N. Madras, G. Slade: The Self-Avoiding Walk,

Birkhäuser, 1993 年, 425 ページ.

本書は $\mathbf{Z^d}$ 上の self-avoiding walk の定量的評価について 1992 年頃の一つの数学的到達点を示す専門書であり，self-avoiding walk の数学に関する古典的な結果から最近の結果までを網羅した手応えのある本格的教科書である．Self-avoiding walk は古い問題であると同時に近年進歩した部分のある問題でもあるが，ここでは本書の今日的意義を中心に紹介する．その立場から見ると本書の構成は，導入部 (1, 2 章)，全ての次元で有効な方法 (3, 4, 7, 8 章)，高い次元で有効な lace 展開の方法 (5, 6 章)，Monte Carlo 数値計算法のアルゴリズム (9 章)，関連話題 (10 章)，となる．

Self-avoiding walk とは空間上の道であって同じ点に

二度と戻らないものである．d を自然数とする．w が d 次元格子空間 $\mathbf{Z^d}$ 上の長さ N の self-avoiding walk とは $\mathbf{Z^d}$ の有限列 $w = (w(0), w(1), \cdots, w(N))$ であって，

$$|w(i) - w(i+1)| = 1, \ i = 0, 1, \cdots, N, \tag{1}$$

および

$$w(j) \neq w(i), \quad j \neq i, \tag{2}$$

を満たすものである．ここで $|\cdot|$ は $\mathbf{Z^d}$ を $\mathbf{R^d}$ に自然に埋め込んだときのユークリッド距離である．w の隣り合う各項の点をつないで $\mathbf{R^d}$ の折れ線を作るとき，線分で結ぶのは最も近い点に限るというのが条件 (1) であり，(2) はこの折れ線が自分自身と交わらないことを意味する (self-avoiding).

W_N を原点 O から出発する $(w(0) = O)$ 長さ N の self-avoiding walk の集合とする．Mean-square displacement

$$< |w(N)|^2 > \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{c_N} \sum_{w \in W_N} |w(N)|^2$$

は N歩で出発点からどれくらい遠くまで到達できるかを測る量である．

$$c_N \overset{\text{def}}{=} \sharp W_N$$

は self-avoiding walk の本数．この量は $N^{2\nu}$ のように N のべきで増大すると予想して，

$$\nu \overset{\text{def}}{=} \lim_{N \to \infty} \frac{\log < |w(N)|^2 >}{2 \log N} \tag{3}$$

と（右辺が存在すれば）おこう．条件 (2) を課さない simple random walk では，対応する量は d の値によらず $\nu = 1/2$ となることは容易に分かる．

$d = 1$ の場合，self-avoiding walk とは自明に線分のこと，従って $\nu = 1$ である．以下 $d \geq 2$ とする．定義の簡単なこと（及び $d = 1$ の場合には自明なものであるこ

と）とはうらはらに，self-avoiding walk の集合の性質は一般に極めて難しい．本書第 2 章に要領よくまとめられているように，この問題は化学及び物理学で詳しく研究されてきたが，古典的な予想値 (Flory の値)

$$\nu = \frac{3}{d+2} \ \ (d < 4), \quad \frac{1}{2} \ \ (d \geq 4), \tag{4}$$

は数値的にはいい近似値になっている．

さて，Hara と Slade は次の結果を証明した [5, 6]：任意の $d \geq 5$ に対して $D > 1$ が存在して，任意の$\epsilon < 1/4$ に対して歩数 N についての漸近評価

$$< |w(N)|^2 >= D\,N\,\Big(1 + O(N^{-\epsilon})\Big) \tag{5}$$

が成り立つ．即ち，(3), (4) を $d \geq 5$ で肯定的に，しかも非常に精密な形で，解決した．Slade は本書の著者の一人であり，(5) の証明の解説が本書の一つの今日的意義であると言ってよかろう．

証明のための特徴的な道具は本書第 5 章において導入される lace 展開 [1] である．

$$G_z(x) = \sum_{N=0}^{\infty} \sharp\{w \in W_N \mid w(N) = x\} z^N \qquad (6)$$

(Green 関数) に対して，

$$\hat{\Pi}_z(k) \stackrel{\mathrm{def}}{=} 1 - 2\,z \sum_{i=1}^{d} \cos k_i - \left(\sum_{x \in \mathbf{Z^d}} G_z(x) \exp(\sqrt{-1} \sum_{i=1}^{d} k_i x_i) \right)^{-1}, \ k \in [-\pi, \pi)^d,$$

は simple random walk では 0 になる．Self-avoiding walk に関する和を取ることは，walk が自分と交わったら 0 になる因子を各項に掛けておいて条件 (2) を落とした walk について和を取ることと等しい．このことを用いると，$\hat{\Pi}_z$ を walk に関する和に書き直すことができるが，この和を walk の自己交差の回数に関する級数の形にまとめ直して lace 展開を得る．

$d \geq 4$ での (4) の予想値 $\nu = 1/2$ は simple random walk と同じ値である．本書第 6 章で証明が遂行されるように，証明の戦略は，simple random walk の詳しい性質を使って lace 展開の各項を評価することで，展開が収束しかつ $\hat{\Pi}_z$ が z の然るべき範囲で小さいことを言う，というものである．この意味で simple random walk と self-avoiding walk との差が $d \geq 5$ では小さい．Lace 展開で直接得られるのは (6) のような長さ $N = |w|$ の母関数の評価であって，そこから $< |w(N)|^2 >$ や c_N などの N を固定した量の評価を得るには Tauber 型の考察を行う．

本書に紹介される深い証明には物理の一分野である統計力学に由来する思想的背景がある．あまたあり得る定義のうちで $G_z(x)$, $\hat{\Pi}_z$ などがよい考察の対象であることは統計力学が示唆する．ν のような指数を臨界指数と呼ぶのも統計力学の歴史から来る．本評では専ら ν を取り

上げているが，考察の対象となる量は他にも種々のものがあり，それらについても本書は詳しく述べている．

$d \geq 4$ では self-avoiding walk が simple random walk と同じ臨界指数を持つことを知らなければ lace 展開が有効であることは予想しにくいが，この著しい d 依存性も統計力学，特にくりこみ群の描像によって確立した．実際 lace 展開を発見した Brydges–Spencer は，self-avoiding walk を意識した別のモデル (weakly self-avoiding walk) において，くりこみ群の描像を意識しながら証明を組み立てた [1]．

くりこみ群の描像は結果的に $d \geq 5$ の self-avoiding walk では回り道であった．Slade は十分大きい d に対して (5) を証明した [8]．[1] からの最大の技術的改良は z に関する連続性を用いる dichotomy argument (6.2.1 節)

の援用である．大きい d での証明が先行したのは，d が大きいときは $1/d$ が lace 展開の展開係数の役割を果たすからである．

$d \geq 5$ まで至ったのが Hara–Slade である．[8] から [5, 6] への技術的改良は，$d = 5$ まで Slade の論法を引っ張るための評価の改善（本書に紹介がないので [5, 6] を参照）と，Tauber 型の考察を見通しよいものにする fractional derivative の導入 [5] である（本書 6.3 節で紹介される）．

$d \geq 5$ とは対照的に $d \leq 4$ のときの self-avoiding walk の詳細な性質はまだ分かっていない．全ての d で成り立つ結果については本書のいくつかの章が割かれている．第 3 章は図形的組み合わせ論的考察による c_N の上からの評価を紹介している．第 4 章は Green 関数 (6) の x についての漸近評価を与える．Subadditivity や renewal theory

などが用いられる．第 7 章は self-avoiding walk の部分図形 (pattern) の出現頻度に関する Kesten の結果などの紹介である．特に結果として $\lim_{N\to\infty} c_{N+2}/c_N$ の存在などが得られる．第 8 章は端点を固定するなど constraint をつけたときの本数の評価の紹介である．

$d \le 4$ は数学的に未解決だが，$d \ge 5$ とは様相が非常に異なることが (4) からも予想される．そこで数値計算の示唆にも目を配る必要が生じる．本書第 9 章は数値計算，特に Monte Carlo 法と呼ばれる方法にあてられているが，これは本書のもう一つの今日的意義であろう．統計誤差や dynamic Monte Carlo 法で問題になる自己相関に関する評価定理も与えている．アルゴリズムは幅広く収録し，解説している．

Weakly self-avoiding walk を含む，関連モデルは本書

第 10 章に紹介されている．また，lace 展開の適用という観点から十分大きい d における percolation に関する結果が 5.5.2 節に与えられている．Percolation に関しては樋口氏による Grimmett の教科書の書評 [2] を参照していただきたい．関連教科書としては他に，simple random walk を中心に据えて self-avoiding walk, harmonic measure, DLA, simple random walk の intersection などを扱った [7] も読みやすい．

本書は第 1 章に定義と基本的な問題がまとめられているので予備知識なしに読める．各章は独立性が高いので参考書としても使いやすい．前書きには「飛ばし読み」のガイドもあり，巻末の記号一覧表とともに便利である．

数学的には self-avoiding walk は 1993 年時点で $d = 2$, 3, 4 が未解決である．今後の展望を書いておくことも本

書の位置づけに役立つかも知れない．以下は専門家との対話などをふまえた上での評者の独断であることをお断りしておく．

統計力学，特にくりこみ群の描像は $d \geq 4$ で (4) が正しいことの根拠を与えた．数学としての次の目標は $d = 4$ である．$d = 4$ では lace 展開の各項が発散して Hara–Slade の方法が使えないと予想される．現在 weakly self-avoiding walk が攻略目標となっているが，くりこみ群の描像の厳密化が（Brydges–Spencer とは違う枠組みで）適切な方法と見られている．本来の self-avoiding walk については (4) が正しいことは誰も疑わないが，証明は weakly self-avoiding walk よりさらに難しい．

$d = 2$ では (4) が正しいと信じる意見が多い．2 次元の特殊性を利用できるという予想に基づく．しかし，数

学的証明の報告は聞かないし，全ての専門家がこの根拠に納得しているとまでは言えない．本書では d 次元格子空間上の self-avoiding walk のみが扱われるが，一般に点の集合と点の対 (edge) の集合即ちグラフが与えられれば，同様にグラフ上の self-avoiding walk を考えることができる．Sierpinski gasket とその 3 次元版の pre-fractal の上の self-avoiding walk についてはくりこみ群の描像に沿った数学的な証明が可能である [3, 4]．これらのグラフはある意味で 1 と 2 の間の次元を持つので，$\mathbf{Z^2}$ におけるくりこみ群的理解が見えてくることを期待したい．

$d=3$ は難しい．(4) が正しいと予想する人もいるし，より低い値になるという（非数学的）議論もある．最近 (4) の値を数学的に意味付ける試みがなされた (Kusuoka, unpublished) が，$d \le 4$ の攻略にはいろいろな視点が必

要である．

Self-avoiding walk は Ising 模型や percolation とともに共通の特徴を持つ．例えば，特徴的な漸近的振る舞い（臨界指数），その d 依存性，特に上方臨界次元 d_u が存在して $d \geq d_u$ では d に依存しない臨界指数を持ち，$d < d_u$ ではその値（平均場理論の値）からずれるなどの予想や結果である．これらのモデルは $\mathbf{Z^d}$ 上の無限自由度系を扱うような数学の未来の一分野を形成する核になる．本書は 21 世紀に開かれたそのような研究の 20 世紀側の一里塚の一つであると言えると思う．

文　献

[1] D. C. Brydges, T. Spencer, *Self-avoiding walk in 5 or more dimensions,* Commun. Math. Phys. **97** (1985)

125–148.

[2] 樋口保成, 数学 **46**–**1** (1994) 79–80.

[3] K. Hattori, T. Hattori, S. Kusuoka, *Self-Avoiding Paths on the Pre-Sierpinski Gasket,* Probab. Th. Rel. Fields **84** (1990) 1–26.

[4] K. Hattori, T. Hattori, S. Kusuoka, *Self-avoiding paths on the three dimensional Sierpinski gasket,* Publ. RIMS **29** (1993) 455–509.

[5] T. Hara, G. Slade, *Self-avoiding walk in five or more dimensions, I, The critical behaviour,* Commun. Math. Phys. **147** (1992) 101–136.

[6] T. Hara, G. Slade, *The lace expansion for self-avoiding walk in five or more dimensions,* Reviews in Math. Phys. **4** (1992) 235–327.

[7] G. F. Lawler, *Intersections of random walks,* Birkhäuser, Boston, 1991.

[8] G. Slade, *The diffusion of self-avoiding random walk in high dimensions,* Commun. Math. Phys. **110** (1987) 661–683.

（服部哲弥）