数学におけるくりこみ群，夜明け前

服 部　哲 弥

1. 人が見てこその自然法則

くりこみ群の数学とは『精度のスケール変換に対する系の応答を適当な空間の適切な部分集合上のすなおな力学系によって記述することで，元の系の漸近的性質を調べる数学』である．

と，威勢良く書き出したが，この話題に関心ある向きには謎だらけだろう：

- 精度のスケール変換？　（という，造語.）
- 適当な空間？　（という，丸投げ.）

くりこみ群の数学はまだ無い，というのが筆者の認識である．冒頭『カギ括弧』内は既知の厳密な定義をひらたく書いたのではなく，定義が無いのでこれ以上正確に書けないのだ．既存の成果を解説する記事とは違って，くりこみ群と呼べる数学が完成したあかつきにその理論が最低限持っていてほしい特徴について私の思いを託したのが以下の文章である．

まずは，この節の残りで，くりこみ群を理解する大前提となる「自然法則におけるスケール」の視点から高校と大学全学教育の物理を駆け足で復習する.「スケールは分かっている」という向きには次節に進んでいただきたい.

自然法則は自然現象を数学の言葉で書く．数学においては，きちんとした数学になったときに「定式化された」と言う．ニュートンの名前をつけて呼ぶことの多い古典力学は，注目する対象の時刻 t での位置 $(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ についての常微分方程式系で定式化する．固定した質量 M の球対称物体による重力（万有引力の法則）の下での運動という典型例の場合，$i = 1, 2, 3$ について

$$-\frac{GMmx_i(t)}{\sqrt{x_1(t)^2 + x_2(t)^2 + x_3(t)^2}^3} = m\frac{d^2x_i(t)}{dt^2}$$

である．ここで，式の簡単のため物体の重心を座標の原点とした．正定数 G は万有引力定数である．正定数 m は注目する対象（を理想化した質点）の質量で，式の両辺から約分できる（質量によらず軌道は同じだ）が，おなじみの「$F = ma$」に合わせた．$i = 1, 2, 3$ なのは我々の空間が 3 次元だからである．地球のように固定されていない物体でも，地球と地上のリンゴのように質量比 m/M が小さければ，その程度の誤差を許す約束で 解軌道を表せる．地球を回る月のように m/M が大きくても，定数をうまく選び直すとこの微分方程式で解を正確に求めることができる．

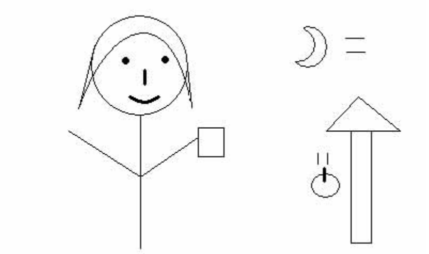

図 1　自然法則の発見は人のスケールから始まる

スケール (scale) を辞書で引けば尺度や縮尺と

あるとおり，この記事では，長さの尺度，基準となる典型的な長さ，などの意味で使う．自然法則は人が観察した自然現象を数学の言葉で書く．したがってまず太古の昔から人類が観察してきた木の高さや太陽と惑星の間の距離で成り立つ古典力学が定式化された．古典力学で表せる典型的な長さを，人間が普通に詳しく見てきた長さの尺度（スケール）という意味で，以下，巨視的という意味のマクロという言葉を使う．対比すべきは極めて小さな原子やそれより小さい素粒子のスケールで，ミクロと呼ぶ．

もし（ありえないことだが）人類がその黎明期からミクロのスケールでものを見ていたならば「古典力学」が最初に発見されることは無かっただろう．ミクロのスケールでは，常微分方程式の解で質点の位置を表すという定式化自体が現実と合わない．たとえば電子は場，つまり，時刻だけの関数ではなく時空 4 変数の（複素）関数 $\psi = \psi(x_1, x_2, x_3, t)$ で表す必要がある．マクロのスケールで電磁場や重力場は時空 4 変数の（実）関数，つまり場，だが，ミクロのスケールでは電子も場である．たとえば，原点に固定された電荷 e の作る電場の力を受けて運動する質量 m 電荷 $-e$ の電子の振る舞いは

$$\frac{\sqrt{-1}h}{2\pi}\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{1}{2m}\frac{-h^2}{4\pi^2}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_i^2} - \frac{e^2\psi}{4\pi\epsilon_0\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}$$

という偏微分方程式（シュレディンガー方程式）で説明できる．ϵ_0 は真空の誘電率と呼ばれる正定数で，重力で G が出てきたのに対応して電磁力を扱う際に登場する．h はプランク定数と呼ばれる正定数で，マクロの世界で普通に使う MKSA 単位系では約 $2/3 \times 10^{-33}$（小さすぎて日本語の単位が分からないからやむなくこう書いておく）であり，古典力学で表せないミクロの世界の典型的な大きさを与える．

リンゴや月も原子たちの運動の結果として存在するので，論理的整合性を考えれば，シュレディンガー方程式においてしかるべき量を定義して $h \to 0$ の極限をとればニュートンの運動方程式が得られるはずである．この問題意識の解決ではないが，h が小さいときのシュレディンガー方程式の漸近解を研究する数学（WKB 法，準古典近似）がある．ミクロのモデルからマクロのモデルが数学的に得られるかという問題意識は他にもエルゴード理論や流体力学極限などの深い数学を生み出すきっかけとなった．

自然法則を探求する理論物理学の歴史は数学の論理と逆に進む．まず古典力学が発見され，その後に古典力学では説明できない新しい観測事実が見つかって，試行錯誤の後にシュレディンガー方程式を始めとする量子力学が発見された．古典力学だけから定数 h やシュレディンガー方程式は予想できない．古典力学は常微分方程式として完結していて置き換わらねばならない数学的理由はなく，電子が古典力学に従わないことは光電効果のような実験事実の積み重ねによって分かった．

このことを「裏読み」すると，論理的には先にあるべきミクロの自然法則を知らなくてもマクロの対象の十分良い自然法則が定式化可能である．小さいスケール a においては数学的都合に応じてある程度任意に問題を定式化し，$a \to 0$ の極限をとって，対象とする問題の定式化をすればよい．

現象としての「ブラウン運動」を数学としてのブラウン運動で理解することを例にとろう．現実の複雑な運動は，花粉の中の微小粒子の運動も対数株価の動きも，あるスケール a 以下ではブラウン運動と異なる．微小粒子は水分子との衝突の間は直進するし，株の取引は離散的である．ミクロの法則が違っても，a に比べて十分長いスケールでは数学的なブラウン運動の特徴を持つ．

現象は複雑な要因が関与するので，許される誤差の範囲で細かいことはずばっと切って捨てて，だいじなところをまず抽象する．扱いたい対象に比べて極めて小さいスケールの効果は（ならして考えることで）影響が小さいとして 0 と見る．スケールに限らず量の極端な大小を論じて切って捨てるとき，オーダー（order of magnitude，大きさの

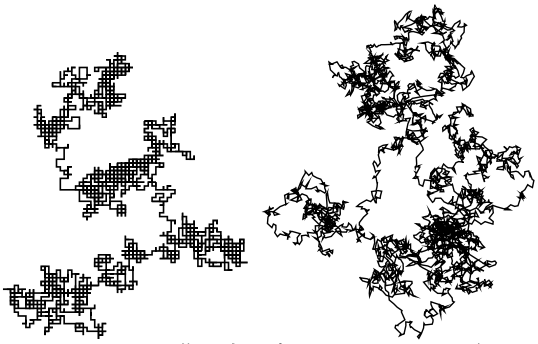

図 2　ミクロの作り方は違ってもマクロには似ることがある：2 次元単純ランダムウォーク（4000 歩）と 2 次元正規乱数係数のフーリエ級数（4000 項）の積分

程度）という言葉をよく使う．

2. 部屋の隅に寄せておいたゴミを整理する

電子は古典力学的な質点ではなく量子力学的な場である．ニュートンの常微分方程式ではなくシュレディンガーの偏微分方程式のほうが実験事実に合った．マクロの法則を先に熟知していた人類はその立場からミクロの法則に「書き直す」手続きを（第 1）量子化と呼ぶことがある．

一方，電磁場はマクロのスケールで時空 4 変数の関数，つまり，場として定式化され，マックスウェルの方程式という偏微分方程式で説明できた．しかし，そのままではミクロでは現象と合わない．たとえば，電磁場はマクロのスケールでは振幅を連続的に変えられるようにみえるが，ミクロのスケールでは電磁場がある単位（量子）の整数倍でしか相互作用（吸収・放出）しないことが光電効果という実験事実から分かった．（ちなみにアインシュタインは相対性理論ではなく光電効果の理論的説明によってノーベル賞を受賞した．）電磁場の吸収・放出現象は，場の振幅の増減ではなく量子（特定の周波数帯の電磁波を指す「光」にちなんで光量子や光子と呼ぶ）の数の増減として定式化される．質点を場に書き換えたのを第 1 量子化と呼んだように，場の相互作用に量子数という単位を持ち込んで定式化を変えることを第 2 量子化と呼ぶことがある．量子数の増減まで組み込んだ電磁場と電子の量子力学を量子電磁力学 (quantum electro dynamics, QED) と呼ぶ．場の量子論の誕生である．

形式的な定式化をすませたところで，QED を具体的に計算して実験と付き合わせよう，という段になって困難が生じる．ここで，くりこみ群の「前夜」である繰り込み理論について，具体的な計算例で問題点を示したいが，場の量子論から説き起こすのは道が遠すぎる．この節の残りで自然現象とは無関係な数式の遊びによって問題点を暗示するにとどめたい．「場の量子論でなくていいから，複雑な問題からパラメータの応答まで数学的につながった成功例を見せろ」という向きには次節に進んでいただきたい．

相互作用を含めた場の量子論は（正しく定式化された暁には）論理的には森羅万象を説明する第 1 原理となるから，解を正確に計算するのはたいがいの場合望み薄だろう．そこで近似計算となるが，電子と電磁場の相互作用の強さが電荷 e によることに注目するのは自然な成り行きである．自然現象としては決まった数字（MKSA 単位系では約 1.6×10^{-19} という小さな数字）だが，方程式の形を変えずに e をパラメータとして扱い，その e についての展開を考える（QED の摂動論）．ある手続きに従うと，異なる波長の電磁波は異なる量子自由度なので，あらゆる波長についてその寄与を足し合わせる必要がある．逆数をとって波数 k について積分するのが通の計算法である．電磁波の量子自由度の生成消滅（放出吸収）の効果が e についての展開を与え，その総和が実際に観測される電子と光子の相互作用になるはずである．かくして波数 p の光子を放出吸収する確率の計算は次のような（ただし，本物とはいささか異なる簡単な式に置き換えてある）積分に帰着する：

$$f(p) = e - e^3 \int_0^\infty \frac{dk}{k+p} + O(e^5).$$

いうまでもなく，このままでは発散する．悪いのは大きい波数 k，つまり，短い波長，記事のテーマで言えばミクロの現象に比べてもさらに小さい

「ミクロのミクロ」のスケールの寄与である．

歴史はどう進んだか？第 1 節で復習した自然法則におけるスケールの考え方に従うと，注目しているスケールに比べて十分小さい（波数の大きい）自由度からの寄与は重要でないと期待する．そこで積分の上端を Λ で切ってみる，というのは理論物理学的には素直な応急措置である：

$$\begin{aligned} f(p) - O(e^5) &= e - e^3 \int_0^{\Lambda} \frac{dk}{k+p} \\ &= e - e^3 \log \Lambda + e^3 \log p - e^3 \log(1 + \frac{p}{\Lambda}) \\ &= e - e^3 \log \Lambda + e^3 \log p + O(\Lambda^{-1}). \end{aligned}$$

発散する積分の上端を Λ で切っただけなので，このまま $\Lambda \to \infty$ としたのでは解決しないが，朝永，シュヴィンガー，ファインマン，ダイソンは困難を「部屋の隅に寄せておく」ことを考えた.（最初の 3 人はそれによってノーベル賞を受賞した.）

$$e_R = e - e^3 \log \Lambda + O(e^5) \tag{1}$$

と定義して，e を e_R について解いて $f(p)$ の右辺に代入する．その上で e_R は Λ によらない定数であると強引にみなすと，$\Lambda \to \infty$ の極限が存在して

$$f(p) = e_R + e_R^3 \log p + O(e_R^5) \tag{2}$$

と，有限の答えを得る．e_R の 3 次だけでは説得力が弱いかもしれないが，QED においては e_R の全ての次数でこの手続きは一意的に定まって $\Lambda \to \infty$ の極限が有限に存在することが証明された．これを QED の摂動論的な繰り込み可能性と言う．しかもそうやって得た計算結果は種々の実験結果と極めて高い精度で一致した．つまり，予言能力のある立派な自然法則である．

しかし,（形式的な）定式化の中になかった Λ なるスケールを途中から持ち込み，元からあった e が Λ によると思い直すのは気味悪い．怪しいだけではなく，繰り込み理論で得られる e_R の級数は収束しないと信じる理由があるので，どういう数学的実体に対する展開計算か，そもそも無矛盾な実体があるか，摂動論からは結論を得られず，場の量子論の数学的定式化はすんでいない．物理的にも，摂動論では得られない素粒子の現象が知られている．たとえば $\exp(-1/e_R)$ は摂動展開では得られない関数だが，そのような摂動展開では得られないパラメータ依存性を持つ自然現象がある．また重力場の量子論は摂動論的に繰り込み不可能，つまり，アインシュタインの方程式のパラメータの書き換えでは発散の困難を処理しきれないことが分かっている．超弦理論に至った場の量子論の 20 世紀終盤以降の発展は摂動論を守りつつ量子重力場の理論を見いだそうとする側面があるが，10 次元で理論を正当化できても実際の時空が 4 次元であることは摂動展開では説明不可能である．摂動論によらない場の量子論の定式化の必要性から逃げることはできない．

くりこみ群の気配は次の考察に始まる．(1) において左辺は実際に観測される相互作用の強さなので定数である．$\Lambda \to \infty$ とするには e を（前段落では気味悪いと書いたが）Λ の関数とせねばならない．逆転の発想で，積極的に $e = e(\Lambda)$ と考えて (1) の両辺を Λ で微分すると，

$$0 = (1 - 3e^2) \frac{de}{d\Lambda} - \frac{e^3}{\Lambda} + O(e^5),$$

あるいは，少し整理して

$$\Lambda \frac{de(\Lambda)}{d\Lambda} = e(\Lambda)^3 + O(e^5) \tag{3}$$

となる．$1 - 3e^2$ は省略した e^5 の次数にしか影響がないので見かけ上消えた．Λ は計算に取り入れた量子自由度の波数の上限だから，$a = 1/\Lambda$ は考慮した波長のスケールの下限である．この意味で『精度のスケール』と呼ぼう．すると (3) は表すべき物理量を固定しつつ精度のスケールを変えたときのパラメータ $e(\Lambda)$ の変化の様子，すなわちくりこみ群，を与える．(3) の解が非摂動論的関数形を持つことは練習問題にしておく．

K. G. ウィルソンは，20 世紀後半に場の量子論の定式化に取り組んでいた構成論的場の理論の研究者に触発されて，当時の自身の研究の 1 つである作用素積展開を波数空間から時空座標の言葉に書き直した，とノーベル賞受賞記念論文に書いている．波数の上限 Λ に対応するのは時空を格子近

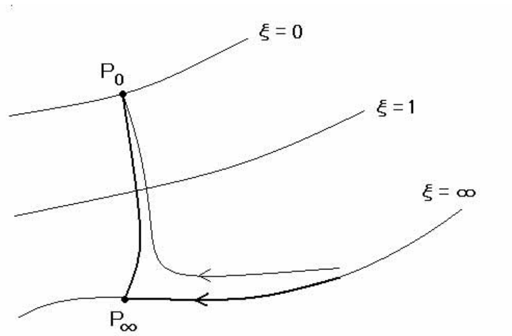

図 3 精度のスケール変換のパラメータ空間への投影，くりこみ群（ウィルソンのイメージ）

似したときの格子間隔 a である．波数ごとに量子自由度があると考える代わりに格子の各点に自由度があると考えれば結晶の統計力学のモデルを得る．統計力学には臨界現象と呼ばれる興味深い現象が知られていて，温度パラメータの調節によって格子間隔よりはるかに長くなりうる相関距離と呼ばれるスケールがある．場の量子論のモデルとすべく相関距離を素粒子現象のスケールと思い直して固定すれば，パラメータを動かすことで理論の精度を表す格子間隔 a を相対的に小さくできることになる．(3) と同様の考察で a とパラメータの関係，すなわちくりこみ群を考え，それによって $a \to 0$ の極限をとれれば場の量子論の摂動論によらない定式化となり得る．

K. G. ウィルソンは多岐にわたる研究を積み重ねて場の量子論の非摂動論的定式化と臨界現象の理論を統一的な視点で扱い，繰り込み理論でゴミ扱いした発散の困難をくりこみ群として整理した．こうして『精度のスケール変換に対応するパラメータの（自明でない）動き』という，無限自由度系を解析する新しい数学の可能性『くりこみ群』が登場した．

3. くりこみ群の優しい数学

物理学で言えば（というほどではないが）次元解析，数学で言えば（というほどではないが）同次式，でそれぞれよく知られているように，スケール変換に対して単純な応答をする量はいくらでもある．1 辺を 2 倍すれば正方形の面積は $2^2 = 4$ 倍になり，立方体の体積は 2^3 倍になる．指数 2 や 3 は対象（以下では系とも書く）の次元と呼ばれる．これに対して，第 2 節の (3) のように，スケール変換に対して次元では記述できない応答を示す量がある．理由をさかのぼると場の量子論は無限自由度の系だということに行き着く．だから，精度を有限に切ってそのスケールを変えてみると非自明な応答を得る．逆に言えば，精度のスケール変換に対する系の応答としてのくりこみ群は無限自由度系を解析する数学的手段として期待される．

とはいえ場の量子論は難しい．実際，相互作用を持つ場の量子論は時空 4 次元ではその数学的存在すら知られていないし，あっても (3)（の本物）まで行き着くのは容易でない．数学的に正当化できていない議論や計算を除くと，場の量子論のくりこみ群の数学的現状は，いくつかのモデルの特別な場合について込み入った計算や議論によって，物理的にほしい水準のはるか以前の結果を各個撃破するか，くりこみ群が使いやすい人工的なモデルや問題について，くりこみ群の可能性を期待させる水準の結果を得るか，いずれかであると言ったほうが良いと思う．第 1 節の冒頭に書いたとおりくりこみ群の数学はまだ無い．

ここでは，場の量子論とはほど遠いが，くりこみ群が数学的にうまくいく問題の中から，3 次元（プレ）ガスケット上の restricted self-avoiding path（紙面の節約のため以下 3SG 上の rSAP と略記）の結果を駆け足で紹介する．場の量子論以外には興味のない向きには次節に進んでいただきたい．

3SG は単位正四面体 F_0 を頂点でつないでできるフラクタル状の図形である．F_0 から出発して $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して帰納的に F_n を定義する．F_1 は 4 個の F_0 を図 4 のようにつないでできる 1 辺 2 の正四面体に収まる図形とする．以下これを繰り返して，F_{n+1} は 4 個の F_n を図 4 と同様につないでできる 1 辺 2^{n+1} の正四面体に収まる図形とし，n を大きくした極限の無限図形 F を 3SG と呼ぶ．（n を大きくする際，外側の 4 頂点のうち

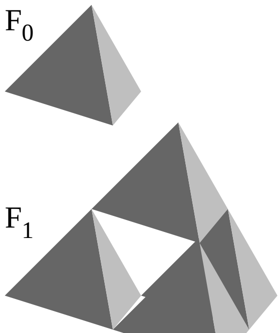

図 4　3 次元ガスケット F_0, F_1

1 つを固定して，原点としておく.）

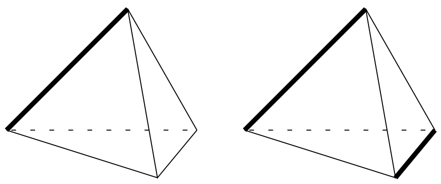

図 5　F_0 上の restricted self-avoiding path

F_n の単位四面体たちの辺の部分集合で，各単位四面体内では 1 辺または共通点を持たない 2 辺であって，F_n のいちばん外側の 4 頂点以外では途中でとぎれないものを F_n 上の端点を固定した rSAP ということにする．F_0 上の rSAP は図 5 の

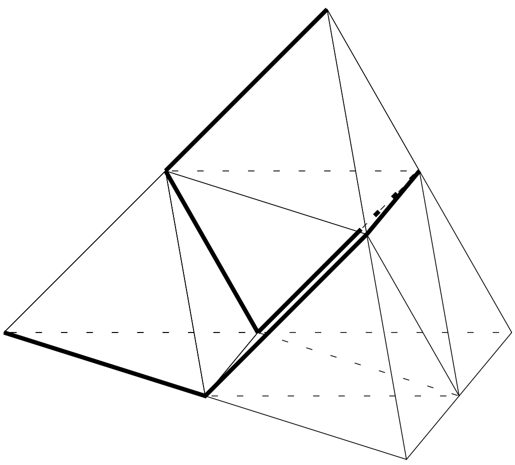

図 6　F_1 上の restricted self-avoiding path の例

2 種類だけであり，図 6 は F_1 上の rSAP の例である．F_n 上の端点固定 rSAP は一筆書きで書ける図形と二筆書きを要する図形の 2 種類なので，その集合をそれぞれ $W_{n,1}$ と $W_{n,2}$ とおく.

複雑な図形の集合を扱うのに母関数を考えるのが有効である．折れ線 $w \in W_{n,i}$ に対して w と F_n の単位正四面体たちとの共通部分は空集合と有限個の点の場合を除くと図 5 の左図か右図のタイプに分類できるので，それぞれの個数を $s_1(w)$ と $s_2(w)$ とおき，その結合母関数を次で定義する：

$$\Phi_{n,i}(x,y) = \sum_{w \in W_{n,i}} x^{s_1(w)} y^{s_2(w)}.$$

さて，F_{n+1} 上の端点固定 rSAP たちの縮尺を半分にすると，F_n 上の rSAP たちに単位長さが半分の細かいギザギザを付け加えた折れ線と見ることができる．たとえば図 6 を半分に縮小した図は図 5 の左図にこまかい構造を付け加えた，と見る．その意味で $W_{n+1,i}$ は $W_{n,i}$ の精度を 2 倍に細かくしたもの（**精度のスケール変換**）と見る．そしてそれに対する母関数の値 $(x_n, y_n) = (\Phi_{n,1}, \Phi_{n,2})$ の変化 $n \mapsto n+1$ を考えると，$(x_0, y_0) = (x, y)$ を初期値とする漸化式

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \Phi_{1,1}(x_n, y_n), \\ y_{n+1} &= \Phi_{1,2}(x_n, y_n), n = 0, 1, 2, \cdots \end{aligned} \tag{4}$$

（3SG 上の rSAP の**くりこみ群**）が成り立つ．**パラメータ空間**は母関数の値域平面である．なお，くりこみ群は力学系だが群とは限らない.

F の原点を端点とする折れ線で，F の単位単体の辺の上を通り，同じ点は 2 度通らず一筆書きで書け，各単位単体との共通部分は図 5 のいずれかになっているものを F 上の rSAP と呼び，特に長さ k の rSAP について等しい重みで平均する操作（期待値）を E_k と書くことにする.

$0 < y_f < x_f^2$ なる (4) の固定点 (x_f, y_f) の存在と $(x, y) = (x_c, x_c^2)$ を初期値とする (4) の軌道が (x_f, y_f) に収束するような x_c の存在が証明できる．このことから長さ k の rSAP ω の終点の原点からの距離を $|\omega|$ と書くとき，

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\log E_k[|\omega|^s]}{\log k} = s\nu$$

が任意の $s \geq 0$ に対して成り立つことが証明でき

る．ここで，くりこみ写像 $(\Phi_{1,1}, \Phi_{1,2})$ の (x_f, y_f) における微分写像（ヤコビ行列）の大きい方の固有値を λ とおくとき $\nu = \dfrac{\log 2}{\log \lambda}$ である．この定理は，長さ k の rSAP の終点が k^ν のオーダーで原点から離れていることを意味する．ν を変位の指数と呼ぶことにすると，ν が λ で書けることは，変位の指数がくりこみ群解析で得られることを意味する．しかも，くりこみ群のしかるべき固定点

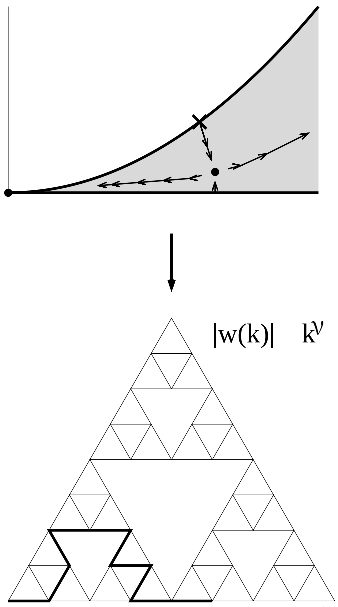

図 7　くりこみ群の大局的流れから漸近的性質へ（dSG 上の rSAP のくりこみ群解析の成功）

に収束する軌道の存在から変位の指数が得られることは一般の d 次元ガスケット dSG 上で成り立つ定理である．

この節で紹介した例では，並進対称性もマルコフ性も無く数学的解析手段が他に無い問題で『精度のスケール変換に対する系の応答のパラメータ空間による記述』としてのくりこみ群解析が数学的に成功した．ただし，くりこみ群の真の成功にはパラメータ空間上の力学系がしかるべき部分集合上ですなおな流れを持つこと（固定点に収束する軌道の大局的存在）の証明が必要だが，その証明まですんでいるのは 4 次元ガスケットまでである．くりこみ群の「優しい」例といえどもあなどれない．

4. 夜明け前がいちばん暗い

くりこみ群に向いた問題については第 3 節で一例を紹介したように，K. G. ウィルソンがかつて描いた図 3 のような『精度のスケール変換に対応するパラメータ空間上の力学系のすなおな流れ』が数学的に証明される．無限自由度系を解析する手段としてのくりこみ群の可能性は途絶えていない．

しかし，本質的問題が残る．くりこみ群向きの問題では，それぞれ個別の理由で，対応する力学系が少数有限次元であったり，本質的なパラメータが事前に分かっていて残りが数学的に評価できる．結果としてパラメータ空間の適当な部分集合上での力学系の『すなおな流れ』が証明できる．一方，無限自由度の問題を翻訳すれば無限次元の力学系になるのが普通であり，一般にはその流れがすなおであることを言うのは難しい．くりこみ群のすなおさについての汎用性ある一般論が無いという意味で，くりこみ群の数学はまだ無い．にも関わらずそれを数学の記事に書くのは，今が数学としてのくりこみ群の夜明け前と思うからである．

夜明け前の暗闇に夜明けの兆候を見つけるのは難しい．しかし，ひとたび空が白み始めれば夜明けはすぐにやってくる．

参考文献

1) 第 2 節の表題について．インタビュー集:　P.C.W.Davies, J.Brown (eds.), *Superstrings: A theory of everything?* Cambridge University Press, 1988,　の中で，編者が繰り込み理論について，発散の困難を ‘packaging them up and sweeping them on one-side’ した，と要約し，ファインマンが ‘Exactly yes. That’s quite accurate.’ と答えている．

2) 図 3 は，くりこみ群に関する金字塔的論文：K.G.Wilson, J.Kogut, *The renormalization group and the ϵ expansion,* Physics reports **12** (1974) 75–200,　の図を再現した．

3) 第 3 節の内容は，　服部哲弥,「ランダムウォークとくりこみ群 — 確率論から数理物理学へ —」共立出版（シリーズ「新しい解析学の流れ」），2004.8, http://www.math.tohoku.ac.jp/ hattori/kyoritu.htm に詳しく解説した．この本以降の展開については http://www.math.tohoku.ac.jp/ hattori/etc.htm の下の『求む「正しくて良い定理」！』を参照.

（はっとり・てつや，東北大学・理）