集中講義　レポート問題

出題日 2005 年 6 月 3 日，高岡浩一郎*

• 問 1 から問 6 に答えて，6 月 30 日（木）までに数学棟 1 階の事務室に提出のこと．余力があれば，問 7 にも解答して下さい．

なお，**株式の配当は無いものとする．**

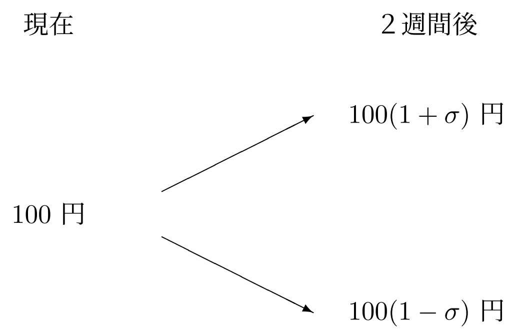
[**問 1**]　Black-Scholes 式を導出せよ（方法は自由）．

[**問 2**]　次の性質（§1.2 の最後のほうで説明しました）を，原資産の価格変動モデルを建てずに示せ：ヨーロピアン・コール・オプションの価格について

$$\left(S_0 - \frac{K}{1+R}\right)^+ \;\le\; C_0 \;\le\; S_0$$

が成立する．

[**問 3**]　ある会社の株価が次のように変動する．また，安全債券の現在価格は 1 円，2 週間後の価格は $1+R$ 円だとする．ただし $0 \le R < \sigma < 1$．この時



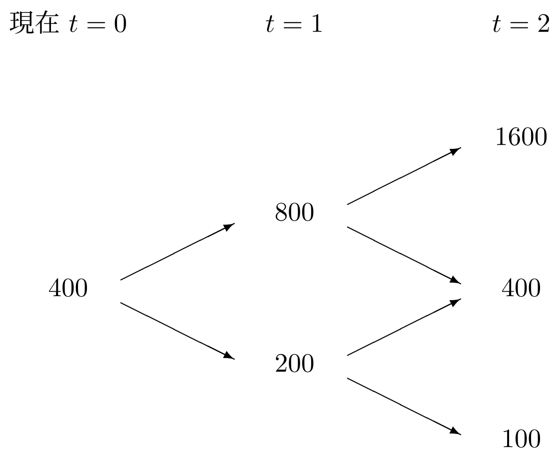
(i)　株式のヨーロピアン・コール・オプションとヨーロピアン・プット・オプション（満期は 2 週間後，行使価格 100 円）の現在価格をそれぞれ求め，その値が σ について単調増加であることを確かめよ．

* 一橋大学大学院商学研究科．Email: takaoka@math.hit-u.ac.jp

(ii)　このプットオプションを株式と安全債券を用いて複製する方法を述べよ.

[注]　**(i)** は,「ボラティリティが大きいほどオプション価格が高くなる」ということを この設定下で実際に計算して確かめて下さい，という問題です.

[**問 4**]　ある会社の株価が次のように変動するというモデルを立てた.



一方，安全債券の価格は $1 \to \frac{10}{9} \to (\frac{10}{9})^2$ と確定的に推移する．このモデルに基づけば，株式を原資産とする行使期日 $T=2$，行使価格 500 円の

- ヨーロピアン・コール・オプション
- ヨーロピアン・プット・オプション
- アメリカン・コール・オプション
- アメリカン・プット・オプション

の無裁定価格は各 node においていくらか．複製方法も計算せよ.

[**問 5**]　コールオプションの Black-Scholes 式

$$C_t \ := \ S_t\,\Phi(d_+) \ - \ K\,e^{-r(T-t)}\,\Phi(d_-)$$

（ただし

$$d_\pm \ = \ \frac{\log\left(\frac{S_t}{K\,e^{-r(T-t)}}\right) \ \pm \ \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

である）について以下の問に答えよ.

1. この式が Black-Scholes の偏微分方程式を満たすことを確かめよ．
2. W は 1 次元標準 Brown 運動とする．このとき

$$e^{-rT}\,E\Big[\Big\{\,S_0\,\exp\big(\sigma W_T + (r - \tfrac{\sigma^2}{2})T\big)\,-\,K\,\Big\}^+\,\Big]$$

が C_0 と等しくなることを示せ．

3. 比較静学に関する次の５性質（§3.2）を示せ：
   - $\frac{\partial C_t}{\partial \sigma} \,>\, 0,$
   - $\frac{\partial C_t}{\partial S_t} \,=\, \Phi(d_+),$
   - $\lim_{\sigma\to 0} C_t \,=\, \big(S_t - Ke^{-r(T-t)}\big)^+,$
   - $\lim_{\sigma\to\infty} C_t \,=\, S_t.$
   - $\lim_{T\to t} C_t \,=\, (S_t - K)^+,$
4. $S_0 = 400$, $K = 350$, $T = 1/2$, $r = 0.05$ とする．ボラティリティが

$$\sigma = 0.15,\qquad \sigma = 0.2,\qquad \sigma = 0.25,\qquad \sigma = 0.3$$

のときに，それぞれ C_0 の値を計算せよ．

[**問 6**]　次の確率過程 X に対して伊藤の公式を適用せよ．ただし W は 1 次元標準 Brown 運動とし，n, α, β, σ, μ は定数とする．

1. $X_t \,:=\, W_t^n$　（n は自然数）
2. $X_t \,:=\, W_t^4 + \alpha\, t\, W_t^2 + \beta t^2$
3. $X_t \,:=\, \exp(\sigma W_t + \mu t)$

また，これらの確率過程がマルチンゲールになるためには，定数 n, α, β, σ, μ をどのように定めれば良いか．

[**問 7**]

- §3.1（Black-Scholes 式の導出その１）の議論を完成させよ．
- 第５章（Black-Scholes 式の導出その３）の議論を完成させよ．