1,x_2)dx_2=-c_1+c_2|x_1|^{-1-\alpha_1}$

および，

$n_2(x_2)=\int_{-1}^1 m_1(x_1,x_2)dx_1=-c_3+c_4|x_1|^{-1-\alpha_2}.$

$Y^1$ と $Y^2$ は本質的に（局所的に）指数 $\alpha_1$ と $\alpha_2$ の定常過程．ここで $\alpha_1=(a_1+1)(a_2+1)/(a_2+2)-1.$

**補題 4．**

(i) $n_0$ は $\alpha=\alpha_1,\ \beta=\alpha_2$ で (A1) を満たす．
(ii) $0<\alpha_1<\alpha_2<1$ を満たすように $a_1,\ a_2$ を選べる． ◇

$V=\{(x_1,x_2)\mid |x_1|<|x_2|\}$ とおき $Y_0=0$ とする．

$Z_t$: 1 次元定常過程で $\alpha\in(0,1)$ とする．このとき

$\lim_{t\downarrow 0}|Z_t|t^{-1/\alpha-\epsilon}=\infty$, a.s.

$\lim_{t\downarrow 0}|Z_t|t^{-1/\alpha+\epsilon}=0$, a.s.

よって，$\exists\delta(w);\ (\forall 0<t<\delta(w))$

$0 < |Y_t^1| < t^{1/\alpha_1 - eps} < t^{1/\alpha_2 + eps} < |Y_t^2|$.

よって短い時間では過程 $Y$ は cone $V$ の中にいる．

そこで，以下のように $n(x,y)$ を定義する：$n(x,y) = m(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|)$ if $x, y \in V, |x-y| < 1$,

および $n(x,y) = m(|x_2 - y_2|, |x_1 - y_1|)$ if $x, y \in V^c$,

および $n(x,y) = |x_1 - y_1|^{-2-a_1} \wedge |x_2 - y_2|^{-2-a_2}$ if $x_1 \in V, y \in V^c$ または $y \in V, x \in V^c$,

および $n(x,y) = 0$ if $|x-y| \geqq 1$.

$X$: 対応する過程.

$X$ の振る舞い：

$X_0 = x \in V$ が 0 に近いとき，$X$ は $V$ にしばらくとどまる．

$X_0 = x' \in V^c$ ならば $X$ は $V^c$ にしばらくとどまる.（実際，$x_1$ 軸正方向にしばらく動く.）

$D = (-\eta, \eta)^2$，$f(x) = 1_{D \cap V}$，$h(x) = E^x f(X_{\tau_D})$ とおく．このとき $h$ は 0 で連続ではない（なぜなら，この量は $X$ が箱 $D$ を $y$ 方向から出て行く確率だから）．