確率連鎖のくりこみ群２題

1．重複対数の法則とくりこみ群
2．3 次元ガスケット上の self-avoiding path の凝縮転移の存在

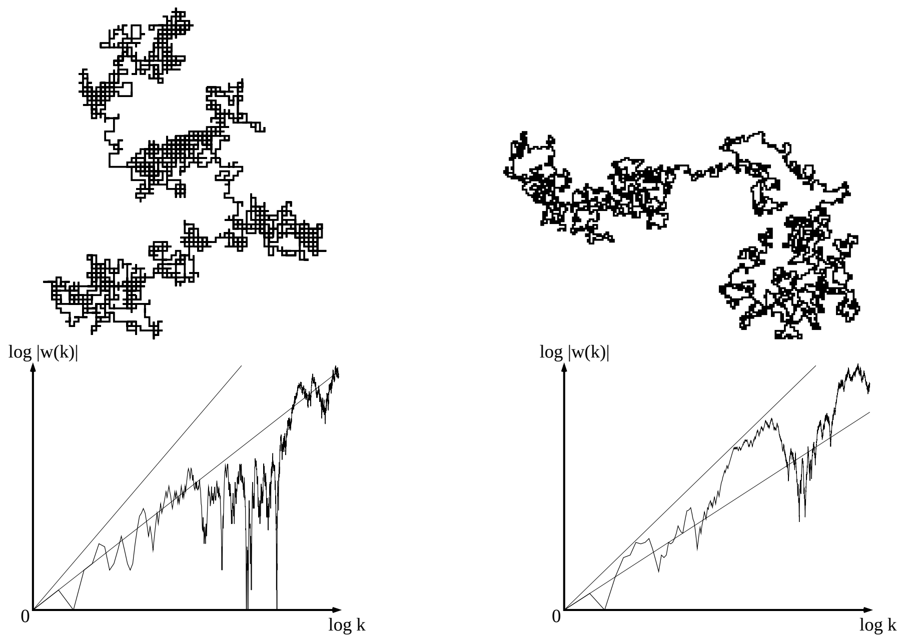
2004.11
東北大学・理学部物理教室セミナー
服部 哲弥 (東北大学・理)

- くりこみ群の描像が数学的に正しい場合についてのささやかな考察
- 物理では前世紀にくりこみ群は終わっているのか？

講演 1．重複対数の法則とくりこみ群

服部久美子（信大・理），服部哲弥

§1. 序.



服部哲弥「ランダムウォークとくりこみ群」，共立出版 (2004)

○ 指数 ν：k 歩目の位置 W_k の期待値 $\mathrm{E}[\,W_k\,] \approx k^{\nu}$
直線　$\rightarrow$　$\nu = 1$,　　**R**andom **W**alk　$\rightarrow$　$\nu = 0.5$
RW の場合, $\nu = 0.5$ (!?)：たくさんのブラウン運動（RW の連続極限）する独立な粒子の密度 $u(x,t)$ は拡散方程式 $\dot{u} = Du''$ に従う（例：水に落としたインキ）
解 $u(x,t)\sqrt{t} \propto \exp(-x^2/(4Dt))$　$\rightarrow$　$x \approx t^{1/2}$
個々の pathW_k はぎざぎざ　$\rightarrow$　$\lim_{k\to\infty} W_k/\sqrt{k}$ は存在しない　$\rightarrow$　$\overline{\lim}$

重複対数の法則：$\overline{\lim}_{k\to\infty} \dfrac{W_k}{\sqrt{2k\log\log k}} = 1$ (単純 RW)

定性的 :「ぎざぎざ」→「平均」から頻繁にずれる．歩数多いほど大きなずれを覚悟
○ 定量的：$\log\log$?，$\sqrt{\cdot}$?

RW (BM): 連続，独立増分，時空一様，$\mathrm{E}[\,W(t)^2\,] = t$，等から．explicit に計算できる のでで「気持ち」は分からないかも

$\nu = 1/2$ 以外への拡張 (**S**elf-**A**voiding **P**ath など)　→　非マルコフ（増分の従属性）.

○ 指数　→　自己相似性 (scaling, RG) による理解がほしい：
$W(t) \sim \sqrt{t}W(1) \to \nu = 1/2$．では $\sqrt{\log\log n}$ は？

○ 主張を２つに分ける（＋　ν 一般化の代わりに定数倍は諦める）
$\overline{\lim} \geqq 1$：W_k が曲線 $W(t) = 0.999\sqrt{t\log\log t}$ から無限回はみ出す（「ぎざぎざ」が多いという主張）　→　**B**orel–**C**antelli 2）
$\overline{\lim} \leqq 1$：有限回を除いて $W(t) = 1.0001\sqrt{t\log\log t}$ の中にとどまる（１歩で隣しか考えないので当然の期待）　→　BC1

§2. 遷移確率評価を仮定して重複対数の法則を導出します．

平均 $\mathrm{E}[\, W_k \,]$ のまわりの「ぎざぎざ」$\overline{\lim}\, W_k / \sqrt{k \log\log k}$」を定量的に表現したい

→ 簡単な数学を使う

BC2：$A_n,\ n = 1, 2, \cdots,$ 独立，かつ $\displaystyle\sum_{n \geqq 1} \mathrm{P}[\, A_n \,] = \infty$ ならば

$\mathrm{P}[$ 無限個の A_n に含まれる $] = 1$

証明：$\mathrm{P}[\, \bigcap_{n \geqq 1} \bigcup_{m \geqq n} A_m \,] = 1 - \mathrm{P}[\, \bigcup_{n \geqq 1} \bigcap_{m \geqq n} A_m^c \,] = 1 - \lim_{n \to \infty} \mathrm{P}[\, \bigcap_{m \geqq n} A_m^c \,]$

$\mathrm{P}[\, \bigcap_{m \geqq n} A_m^c \,] = \prod_{m \geqq n} (1 - \mathrm{P}[\, A_m \,]) \leqq \exp(-\sum_{m \geqq n} \mathrm{P}[\, A_m \,]) = 0$ QED.

BC1：$\sum \mathrm{P}[\, A_n \,] < \infty \to \mathrm{P}[$ 無限個の A_n に含まれる $] = 0$

・独立な事象ならば sharp！

・しかし，独立増分でも W_n と W_m は独立ではない

仮定 1． $\mathrm{P}[\, W_k \geqq x \,] \approx \exp(-C(x/k^{\nu})^{1/(1-\nu)})$ $(0 < \nu < 1)$
仮定 2． 大きいギザギザと小さいギザギザは「ある意味で」独立（**くりこみ群！**）

具体的には $\{W_{k_n} \geqq 2^n\}$, $n = 1, 2, \cdots,$ に BC2 を使えることを仮定.

（正確には，マルコフ的．BC2 はそのような場合に拡張できる.）

注：いずれも正当化できる．文献参照．直感的なことは後で説明.

仮定 1,2 から一般化された重複対数の法則が得られること：

$\mathrm{P}[\, W_{k_n} \geqq 2^n \,] \sim n^{-1}$ で k_n を決めると

仮定 2 と BC2 から左辺括弧内の事象のうち必ず無限個が起きる

他方，仮定 1 から k_n の漸近形はあらわに求まる：

$k_n \sim (C2^{-n/(1-\nu)} \log n)^{-(1-\nu)/\nu}$

n について解くと $2^n \sim C' k_n^{\nu} (\log\log k_n)^{1-\nu}$

以上より $W_k \geqq C' k^{\nu} (\log\log k)^{1-\nu}$ が無限回起きる.

一般化した重複対数の法則（下からの評価）：

$$\varlimsup_{k\to\infty} \frac{W_k}{k^\nu(\log\log k)^{1-\nu}} \geqq C', \text{ a.s.}$$

- スケール間独立性と BC2 がべき的なことで $\log\log$ を稼いでいる
- 上からの評価は BC2 の代わりに BC1.

○ 次に説明すべきこと：仮定 2（$\{W_{k_n} \geqq 2^n\}, n = 1, 2, \cdots,$ が「独立」に近い）を引き続き仮定して仮定 1：

$\mathrm{P}[\,W_k \geqq x\,] \approx \exp(-C(x/k^\nu)^{1/(1-\nu)})$ を（$x \gg k^\nu$ で）証明

§3. 遷移確率評価.

○ $\mathrm{P}[\,W_k \geqq x\,] \approx \exp(-C(x/k^{\nu})^{1/(1-\nu)})$ （仮定 1）

前世紀のゴム弾性の議論をまねして遷移確率の評価を説明：

k 歩目で $x = 2^n$（平均 k^{ν} に比べて大＝早い）とする.

2^{n_0} より小さいスケールは平均に従ってギザギザ動き，大きいスケールはまっすぐ進むことでスピードを稼ぐとする.

$2^{n_0} \sim k_0^{\nu}$：k_0 歩で 2^{n_0} スケールに達する

これが 2^{n-n_0} ブロックで x になるから,

総歩数は $k = k_0 \times 2^{n-n_0} = 2^n \cdot 2^{n_0(1-\nu)/\nu}$

よって $2^{n_0} = (k/x)^{\nu/(1-\nu)}$

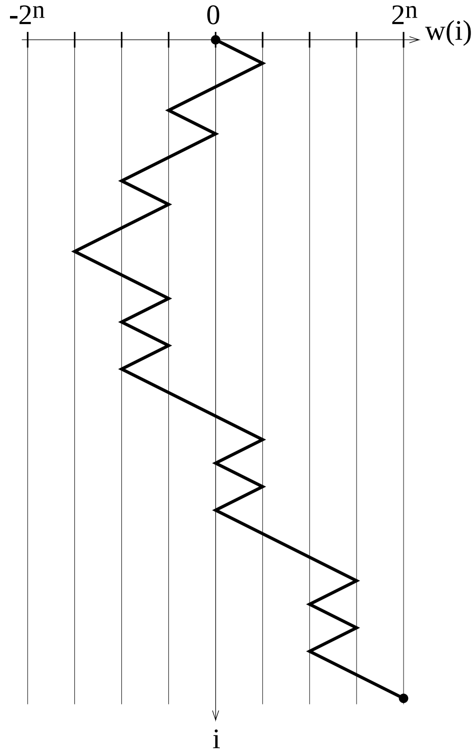
一方，2^{n-n_0} 回まっすぐ進ませて確率を損したので

$\mathrm{P}[\,W_k \geqq x\,] \approx \exp(-C2^{n-n_0})$

よって $\mathrm{P}[\,W_k \geqq x\,] \approx \exp(-Cx(k/x)^{-\nu/(1-\nu)})$

$= \exp(-C(x/k^{\nu})^{1/(1-\nu)})$ QED.

§4. くりこみ群から一般化された重複対数の法則へ.



○ スケール独立性（仮定 2）が成り立つ確率連鎖の族をくりこみ群で formulate できる.

（この節だけ厳密に書きます.）

○ 原点を出発点とする $\mathbb{Z}$ 上の path：
$w:\ \{0,1,\cdots,L\}\to\mathbb{Z};$
$w(0)=0,\ |w(i)-w(i-1)|=1\ (\forall i)$
○ L: **歩数**
○ $\tilde{W}_n$： $w(L)=2^n$， -2^n を通らない path の集合

○ $\tilde{W}_1$ における $\underline{L}$ **の（重み b_1 付き）母関数**

$$\underline{\Phi}_1(z) = \sum_{w \in \tilde{W}_1} b_1(w) z^{L(w)} =: \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

○ **くりこみ群**（Φ_1 が定める力学系）:
$\Phi_{n+1} = \Phi_1 \circ \Phi_n,\ n = 1, 2, 3, \cdots.$

・ $\Phi_n(z) = \sum_{w \in \tilde{W}_n} b_n(w) z^{L(w)}$ の形に書ける

○ 仮定：重み $b_1 \geqq 0,\ c_2 > 0, \exists c_{k_0} > 0, \Phi_1$ の収束半径 $r > 0.$

命題． $0 < \exists ! x_c < r;\ \Phi_1(x_c) = x_c.\ \lambda := \Phi_1'(x_c) > 2$

$\tilde{W}_n$ 上の確率測度 $\mathrm{P}_n[\,\{w\}\,] := b_n(w) x_c^{L(w)-1}$

定理 [くりこみ群に対応する確率連鎖]. $(\forall n \in \mathbb{N})\ (\forall w \in \tilde{W}_n)$

$$\mathrm{P}[\, W_j = w(j),\ 0 \leqq j \leqq L(w)\,] = \frac{1}{2}\mathrm{P}_n[\,\{w\}\,]$$

を満たす $\mathbb{Z}$ 上の確率連鎖 $W_0, W_1, W_2, \cdots,$ が存在する.

（「整合性：固定端 path →無限に延ばせる」）

定理 [一般化された重複対数の法則]. 定数 $C_{\pm} > 0$ が存在して,

$$C_- \leqq \varlimsup_{k\to\infty} \frac{|W_k|}{k^{\nu}(\log\log k)^{1-\nu}} \leqq C_+, \quad a.s.\ \text{ここで}\ \nu = \frac{\log 2}{\log \lambda}.$$

今日は直感的説明をしました．証明は文献を参照下さい：

・服部哲弥，ランダムウォークとくりこみ群，共立出版，2004 年

講演 2．3 次元ガスケット上の self-avoiding path の凝縮転移の存在

出口哲生（お茶大・理），服部哲弥

§1．序．

講演 1：マルコフ性とは異なる，確率過程（確率連鎖）の新しい枠組みとしてのくりこみ群：「くりこみ群が確率過程を定め，その大局的振る舞いを与える」

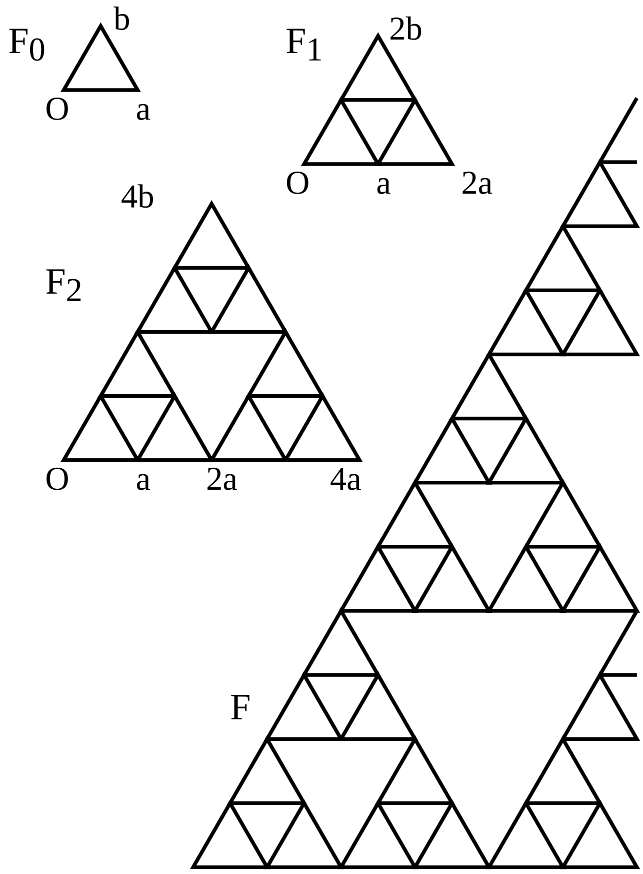
○ 1 次元確率連鎖（確率過程）については具体的に実行できた

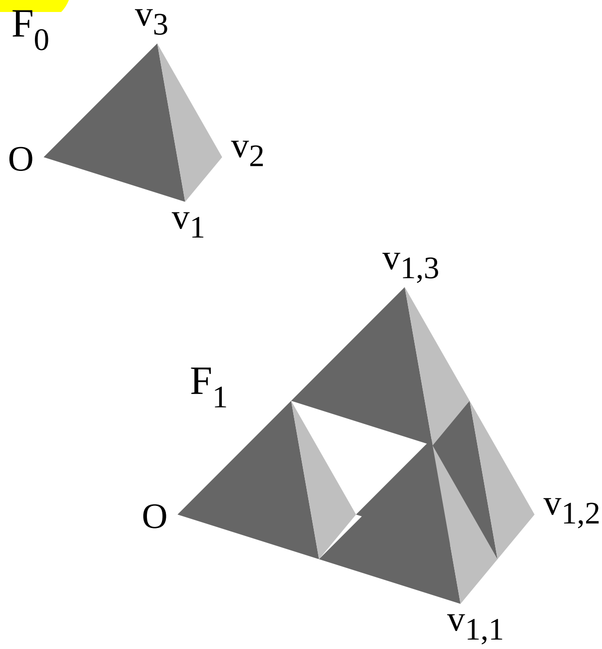
○ **S**elf-**A**voiding **P**ath：非マルコフ性の典型，高分子への応用

1 次元では自明．$\mathbb{Z}^d$, $d \geqq 2$ ではくりこみ群が無限次元（困難）．そこで…

○ d 次元ガスケット上の SAP：

くりこみ群が (2 以上の) 有限次元！





・ 早くからやられてはいる (D. Dhar, $d = 2, 3$, 他)
・厳密な解析 (Hattori–Hattori–Kusuoka, 1990–1993, $d = 2, 3$)
・ d についての一般論は難しい (Hattori–Tsuda, 2002, 「後半部分の一般論」)

有限次元でも離散力学系にカオスがない（軌道が収束する）ことの証明は今のところ（線形に近いなどの場合を除き）個別にやるしかない.「くりこみ群らしさ」を生かした一般論は存在しない.

○ 今回は $d = 3$ （現実の 3 次元空間の中で制限した，と強引にみなす） → 軌道の収束が（やってみたら）証明できた！

○ **問題.**
タンパク質などの高分子は（分子が重なることはできないのに），引力があると**凝縮転移**が起きる
これを「SAP ＋ 引力」から導けるか？

・（たぶん）気にしているだろうこと．SAP は（重なれないという意味で）強い斥力．それが凝縮遷移を妨げないか？ singular order param

○ **主張．** **3SG 上の SAP のくりこみ群の軌道追跡**の枠組みで凝縮相転移の存在を証明できる

・ 備考：[HHK](1993) では歩数一定毎の単純平均（の漸近形）が目的．小正準集合対正準集合の対応（数学的には指数型の Tauber 型定理）によって，引力パラメータが 0（実際は，0 または斥力）の場合のくりこみ軌道の収束を証明した．

§2. 3SG 上の SAP．

3SG (3 **次元** pre-gasket)

pre-**S**ierpiński **g**asket の 3 次元版

正三角錐 $F_0 = Ov_1v_2 \cdots v_3 \subset \mathbb{R}^3$

$F_n = 4$ 個の F_{n-1} をつないで 1 辺

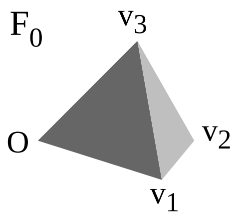
2^n の $\triangle O\ 2^n v_1\ \cdots 2^n v_3$

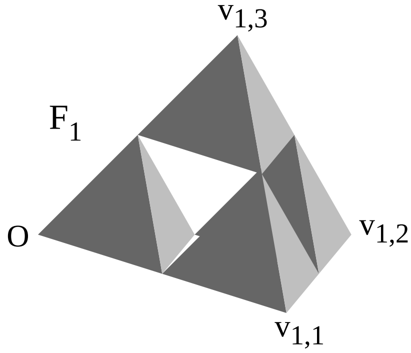
$F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset \mathbb{R}^3$,

$G_n = \{F_n$の**頂点**$\}$, $B_n = \{$ **辺**$\}$

dSG: $F = (G, B)$, $G = \bigcup_n G_n$,

$B = \bigcup_n B_n$ （無限に延ばしたもの）





W_0: SAP on 3SG

$w: \mathbb{Z}_+ \to G$

長さ $\underline{L}(w) =$

$\inf\{i \mid w(j) = w(i),\ j \geqq i\}$

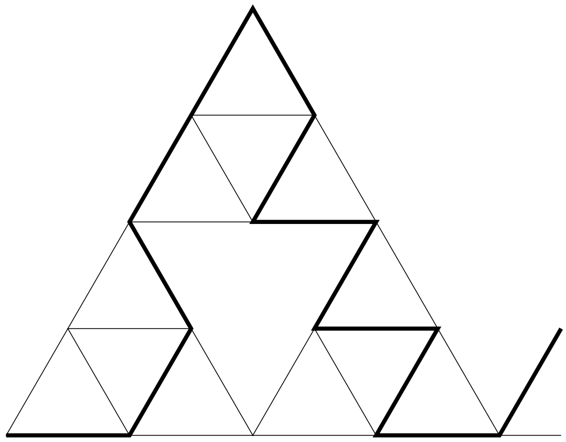
$\underline{W}_0 = \{w\underline{:\ \mathbb{Z}_+ \to G} \mid$

(path) $\overline{w(i)w(i+1)} \in B$,

$i = 0, 1, \cdots, L(w) - 1$,

(**self-avoiding**) $w(i_1) \neq w(i_2)$,

$i_1 < i_2 \leqq L(w)\}$

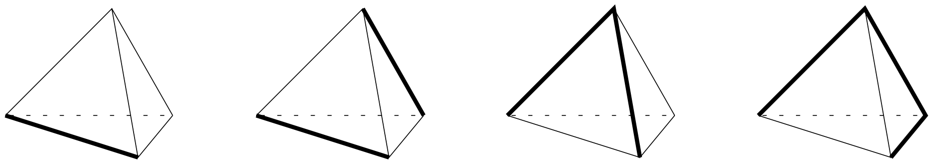


$w \in W_0$ $L(w)=13$

§3. **くりこみ群.**

くりこみ群の recursion が閉じるために**SAP を分類**

(A) SAP が一つの単位単体を通る通り方



I =(1)　I =(1,1)　I =(2)　I =(3)

$\mathcal{I}_3 = \{(1), (1,1), (2), (3)\}$

・くりこみ群が閉じるために，１本の path だけでなく，path の**組**(自己かつ相互回避) も必要

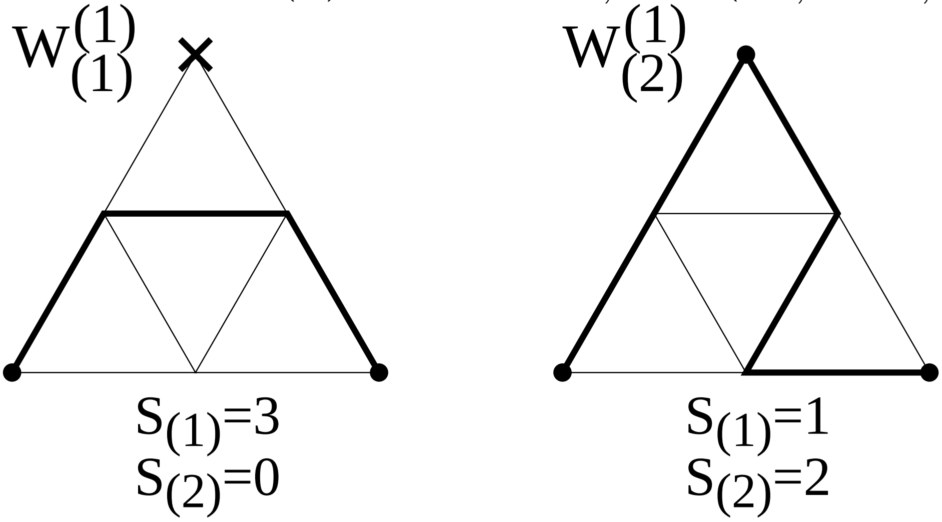
$I = (1,1)$: $O \to v_{n,1}$ と $v_{n,2} \to v_{n,3}$ の組 (互いに交わらない)

$(1,1)$ は２度通り抜ける

(B) F_n 上の SAP の分類　$W_I^{(n)},\ I \in \mathcal{I}_3$

F_n の頂点 $v_{n,i} = 2^n v_i,\ i = 1, 2, 3$

例.　$I = (1)$： $O \to v_{n,1}$　($v_{n,2},\ v_{n,3}$ を通らない)



SAP w が I 型で通る単位三角錐の個数：$s_I(w)$

○ $L = s_{(1)} + 2\,s_{(1,1)} + 2\,s_{(2)} + 3\,s_{(3)}$

$(s_J,\ J \in \mathcal{I}_3)$ の $(W_I^{(n)},\ I \in \mathcal{I}_3)$ に関する母関数

$$\vec{X}_n = (X_{n,I},\ I \in \mathcal{I}_3) : X_{n,I}(\vec{x}) = \sum_{w \in W_I^{(n)}} \prod_{J \in \mathcal{I}_3} x_J^{s_J(w)}$$

$\vec{x} = (x_J,\ J \in \mathcal{I}_3), \quad n = 0, 1, 2, \cdots$

命題 (RG). $\vec{X}_{n+1} = \vec{X}_n \circ \vec{X}_1, \quad \vec{X}_0(\vec{x}) = \vec{x}$

証明. $w \in W_I^{(n)}$ から $W_I^{(n+1)}$ の path を得る手続き：
F_n の 4^n 個の三角錐それぞれについて，w の通り方が J 型のとき $W_J^{(1)}$ の要素で置き換える． QED.

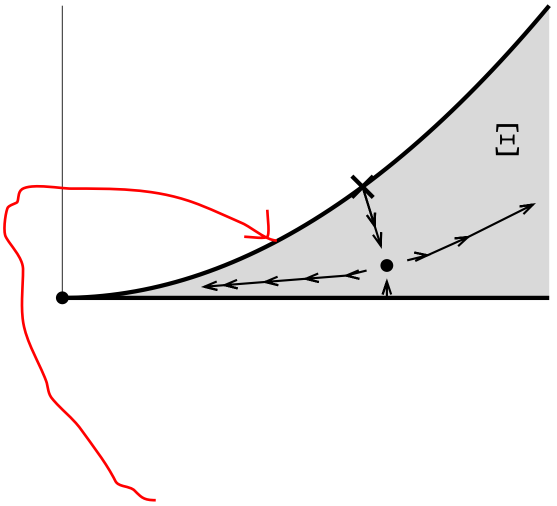
くりこみ群：$\vec{\Phi} = \vec{X}_1$ が定義する $\mathbb{R}_+{}^{\mathcal{I}_3}$ 上の力学系

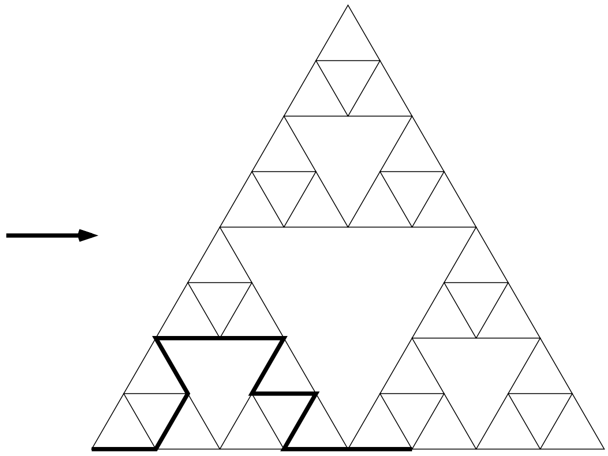
$$\Phi_I(\vec{x}) = X_{1,I}(\vec{x}) = \sum_{w \in W_I^{(1)}} \prod_{J \in \mathcal{I}_3} x_J^{s_J(w)}$$

くりこみ群が有限次元← 3SG が finitely ramified

§4. くりこみ群の軌道解析.

○ [HHK 1990-1993, HT 2002] の成果：





$|w(k)| \quad k^{\gamma} \qquad \gamma = \dfrac{\log 2}{\log \lambda}$

$\vec{x} = (e^{-\beta}, e^{-2\beta}, e^{-2\beta}, e^{-3\beta}),\ \beta \in \mathbb{R}$ canonical surface

$$Z_{n,I}(\beta) := X_{n,I}(e^{-\beta}, e^{-2\beta}, e^{-2\beta}, e^{-3\beta}) = \sum_{w \in W_I^{(n)}} e^{-\beta L(w)}$$

長さに比例したエネルギー（紐）の分配関数.

くりこみ群の作用するパラメータ空間内の 1–parameter の初期値集合 $\vec{x} = (e^{-\beta}, e^{-2\beta}, e^{-2\beta}, e^{-3\beta})$, $\beta \in \mathbb{R}$, が，引力も斥力もない SAP の「正準集合」に対応.

この初期値からのくりこみ群の軌道の収束が言えれば，タウバー型定理（正準集合と小正準集合の対応）などより $L = k$ なる SAP の上の**一様分布**に関する性質が分かる（path の本数，変位の指数など） [HT]

実際は途中点で止まる SAP の処理など複雑．鏡映原理なども必要.

$d = 2, 3$: $\vec{x} \in \Xi$ **（非引力領域）からの軌道の収束が OK** [HHK]

○ 今回：引力を持つ場合も必要→全パラメータ領域で片付けておく

主定理 (Deguchi–Hattori). （引力パラメータ領域を含む全ての）$\vec{x} \in \mathbb{R}^4_+$ に対して軌道 $\vec{x}_n = \vec{X}_n(\vec{x}), n = 0, 1, 2, \cdots,$ が無限遠に発散する（「高温」相）か，原点に収束するか，3つの固定点 $C_a = (x_c, y_c, 0, 0)$, $C_r = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0)$, $C_o = (0, 22^{-1/3}, 0, 0)$ のいずれかに収束する．

変位の指数 $\nu = \log 2/\log\lambda$; $R(k) \approx k^{\nu}$

λ: 固定点での $\vec{\Phi}$ の最大固有値

normal, $C_a = (0.4294449\cdots, 0.0499839\cdots, 0, 0)$: $\nu = 0.674\cdots$

coalescence, C_o: $\nu = 0.5$　　$I = (1, 1)$ 型が dominate

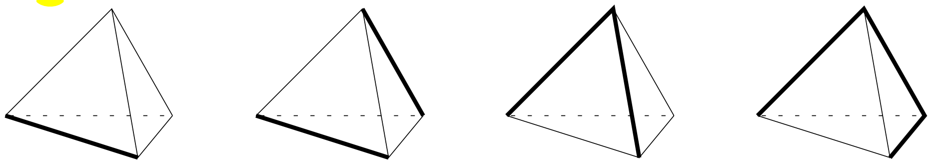
→ 巨視的な凝縮（1本なら折りたたまれている）＝凝縮相

critical, C_r: $\nu = 0.529$　普通相と凝縮相の臨界点

§5．主結果の解釈　ー　凝縮転移．

引力パラメータ μ　（温度 β との 2-parameter canonical surface:）

$$\vec{Z}'_n(\beta,\mu) = \vec{X}_n(e^{-\beta}, e^{-2\beta+\mu}, e^{-2\beta}, e^{-3\beta})$$



I =(1)　I =(1,1)　I =(2)　I =(3)

くりこみ群の定式化における相転移の存在：μ の値によって軌道が C_a に収束する場合と C_o に収束する場合があれば，引力の強さによって巨視的に異なる相が実現する

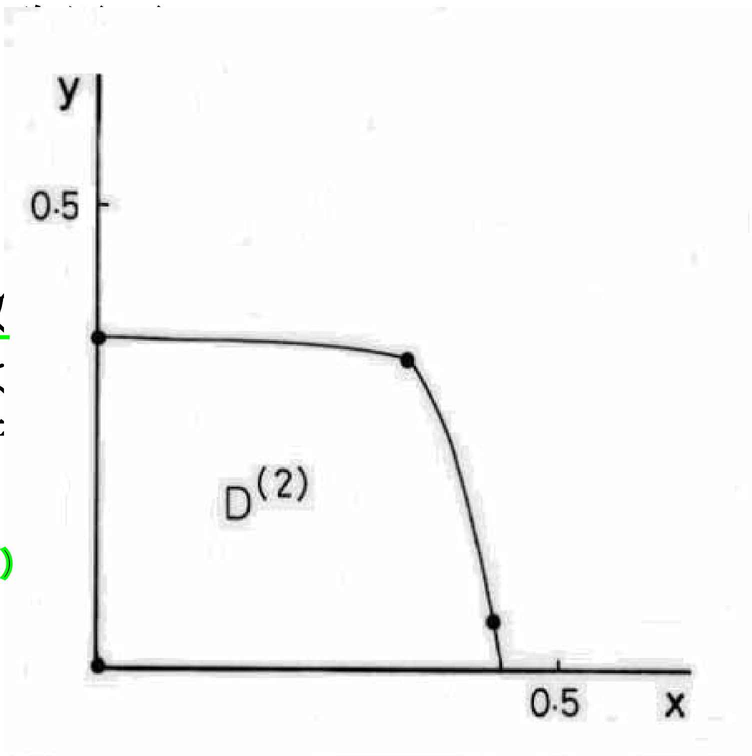
実際，$\mu \leqq 0$　$\to$　C_o への収束 [HHK1993],

$\mu = \infty$　$\to$　$C_a = (0, y_c, 0, 0)$　**凝縮相転移の存在**

有限のパラメータで転移があるかどうかには不十分だが，数値計算ではそうなっている

最後に，主定理の証明の概略

・その１．低温相，高温相，



$\vec{\Phi}=\vec{X}_1$ は 2 次以上の正係数多項式　→　小さい初期値は 0 に，大きい初期値は∞に行く（境界面 ∂D からは間にとどまる）；温度軸（相関距離を変える方向）は不安定方向

$D=\{\vec{x}\in\mathbb{R}_+{}^4 \mid \sup_{n\in\mathbb{Z}_+}\max_{I\in\mathcal{I}_3} X_{n,I}(\vec{x})\leqq 1\}$

・その２． irrelevant coordinates

(2) 型は角をとると (1) 型になる

$R(\vec{x}) = \max\{\frac{x_{(2)}}{x_{(1)}},\ \frac{2x_{(3)}}{x_{(2)}}\}$

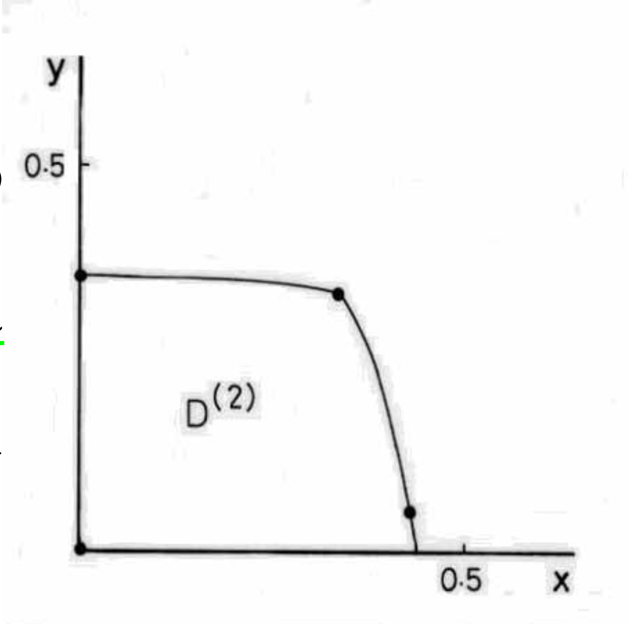
$R_n(\vec{x}) = R(\vec{X}_n(\vec{x}))$

○ $R_n(\vec{x})$ は n について非増加. $\vec{x} \in D$ ならば $R_\infty(\vec{x}) = 0$

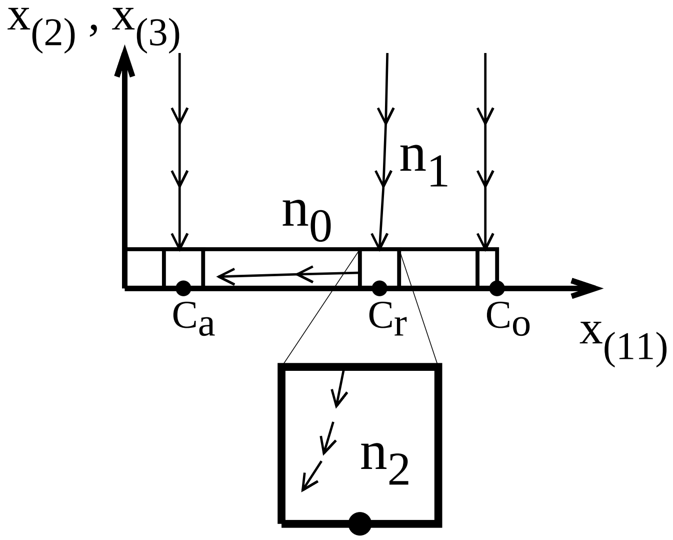
→ 本質的に $x_{(1)}$–$x_{(11)}$ 面内を考えれば十分 今のところ3SGまでしか成り立たない

$\Phi_{(1)}(x, y, 0, 0) = x^2 + 2x^3 + 2x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2$

$\Phi_{(11)}(x, y, 0, 0) = x^4 + 4x^3y + 22y^4$



・その３． $\partial D \cap \{(x, y, 0, 0) \mid x, y \in {\mathbb{R}_+}^2\}$ は１次元



→ $y = x_{(11)}$ でパラメータ表示
$\vec{\Phi}$ は連続関数
→ 固定点以外をくりぬいた連結成分では変化は定方向
→ 収束が言える

結論に代えて．

・ くりこみ群は終わっているか？（やれることは全部分かっているか？）

　ー　特有のもののみかたである．

数学として確立したとは言えない，ということは，
まだ完全な理解に至ってはいないということであって，
物理として学ぶものが無くなったと考えるのは早計，
かもしれない．

服部哲弥，ランダムウォークとくりこみ群，共立出版，2004 年

講演１の厳密な解説と
講演２の前段階（normal phaseの詳細解析）を
含んでいます

本の詳しいことは
http://www.math.tohoku.ac.jp/~hattori/kyoritu.htm