くりこみ群と流体力学極限

服部哲弥　（東北大学・理）

2009.03.17 東北確率論セミナー

I．ぎざぎざとくりこみ群

1 次元ブラウン運動 $B(t)$ $(B(0)=0)$：

独立増分 $(t>s>0 \to B(t)-B(s) \perp B(s)$, etc.$)$，

ガウス分布 $B(t)-B(s) \sim N(0,|t-s|)$

$\to \quad B(t)^2 = t +$ martingale

普通の問：　**位置＝時間** $^{1/2}$ **？**

普通の理解：　$N(0,t) \sim p_t(x) = \frac{1}{Z_t}\exp(-\frac{x^2}{2t})$

$x = y\sqrt{t} \quad \to \quad \exp(-\frac{x^2}{2t}) =$ const. in t

$\mathrm{E}_t[\, f(B(t))\,] = \int_{\mathbb{R}} f(x) p_t(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} f(y\sqrt{t}) p_t(y\sqrt{t})\sqrt{t}\, dy$

$= \int_{\mathbb{R}} f(y\sqrt{t}) p_1(y)\, dy = \mathrm{E}_1[\, f(B(1)\sqrt{t})\,] \quad \to \quad x(t) \sim x(1)\sqrt{t}$

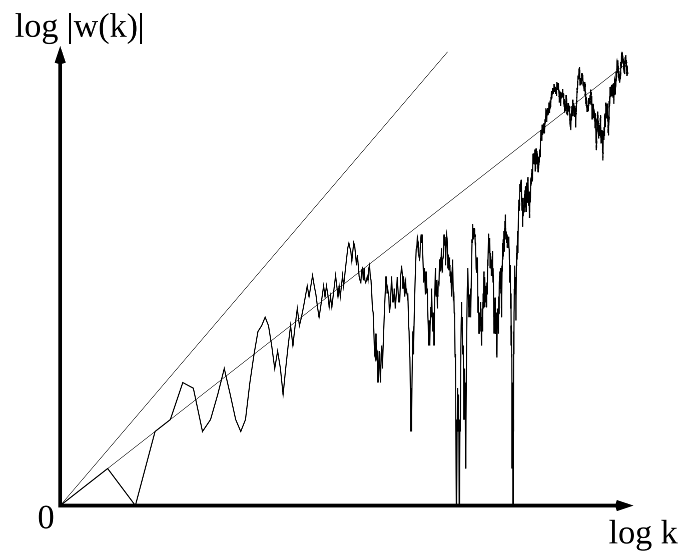
Note: $f(x) \equiv 1 \quad \to \quad Z_t = Z_1\sqrt{t}$

少し変わった問：　**標本** (sample path) **による理解？**

分布と標本

20 **世紀の解析学としての確率論の強さ：**
1．**無限次元空間の解析学を扱えること（関数の集合の大小）**
2．**分布と標本を行ったり来たりできること**
法則収束　＜　確率収束　＜　概収束，　coupling**（例：鏡映原理）**
大数の法則　＜　中心極限定理　＜　重複対数の法則

SRW **の場合：**
$$\limsup_{k\to\infty} \frac{W_k}{\sqrt{2k \log\log k}} = 1, \text{ a.e.}; \ W_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$$



指数の標本 (sample path) **による理解？**

ぎざぎざ

指数←自己相似（相似形→面積$\propto$長さ^2，体積$\propto$長さ^3）

path(関数，曲線)の自己相似←ぎざぎざ（cf. フラクタル）

くりこみ群：ぎざぎざの（確率測度としての）重ね合わせ

注： sample path で考えると，ブラウン運動を「ぎざぎざの確率」の重ね合わせで表すという考え方は自然：

1. R.E.A.C.Paley, N.Wiener (1934): $\{X_n\}$: i.i.d., $\sim N(0,1)$ に対して，

$$B(t)=\frac{t}{\sqrt{\pi}}X_0+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nt}{n}X_n,\ \text{a.e.}$$ （$0\leqq t\leqq\pi$ について一様収束）

2. 1次元Brown運動のF. Knightによる構成 (1962)：くりこみ群そのもの！

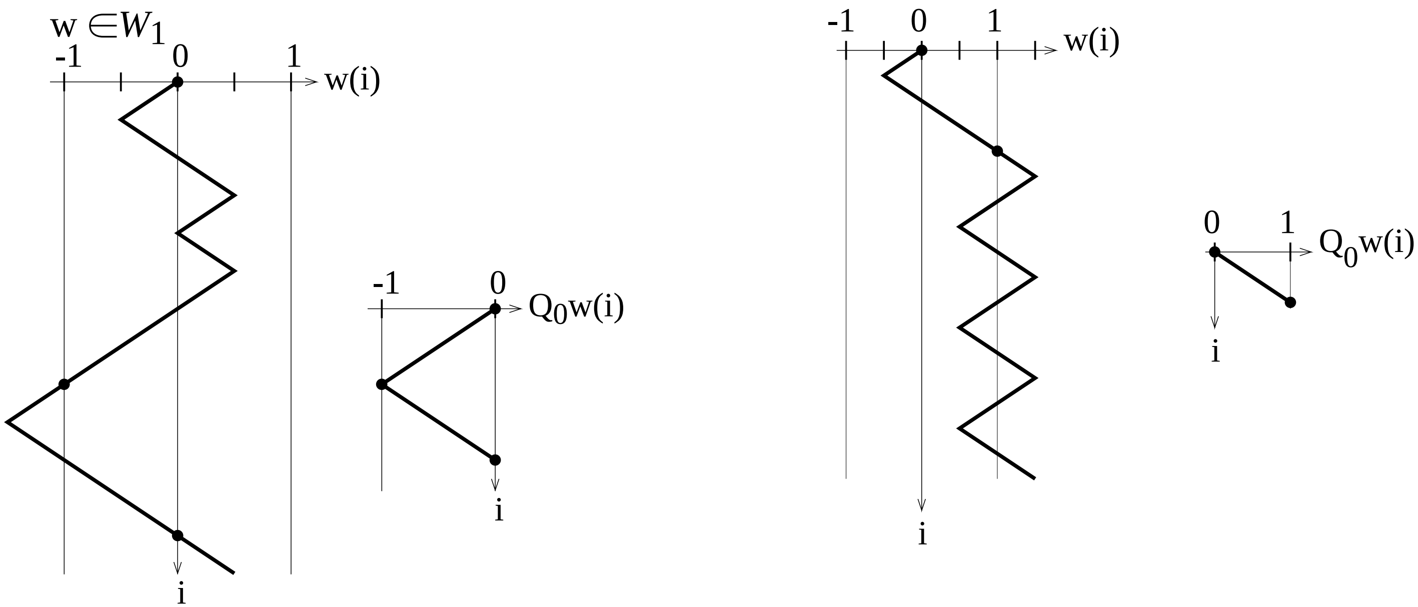
新しいこと： 既存の確率過程を理解する手段ではなく，**くりこみ群が定める確率過程のクラスを研究することの興味**（たとえば，指数1/2以外の確率過程），および，既存の方法で難しい確率過程に対する**新しい解析手段の可能性**（たとえば，自己回避path）

くりこみ群

くりこみ群：　数学として普遍的な定義は無い（**未発見の数学**）．

持つべき内容：　観測**精度のスケール変換に対する系の応答を**適切なパラメータ空間上で**表現する力学系**

１歩で隣にのみ移る１次元確率連鎖の場合はわかっている：
「ランダムウォークとくりこみ群」（服部哲弥，共立出版，2004）



くりこみ群が定義する確率連鎖

粗い 1 歩に対する**細かいぎざぎざ** w の歩数 $L(w)$ の母関数

（くりこみ写像）$\Phi(z)=\sum_w b(w)z^{L(w)} =: \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$

仮定：　収束半径正，$c_0=c_1=0$，$c_2>0$，非負係数（全て当然）

1 次元確率連鎖のくりこみ群：Φ が定めるパラメータ空間 $\mathbb{R}_+$ 上の力学系

- Φ の正値固定点 x_c がただ一つ存在
- $\lambda=\Phi'(x_c)\geqq 2$
- $\dfrac{1}{x_c}\Phi(e^{-s}x_c)$ **を母関数とする歩数分布**に従って，粗い 1 歩を細かいぎざぎざに置き換えて path を長くする．1 歩の歩幅を 1 に取り直せば，この操作を無限に繰り返して**無限長 path 上の確率測度**が定義できる（Kolmogorov の拡張定理）．

一般化された重複対数の法則

定理(Hambly, K.Hattori, T.Hattori 2002, K.H, T.H 2005, **「ランダムウォークとくりこみ群」**5**章). $\nu = \frac{\log 2}{\log \lambda}$ を指数とする一般化された重複対数の法則が成り立つ：** $C > 1$ **と** $k_0 > 1$ **が存在して,**

$$C^{-1} \leqq \frac{|W_k|}{k^{\nu}(\log\log k)^{1-\nu}} \leqq C, \ k > k_0, \ \text{a.e.} \qquad \diamondsuit$$

定理の特徴.

1. **くりこみ群の固定点で記述される**1**次元の隣にのみ飛ぶ確率連鎖については,くりこみ写像について何の余分の仮定も無しにすべての場合を尽くす**

2. **くりこみ写像の固定点におけるヤコビアンに基づく指数で漸近的性質が決まる**

くりこみ群

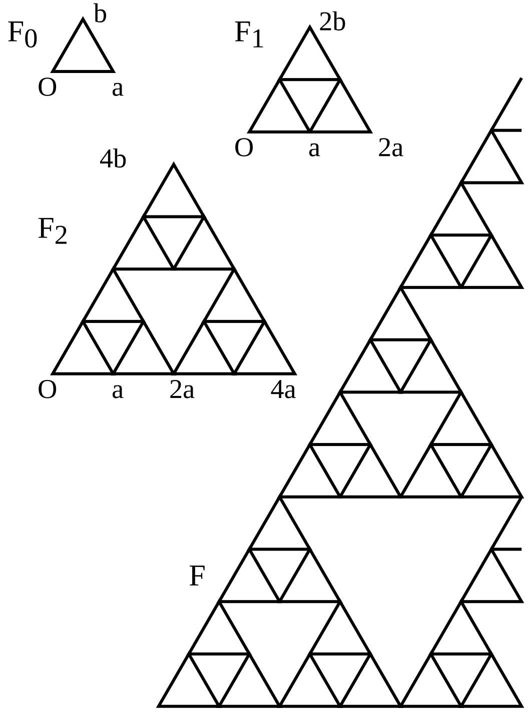
繰り返し→力学系

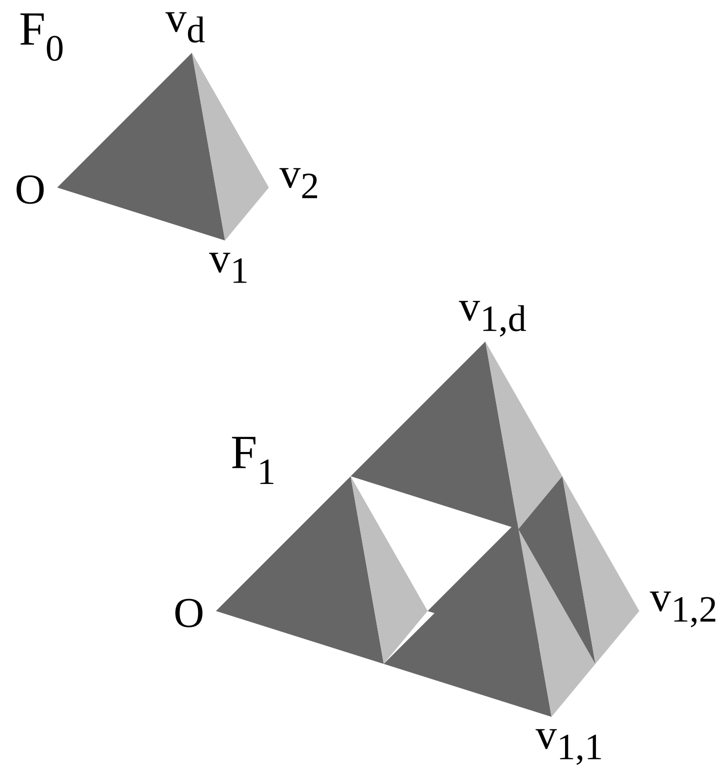
x_c **の周りで繰り返す ＝ 固定点直上理論**

歩幅を細かくし,時間スケールを λ^{-1} **倍すれば,連続時間の連続な確率過程を得る.**

II．ガスケット上の自己回避経路のくりこみ群

くりこみ群力学形の軌道の自明でない解析の例





自己回避経路(Self-Avoiding Path)**：どの点もたかだか一度しか通らないものに限る**

変位の指数

$\Phi_d : \mathbb{R}_+{}^{n_d} \to \mathbb{R}_+{}^{n_d}$: d次元ガスケット上のSAPに対応するくりこみ群

注．　pathの形状依存性があるので，パラメータ空間$\mathbb{R}_+{}^{n_d}$は$n_d \geqq 2$

定理(K.Hattori, T.Hattori, S.Kusuoka 1990–1993, T.Hattori, T.Tsuda 2002)．$d = 2, 3, (4)$のときΦはある不変部分集合$\Xi_d \subset \mathbb{R}_+{}^{n_d}$上でただ一つの固定点$x_d$を持つ．そこでの$\Phi_d$のヤコビ行列の最大固有値を$\lambda_d$とおくと，変位の**指数**は$\nu_d = \dfrac{\log 2}{\log \lambda_d}$で与えられる：

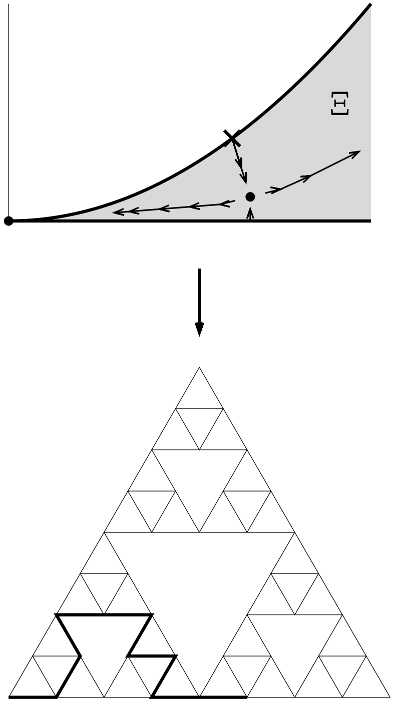
$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\log k} \log \mathrm{E}_k[\, |w(k)|^s \,] = s\nu_d, \ s \geqq 0 \qquad \diamond$$

証明．くりこみ群の具体形を用いて力学系としての軌道を解析する．

問題．具体形を使うので全てのdで決着させるのは困難

後半部分の一般論

定理 (「ランダムウォークとくりこみ群」6 章). d 次元ガスケット上の SAP について，対応するくりこみ群 Φ_d が，Ξ_d に self-avoiding 固定点 x_d を持ち，対応する臨界点がある，すなわち，初期値集合 (canonical curve $\{x(\beta) \mid \beta \in \mathbb{R}\}$) 上の点 β_d があって，そこを初期値とするくりこみ群の軌道が x_d に収束する ($\lim_{n\to\infty} \Phi_d^n(x(\beta_d)) = x_d$)，ならば，変位の指数は $\nu_d = \frac{\log 2}{\log \lambda_d}$ である．ここで λ_d は Φ_d の x_d におけるヤコビ行列の最大固有値． $\diamond$



$|w(k)| \quad k^{\nu} \qquad \nu = \frac{\log 2}{\log \lambda}$

後半部分の解決！

全ての d に対して定理の仮定（臨界点の存在）が成り立つか（前半部分の一般論）は未解決

自己回避経路に由来する２次元くりこみ群

$d=2,3,(4)$ は Φ_d のあらわな形からわかっていたが，あらわな形はSAPの本数を数えないといけない　→　一般化は困難

２次元くりこみ群の場合は，固定点の唯一性がsoft argumentで解決

$\Xi=\{(x,y)\in {\mathbb{R}_+}^2\setminus\{(0,0)\}\mid y\leqq x^2\}$

定理（T.Hattori 2007）．２変数多項式 $W(x,y)$ は以下を満たすとする：x と y の合計次数が３以上６以下の項からなる正係数多項式で，x^3 という項と y について１次の項を含み，xy^4 と x^2y^3 は含まず，y の正べきを含む項は合計次数が５以上，Ξ は勾配写像 $(X,Y)=\mathrm{grad}\,W$ に関して不変部分集合で，$R(x,z)=X^2(x,x^2z)-Y(x,x^2z)$ は z，$1-z$，x の非負係数多項式で，$x\to 0$ のとき $\dfrac{R(x,x^2z)}{Y(x,x^2z)}$ は $0\leqq z\leqq 1$ に関して一様に０に収束する．

このとき２次元写像 $\mathrm{grad}\,W$ の Ξ における固定点はただ１つ存在する．

◇

注．12個の非負係数で，６個の多項式が非負の条件がついている．

前半部分の一般論の困難と最初の手がかり

系．

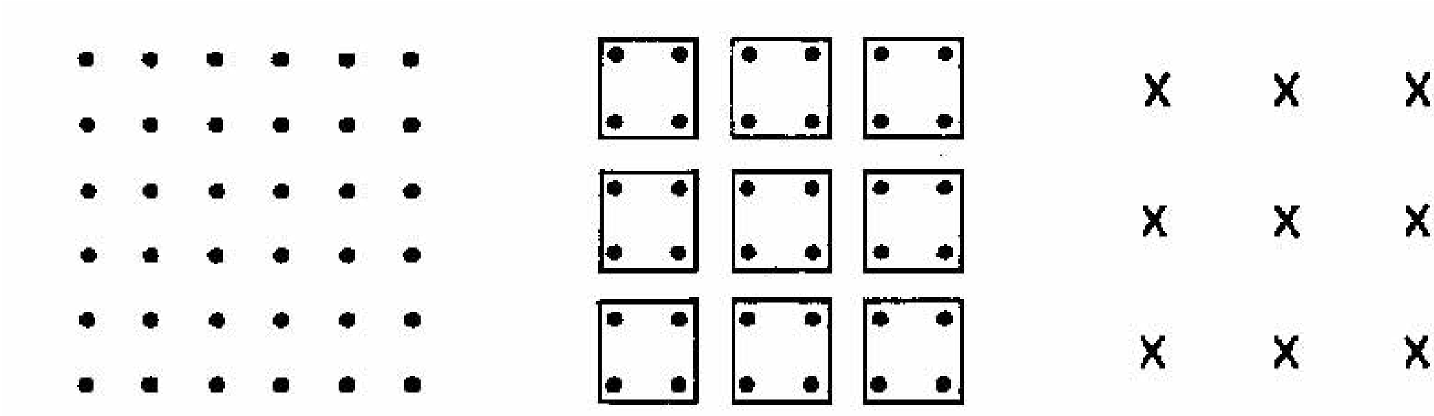
1．$d = 3, 4$ のとき，d 次元ガスケット上の SAP のくりこみ群については（Φ_d のあらわな形を使わなくても）Ξ_d の固定点の一意性が言える．

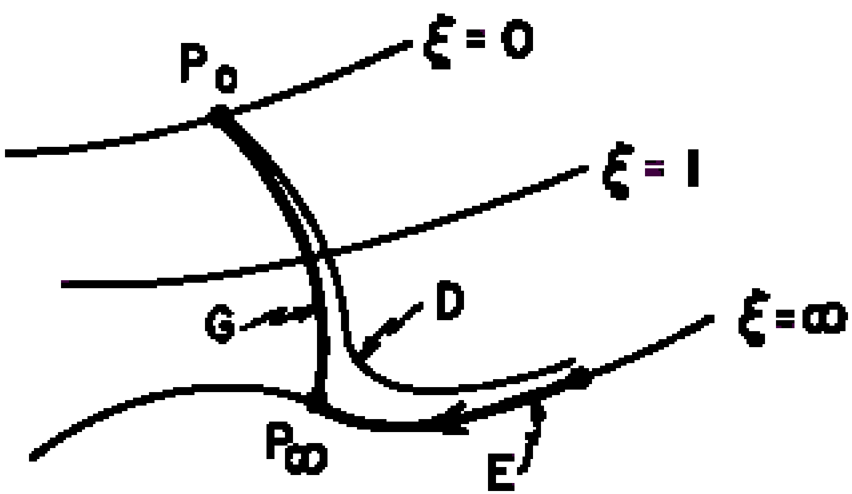
2．$W_\epsilon(x,y) = \dfrac{1}{3}x^3 + x^4 y + \epsilon y^6$ に対して，写像 $\mathrm{grad}\, W_\epsilon : {\mathbb{R}_+}^2 \to {\mathbb{R}_+}^2$ の Ξ における固定点は $0 \leqq \epsilon \leqq 8/3$ のときただ一つ． $\diamond$

注．ϵ が約 10 から 18 の間は，Ξ に固定点が 2 つあり，ϵ が約 18 を超えると固定点は Ξ の中になくなる．**固定点の一意性は自明ではない！**

くりこみ群の由来 —— 数理物理学

K. G. Wilson, J. Kogut, *The renormalization group and the ϵ expansion*, Physics Reports **12** (1974) 75–200





現象に触発された数学

くりこみ群が確率モデルを定める　−　現象→数学

場の理論：　現代数学的に「自然」なアプローチだと「発散の困難」

ブラウン運動の初期の研究と似た段階（ぎざぎざのランダムな和としてのB.m.)

直観的描像としてのくりこみ群

数学は出発点は（のちの発展は自律的であっても）全て現象に触発されているのでは?

これまでの数学で理解できない新しい現象　→それが例となる数学（定義や公理）を作ると数学的に意味がある

新しい例を含む広さと結果を導ける狭さをもった枠組み

III．確率ランキング模型によるweb活動の分析

数学→現象　（数学による現象の理解）

三村さんの立場：　非線形非平衡系（**マクロ**スケールで滑らかな非線形偏微分方程式の外力項の大きさの違いで構造が生まれる）

問題．　設計図はＤＮＡ　－　**ミクロ**（細胞）のパラメータのわずかの違いでマクロの形状が変わる（死ぬことすらある＝方程式が変わる）

ミクロからマクロへ

マクロはミクロ（分子，DNA，⋯）の運動の巨視的な像

問題．マクロ（巨視的）な定性的な違い（指数や形）を，ミクロ（微視的）なパラメータの違いから導けるか？（相転移，臨界現象）

ミクロスケールでは熱などの攪乱とエネルギーの競争

→　確率論（Gibbs 測度）

くりこみ群：臨界現象＝ミクロな揺らぎが巨視的にも見える場合

流体力学極限：マクロは決定論的な場合（大数の法則→非線形偏微分方程式）

•非線形放物型方程式（マクロな拡散）は「揺動散逸 (fluctuation–disspation) 定理」

解析技術的にはそこがいちばんおもしろいかもしれないが，それだけが流体力学極限の視点ではない，と思う

・**従属確率変数の和**に大数の法則が成り立つ条件 (A.A.Markov 1906–1907)

・粒子の空間分布　→　**形 (pattern) の生成**：非線形偏微分方程式

確率ランキング模型

一列に並ぶ N 個の粒子 $i = 1, 2, \cdots, N$ 粒子 i の時刻 t での順位

$X_i(t) = X_i^{(N)}(t)$

$X(t) = (X_1(t), \cdots, X_N(t)):\ \Omega \to S_N$

粒子 i の j 回目のジャンプ時刻 $\tau_{i,j}$；i に関して独立

時刻 $\tau_{i,j}$ に粒子 i は先頭にジャンプ：$X_i(\tau_{i,j}) = 1$．追い越された粒子たちは順位を 1 ずつ下げる．

順位から 1 を引いて N^{-1} 倍して粒子の**空間位置**を表記

最初のジャンプ $\tau_i^{(N)} = \tau_{i,1}$

$y_C^{(N)}(t) := \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \chi_{\tau_i^{(N)} \leqq t}$ 初期時刻に空間位置 0 にいた粒子の時刻 t での位置（先頭にジャンプしない間）

大数の法則

仮定.

$$\mathsf{P}[\,\tau_i^{(N)} > t\,] = e^{-w_i^{(N)}t}$$

$\lambda^{(N)}$: $\{w_i^{(N)}\}_{i=1}^N$ **の経験分布：** $\mathsf{E}_{\lambda^{(N)}}[\,g(w)\,] := \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{i=1}^N g(w_i^{(N)})$

$\lambda^{(N)} \to \lambda,\ N \to \infty$

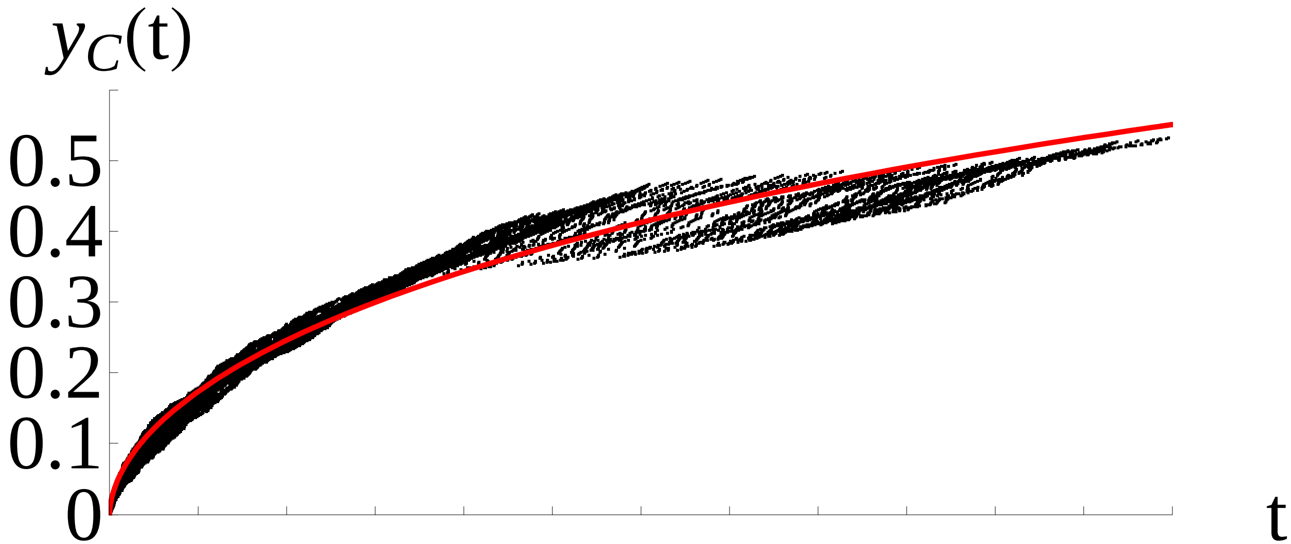
命題 (K.Hattori, T.Hattori 2008–2009)**.**

$$\lim_{N\to\infty} y_C^{(N)}(t) = y_C(t) := 1 - \int_0^\infty e^{-wt}\lambda(dw),\ \text{in prob.} \qquad \diamond$$

ジャンプ率の時間依存性　－　竹島君の修論

$\lambda^{(N)}$ が $w_i = a\left(\frac{N}{i}\right)^{1/b}$ で決まる場合 (Pareto 分布)

$y_C(t) = 1 - e^{-at} + (at)^b \Gamma(1-b, at)$ で当てはめると昼夜差



改良版：$w_i(t) = a(t)\left(\dfrac{N}{i}\right)^{1/b}$

Takeshima： $a(t)$ を 2 : 00 + $6n$ 時毎に値が変わる単関数として統計的当てはめ

黒木問題

問題．関数$a(t)$をパラメータとして統計的当てはめをする代わりに non-parametric に（$a(t)$を「消去」した定式化で）やれないか？

確率論的興味．ランダム時間変更　→　従属変数の大数の法則

$w_i(t)$: Poisson 点過程 数学辞典の定義は一般化されて高度…

粒子iがjumpする時刻の集合($\{\tau_{i,j}\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}_+$)

jump時刻が時間$[s,t]$に無い確率 $= \exp(-\int_s^t w_i(u)\,du)$

『時間$[u, u+du]$にjump時刻が(1つ)ある確率 $= w_i(u)\,du$』

ランダム時間変更と従属確率変数の大数の法則

総jump**回数で見た『有効（活動）時刻』** $\sigma(t) = \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{i,j=1}^{N} \chi_{\tau_{i,j} \leqq t}$

問題の定式化． $w_i(t) = a(t)\left(\dfrac{N}{i}\right)^{1/b}$ **のとき，** $s = \sigma(t)$ **で時間を測れば，** $N \to \infty$ **で** $a(t)$ **が一定の場合に帰着するか？すなわち，**

$q^{(N)}(s) = \sup\limits_{\sigma(t) \leqq s} t$ **とおくとき**

$$\lim_{N\to\infty} y_C^{(N)}(q^{(N)}(s)) = y_C(s) := 1 - e^{-at} + (at)^b \Gamma(1-b, at) \ (?)$$

たぶん結果は異なる．

困難． $y_C^{(N)}(t) := \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \chi_{\tau_i^{(N)} \leqq t}$ **は独立確率変数の平均だが，** $t = q^{(N)}(s)$ **を代入すると．独立性が保証されない．**

小林君の修論に期待

∞．ある先人の言葉

宮沢弘成　東京大学名誉教授
東京大学理学部物理教室談話会（最終講義，1988.02.12）
農耕民族は一斉にやる
狩猟民族は個人主義　ー　こちらが innovation　（革新，刷新，新機軸）

このごろ，外国でも何かというとworkshopを開いたりするなど，農耕型になっている

	他人が見て変	変ではない
自分が見て変	奇人変人	ノイローゼ
変ではない	病気	凡人

奇人になりなさい．画期的，奇想天外なことをしなさい

文献

- 服部哲弥のweb（Google検索キーワード　服部哲弥）
／日本語トップ／本・解説記事／求む「正しくて良い定理」！
／日本語トップ／本・解説記事／オンライン ランキング　…
／日本語トップ／講義／大学院生／
- 「ランダムウォークとくりこみ群」，共立出版，2004
- 竹島佑介氏修士論文
- 小林孝長氏修士論文（期待）