ルベーグ積分論（測度論）　（解析学概論 B1；数学科３年必修）
2005 年度前期火曜２限 (10:30–12:00) 川内キャンパス C406
服部哲弥 2005/04/12

講義予定表　（節番号は教科書（伊藤清三）の該当節）

日	節	内容
4/12 4/19 4/26	§2, 3, 6	イントロ，準備（集合関数）， σ（シグマ）加法族と測度の定義，ボレル σ 加法族
5/3	祝日	
5/10 5/17	§10, 12, 13, 14	単関数と可測関数， 積分の定義（単関数，非負値可測関数，一般の可測関数） 積分の基礎性質（線形性，絶対連続性）
5/24	中間試験	
5/31	§12, 13, 14	続・積分の基礎性質（続き，ファトウの補題，優収束定理）
6/7 6/14 6/21	§4, 5, 8, 9	ルベーグ測度の存在 （有限加法性，外測度，単調族定理，拡張定理，完備化）
6/28	§7, 11, 12, 16	ルベーグ積分の基本性質（位相的性質，並進対称性など）
7/5	内容調整	基本性質の続き または 直積測度とフビニの定理概論
7/12	期末試験	

教科書． おおむね，伊藤清三，ルベーグ積分入門，裳華房，数学選書４，の前半から．

参考書． URL: `http://www.math.tohoku.ac.jp/ hattori/hattori.htm` の下の ／講義／ルベーグ積分 に講義ノートや過去問を貼ってあります．前々任地６年前のものなので，どれほど参考になるか未定ですが，利用して下さい．また同じ URL の下の ／雑記帳／大学院入試問題（測度論） には（講義ルベーグ積分のページからもリンクを張ってありますが），1990 年代を中心とした院試の中から講義に該当する問題を集めて私自身の略解とともにまとめたファイルを貼ってあります．自習にぜひ活用して下さい．

試験． 成績評価は中間及び期末試験によります．それぞれ試験前までの講義の範囲に対応する講義，教科書，入試問題集，過去問，を完全に理解していることを理想として，試験を行う予定です．

演習　佐藤得志先生の担当する解析学概論Ａ２演習（水曜午後）とは内容的に連携しています．実力を付けるために，また，場合によっては講義で不十分だった箇所の補完を佐藤先生にお願いする場合もあり得ますので，演習に積極的に参加して下さい．

T.A.　渡部拓也君（Ｄ３）

連絡先． 服部哲弥 `hattori@math.tohoku.ac.jp`　（数学棟 512）

講義メモ（各時間の講義内容計画　兼　受講者予習復習用チェックリスト）

1　イントロ (4/12)

1.1　量を測ることの数学概念としての測度と測度としての積分

・「量（大きさ，分量）をはかる」ということの数学的に厳密かつ有用な定義
個数，長さ，面積，体積，n 次元体積
抽象化：全てをまとめて測度と呼ぶ　→　集合関数としての測度，非負値性，加法性
・面積としての（１変数実）関数の定積分　→　拡張性の良さ（任意の空間）

1.2　究極の数学的理想化精密化としての σ 加法性

・集合関数としての測度　→　定義域の問題：どのような集合が「はかれる」か？　→
可測集合（外からと中からで覆って誤差がなければよい）
・σ 加法性：極限操作の可能な測度の概念　→　σ 加法族
・拡張定理（存在定理）：有限加法的測度は σ 加法性を持てば σ 加法族に拡張できる！
一見複雑だが，ひとたび基礎を固めるとあとは頑丈で使いやすい
•可測関数:「囲んだ部分が可測集合になる関数」　→　操作の容易な定義 $f^{-1}((a,\infty)) \in \mathcal{F}$
・関数の可測性と可積分性を隔てるのは「$\infty - \infty$」だけ（絶対収束の類似）
・長さ 1 の区間は長さ 0 の点からなるから長さ 0 !? → σ 加法性は加法性の究極の精密化
・ リーマン可積分ならばルベーグ可積分で値は一致

1.3　普遍性　ー　応用の広さ

測度論・積分論が由緒正しい一般化であることの傍証

1.3.1　２つの関数がどれくらい違うかを計る

関数空間のノルム（２点＝ここでは２つの関数，の違いを計る概念：0，三角不等式，スカラー倍），一様収束← sup ノルムは既習だが $\cdots$
例： $[0,1]$ 上の多項式の集合．リーマン積分で定義した L^1 ノルム
短距離の変動発散：L^1 ノルムはならすので sup ノルムよりおおらか
長距離（無限遠）の減衰 (decay)：積分は $1/x$ より早い decay を要求する
ルベーグ積分によることの利点？　→　完備性（極限と積分の可換性）

1.3.2　n 次元ルベーグ測度以外の測度

あらゆる「はかること」を統合して議論できる（全順序や成分の数から決まる次元は測度の必要条件ではない！）
・級数も測度である　・フラクタルとハウスドルフ次元
・無限次元空間，例：関数の集合の上の測度（大きさがはかれる！）例：Wiener 測度

2　準備＝集合算と集合関数 (4/12, 19)

2.1　集合関数

2.1.1　集合と集合族

（実数値）関数は要素に実数値を対応させる．定義域は要素を集めた集合．
集合関数は集合に実数値を対応させる．定義域は集合族

2.1.2　集合関数の例

個数
長さ
確率

2.2　集合算

可算個の集合 $A_1, A_2, A_3, \cdots$ の間の演算
$A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ ＝いずれかの A_n に含まれる要素全てを集めた集合　（∞ という記号を使っても，極限点を要素に含める意味はない）
$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ ＝全ての A_n に含まれる要素全てを集めた集合
交換，結合，分配，ド・モルガン，の各法則は無限個の集合算でも成立
$\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$ ＝有限個を除いて全ての A_n に含まれる要素からなる集合
$\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ ＝無限個の A_n に含まれる要素からなる集合
単調な包含関係があるとき，つまり，$A_1 \subset A_2 \subset \cdots$ や $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ が成り立つときはいずれも簡単になるが

2.3　その他の注意

$\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$
A^c, $A \setminus B = A \cap B^c$, $f^{-1}(A) = \{x \in \Omega \mid f(x) \in A\}$
直積 $A \times B$
集合 $A \subset \Omega$ の定義関数 $\chi_A:\ \Omega \to \mathbb{R}$：$\chi_A(x) = 1,\ x \in A, = 0,$ otherwise
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ では a_∞ なる項を足す意味はないが，値域に ∞ を許す関数を考えるときは場合分けに ∞ が明示的に入りうる
可算と非可算，$\mathbb{Q}$ と $\mathbb{R}$，並べるということ

3　σ 加法族と測度 (4/19, 4/26)

3.1　σ（シグマ）加法族の定義

σ 加法族：測度が定義されている集合を要素とする集合族

・定義：補集合と可算和の演算で閉じる Ω を要素に持つ集合族

理解：測度の定義の一部（補集合：外と中からの近似の一致が可測，可算和：σ 加法性，「Ω を要素に持つ」$\Leftrightarrow$「空でない」）

例 ∵ 最小の（全体集合 Ω が何でも）σ 加法族 $\{\emptyset, \Omega\}$

・$\Omega = \mathbb{R}$ に限ってもいろいろな σ 加法族がある

・$\{\emptyset,\ (-\infty, 0],\ (0, \infty),\ \mathbb{R}\}$ （一般に $A \subset \Omega$ を含む最小の σ 加法族は $\{\emptyset,\ A,\ A^c,\ \Omega\}$）

・$\mathcal{B}_1$：区間（$(a, b],\ a < b,$ の形の集合）を全て含む最小の σ 加法族（開集合を全て含むことになるので下記ボレル σ 加法族になる）

3.2　測度の定義

・定義：Ω の部分集合を要素とする σ 加法族 $\mathcal{F}$ を定義域として非負実数または $+\infty$ に値を取る集合関数であって σ 加法性を満たすもの

要点：集合関数であることと非負値性と σ（可算）加法性

・例：さいころの確率 $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，$\mathcal{F} = 2^{\Omega}$, $\mathrm{P}[\ \{w\}\ ] = 1/6$ （根元事象を持つ場合なので高校の教科書に同じ）

非可測集合の例：２枚の硬貨 $\Omega = \{(i, j) \mid i, j = 0, 1\}$．２個目だけに注目した σ 加法族 $\mathcal{F} = \{\emptyset,\ \{(0, 0),\ (1, 0)\},\ \{(0, 1),\ (1, 1)\},\ \Omega\}$, $\mathrm{P}[\ \{(0, i),\ (1, i)\}\ ] = 1/2,\ i = 0, 1,$ における両方の目に依存する集合 $\{(1, 1),\ (0, 0)\} \notin \mathcal{F}$ など

情報としての σ 加法族：自明な（最小の）σ 加法族 $\subset$ １枚目の硬貨だけに注目した σ 加法族 $\subset$ ２枚の硬貨両方を考えた σ 加法族 $= 2^{\Omega}$

・$\mathbb{R}$ の長さ，$\mathbb{R}^2$ の面積，等は少し準備がいる

・「ほとんどいたるところ〇〇」とは，〇〇が成り立たない $x \in \Omega$ の集合の測度が 0 であること

・ $\mu(\emptyset) = 0$，単調性，劣加法性，連続性（減少列は $\mu(A_1) < \infty$）

3.3　ボレル σ 加法族

全体集合 Ω に位相（開集合，近傍，閉集合）が定義されているとき

・定義：開集合を全て要素として持つ最小の σ 加法族（閉集合としても同値）（意図的に定義域を制限する場合を除き用いられる殆どがボレル）

・開集合族が**生成**する σ 加法族とも言う（後述）

・$\mathbb{R}^n$ のボレル σ 加法族 $\mathcal{B}_n$：１点集合，$\mathbb{Q}$，カントール集合

・ 位相空間の測度有限なボレル可測集合は閉集合で中から，開集合で外から任意の精度で測度を近似できる（差集合の測度を任意に小さくできる）（Lindelöf の被覆定理→開集合は可算個の開区間で覆える）

・位相的性質の例：Lusin の定理（後述）＝可測関数の連続関数による積分近似

4　単関数と可測関数 (5/10)

測度空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$（全体集合とその部分集合を要素とする σ 加法族とそれを定義域とする測度の３つ組）を固定

4.1　単関数

定義：互いに共通部分を持たない可測集合の定義関数の（有限個の）線形結合 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{A_k}$

注意：$A_k \in \mathcal{F}$ は $\mu(A_k) = \infty$ を許すが，値域は実数 $|c_k| \neq \infty$

例：$(\mathbb{R}, \mathcal{B}_1, \mu)$（１次元ボレル測度）は１点集合が可測なので可算集合は可測　$\to$　$\chi_{\mathbb{Q}}$ は単関数．リーマン積分の短冊による近似と同程度の技術的複雑さではるかに数学的に精密になる余地がある

4.2　（実数値）可測関数

一般の可測空間 $(\Omega', \mathcal{F}')$ を値域とする関数の場合の可測性の定義：$(\forall A' \in \mathcal{F}')\ f^{-1}(A') \in \mathcal{F}$．以下では $\Omega' = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, $\mathcal{F}' = \sigma[\mathcal{B}_1 \cup \{\{\infty\}, \{-\infty\}\}]$ に限ると，次の定義と同値

・**定義：**$f:\ \Omega \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ **が可測関数とは** $(\forall a \in \mathbb{R})\ \{x \in \Omega \mid f(x) > a\} \in \mathcal{F}$（$f(x) > a$ は $f(x) = \infty$ を許す）

・単関数は（有限値の）可測関数の極めて重要な例である（全ての可測関数は単関数で，各点および積分の意味で近似できる：後述）

・f が可測なら $-f$, $f_+ = \max\{f, 0\}$, $f_- = -\min\{f, 0\}$，$|f|^a$ $(a \neq 0$, ただし $a < 0$ ならば $0^a = \infty)$，も可測

・f, g が（有限）実数値をとる可測関数で a, b が実数ならば $af+bg$, fg も可測（$f(x) = \pm\infty$ は，定義されない $\infty - \infty$ に注意）

・f_n が可測関数列ならば $\sup_n f_n$, $\inf_n f_n$, $\displaystyle\overline{\lim_{n\to\infty}}\, f_n$, $\displaystyle\underline{\lim_{n\to\infty}}\, f_n$, $\lim_{n\to\infty} f_n$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$（最後の２つは極限の存在する点の集合が可測で，その上で）も可測関数

・標準的単関数近似列 f_n の非減少各点収束極限による表示（$f \geqq 0$ の場合，$(k-1)2^{-n} < f(x) \leqq k2^{-n}$, $1 \leqq k \leqq n2^n \to f_n(x) = (k-1)2^{-n}$，$f(x) > n \to f_n(x) = n$）

・関数列が関数に概収束するとはほとんどいたるところ各点収束すること，つまり測度 0 の集合をうまく除外すれば各点収束していること．

・エゴロフの定理：測度有限な集合上の可測関数列が有限値（当然可測）関数に概収束していれば，任意の $\epsilon > 0$ に対して，測度 ϵ 以下の集合をうまく除けば一様収束する（これがあると，可測関数の積分において単関数近似列の取り方によらず積分値の極限が一致することが言える）

5　積分の定義 (5/10, 5/17)

★ 定義はとても単純！

5.1　単関数の積分の定義

・ $\int_\Omega \chi_A \, d\mu = \mu(A)$ と線形性で定義

5.2　非負値可測関数の積分の定義

・ 標準的非減少単関数近似列の積分値の極限で定義

5.3　一般の可測関数の積分の定義

・ $\int f_\pm \, d\mu$ 両方とも ∞ のときのみ定積分がない
・ $\left| \displaystyle\int f \, d\mu \right| \leqq \displaystyle\int |f| \, d\mu$

5.4　補足

・ **単関数近似列の取り方によらない**：標準的でなくても非減少単関数列が概収束していれば積分も収束（エゴロフの定理から容易）
・ **積分可能（可積分）**：定積分があって $\pm\infty$ でない場合（有限値になる場合）
・ 可積分 $\left| \displaystyle\int f \, d\mu \right| < \infty$ と $\int |f| \, d\mu < \infty$ は同値

6　積分の基礎性質 (5/17, 5/31)

6.1　単調性，絶対連続性，積分範囲に関する加法性，線形性

絶対連続性：$\mu(E)=0$ ならば $\int_E f\,d\mu = 0$

6.2　収束定理

積分とパラメータに関する極限が交換できるための役に立つ十分条件

6.2.1　単調収束定理

・$\int f_1\,d\mu > -\infty$（$f_1 \geqq 0$ を仮定することが多いが本質は $\infty - \infty$ の排除）, $f_n \uparrow f$ （各点）ならば $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int f_n\,d\mu = \int f\,d\mu$

・積分範囲に関する可算加法性，連続性（$E_n \uparrow E$ なら $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{E_n} f\,d\mu = \int_E f\,d\mu$）

・これ以下の定理は全て単調でない場合をやるため

6.2.2　ファトウの補題

・$f_n \geqq 0$, a.e., ならば $\displaystyle\int \varliminf_{n\to\infty} f_n\,d\mu \leqq \varliminf_{n\to\infty}\int f_n\,d\mu$

6.2.3　優収束定理

・$\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n = f$ and $|f_n| \leqq \phi$, a.e., かつ ϕ が可積分ならば $\displaystyle\int \lim_{n\to\infty} f_n\,d\mu = \int f\,d\mu$

・以下は，優収束定理の書き換え

　・有界収束定理：積分範囲が測度有限で，f_n たちが一様有界で，各点収束していれば積分と極限の順序交換ができる

　・項別積分定理：$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\int |f_n|\,d\mu < \infty$ ならばほとんどの x で $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ が存在（有限）して級数和と積分の順序が交換できる

6.2.4　パラメータ微分と積分の交換

　・優収束定理でパラメータ n を連続パラメータ（$\epsilon \to 0$, $a \to \alpha$, $t \to \infty$ など）に置き換えても同じ条件下で積分と極限が交換できる（**連続パラメータの極限と積分の交換**）

　・さらにそれを微分の定義式に対して用いれば，たとえば f_a の a についての微分が各点で存在して a によらない可積分関数で bound されていれば，パラメータ微分と積分が交換できる

7　ルベーグ測度の構成 (6/7, 6/14, 6/21)

7.1　ルベーグ測度

・ 広い意味の（ルベーグ）測度,（ルベーグ）積分：一般論では空間 Ω は何でも良い
例：
・級数は積分である
・確率は積分である
・σ 加法族は「情報」を表す
・（狭い意味の）ルベーグ測度
1 次元ルベーグ測度：区間 $[a, b]$ $(a < b)$ の測度が $b - a$ で与えられる $\mathbb{R}$ 上の測度（定義域最小のものはボレル測度．完備化したものをルベーグ測度と呼ぶことが多い）
n 次元ルベーグ測度：$\mathbb{R}^n$ 上の測度であって，全ての n 次元直方体の測度が，通常の意味で辺の長さを掛け合わせたもので与えられる測度.
・ （狭い意味の）ルベーグ積分：狭い意味のルベーグ測度による積分
直積測度（フビニの定理）を除けば，講義では主に $n = 1$ の場合を講義する

7.2　カラテオドリの拡張定理

構成＝指定された性質を持つ数学的対象の存在を作ってみせる方法で証明

7.2.1　集合族が生成する σ 加法族

集合族 $\mathcal{I}$ が生成する σ 加法族 $\sigma[\mathcal{I}]$ とは $\mathcal{I}$ を含む最小の σ 加法族
例：位相空間のボレル σ 加法族は開集合族が生成する σ 加法族
・ 近似定理：$(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ で $\mathcal{A}$ が有限加法族，$E \in \sigma[\mathcal{A}]$ が測度有限なら $E \triangle A$ がいくらでも小さい $A \in \mathcal{A}$ がある [西尾，二章定理 5]
cf. 位相空間のボレル可測集合は閉集合で中から，開集合で外から任意の精度で測度を近似できる（既出）

7.2.2　有限加法族と有限加法的測度

・ **有限加法族**：補集合と和集合に閉じている空でない集合族
・ **有限加法的測度**：非負，加法的集合関数　→　$m(\emptyset) = 0$，有限加法性，単調性，有限劣加法性
・ カラテオドリの拡張定理（気持ち）：σ 加法性を持つ有限加法的測度は定義域が生成する σ 加法族上の測度に拡張される（以下で証明）

7.2.3　有限加法族が生成する σ 加法族と単調族

[西尾，二章定義４－定理５]

・**増大列，減少列に関して閉じている集合族を単調族という**

－ 有限加法族が σ 加法族になることと単調族になることは同値

・$\mathcal{A}$ が有限加法族のとき $\sigma[\mathcal{A}] = \mathcal{M}[\mathcal{A}]$ ：集合族 $\mathcal{A}$ を含む最小の単調族

・Γ 可測集合の全体が σ 加法族をなすこと（及び拡張定理における拡張の一意性）に用いる

7.2.4　有限加法的測度の σ 加法性

・**定義：定義域の範囲内での σ 加法性**

・**同値条件：測度有限の減少集合列の共通部分が空集合ならば測度の極限が 0，かつ，増加列の和集合が測度無限なら測度の極限が ∞**

7.2.5　外測度と外測度に関する可測集合と外測度の制限として得られる測度

・$\Gamma:\ 2^\Omega \to \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ が外測度とは非負，単調，劣加法的で $\Gamma(\emptyset) = 0$ を満たすもの

・E が Γ 可測とは，$\Gamma(E \cap A) + \Gamma(E^c \cap A) = \Gamma(A)$, $A \subset \Omega$

・Γ 可測集合の全体 $\mathcal{F}_\Gamma$ は σ 加法族で $(\Omega, \mathcal{F}_\Gamma, \Gamma)$ は測度（証明けっこう長い）

7.2.6　有限加法的測度の生成する外測度

$(\Omega, \mathcal{I}, m)$：有限加法的測度

・$m(\Omega) < \infty$ ならば E の Γ 可測性と，$\Gamma(E) = m(\Omega) - \Gamma(E^c)$ が同値

・可測性の元の定義：外測度＝内測度

・$\Gamma(A) = \inf_{\{I_n\} \subset \mathcal{I};\ \bigcup_n I_n \supset A} m(I_n)$

・$\mathcal{I}$ の要素は Γ 可測で，m が $\mathcal{I}$ 上 σ 加法的ならば $\mathcal{I}$ 上 $\Gamma = m$（拡張になっている）

→　測度の構成！

7.2.7　Dynkin の定理と拡張の唯一性

[Williams, §§1.6, A1.2–4], [Durrett, App. (2.1)]

・集合族 $\mathcal{I}$ が π 族とは $\cap$ に関して閉じていること（ルベーグ測度は区間上で定義した長さを拡張して作るが，区間を集めた集合族や cylinder set は有限加法族ではない　→　測度の唯一性を保証する族としての π 族）

・集合族 $\mathcal{I}$ が d 族 (λ 族) とは，Ω を要素に持ち，包含関係がある場合の差と増加集合列の可算和について閉じていること．

・**Dynkin の定理**：$\mathcal{I}$ が π 族ならば最小の d 族 $d[\mathcal{I}] = \sigma[\mathcal{I}]$．特に π 族 $\mathcal{I}$ が d 族 $\mathcal{G}$ に含まれるならば $\sigma[\mathcal{I}]$ も $\mathcal{G}$ に含まれる．特に π 族かつ d 族ならば σ 加法族（２段階で証明）

・**全測度有限な測度２つが全体集合を要素に持つ π 族 $\mathcal{I}$ で一致すれば $\sigma[\mathcal{I}]$ で一致**

（証明は Dynkin の定理）

7.2.8 カラテオドリの拡張定理

・(有限加法的) 測度がσ**有限とは，Ω が測度有限な可測集合の可算和で書けること**

(拡張定理の一意性，完備化の極大性，フビニの定理，ラドン・ニコディムの定理の成立のみに必要．通常はσ有限な場合しか登場しない)

・カラテオドリの拡張定理：有限加法族$\mathcal{I}$上のσ加法性を持つ有限加法的測度mの拡張である測度が存在し，mがσ有限ならば拡張は$\sigma[\mathcal{I}]$上ただ一つである

7.2.9 完備化

・測度は，測度0の集合の部分集合を全て含む最小のσ加法族に（自明にただ一通りに）拡張される．これを完備化という．

通常，完備化は気にしなくて良い

使用例：f可測で$f = g$, a.e., ならg可測

・外測度から構成すると自動的に完備測度（σ有限なら完備化に一致＝最小）

7.3 n 次元ルベーグ測度の存在

・区間の有限和に素朴な長さを与える有限加法的測度の拡張が存在する：拡張定理により，σ加法性を証明すればよいが，その証明に Heine-Borel の被覆定理を用いる．そこで位相的性質を得てボレル測度になる

・通常，完備化して 1 次元ルベーグ測度と呼ぶ

・ルベーグ可測集合の例

・可算集合はルベーグ測度0（例$\mathbb{Q}$，$[0,1]$の無理数）

・カントール集合

・測度正の疎（開集合を含まない）な閉集合（cf. $[0,1]\cap\mathbb{Q}^c$は閉ではない，カントール集合は測度0）[Lebesgue§34]

$\mathbb{Q}$を一列に並べてn番目を中点とする開区間をI_n，$\sum|I_n| < 1$と長さを選び$E = [0,1]\setminus\bigcup I_n$とすると，$\bigcup I_n$は開ゆえ$E$は閉，$\mathbb{Q}$の稠密性から疎，$|E| \geqq 1 - \sum|I_n| > 0$.

・(ルベーグ非可測集合の存在)

8　ルベーグ積分の基本性質 (6/28)

8.1　リーマン積分より偉いこと

（狭義）リーマン積分可能ならばルベーグ積分可能である

リーマン和は単関数近似なのでエゴロフの定理の簡単な応用

$\chi_{\mathbb{Q}}$ の積分はリーマンではできないがルベーグならできる

その他の例：ルベーグ可測関数の極限はルベーグ可測なので，級数の形に書いたときに $\infty - \infty$ になっていなければ自動的に極限と積分が可換だが，リーマン可積分関数の極限はリーマン可積分とは限らない．$\cos^{2n}(\pi n!x)$．測度正の疎な閉集合の例で E 上 0，$I_n = (a_n, b_n)$ に対して $(a_n + 2^{-N}(b_n - a_n), b_n - 2^{-N}(b_n - a_n))$ 上 1，それ以外は線形内挿で f_N を定義すると連続だが極限はリーマン非可積分．ルベーグ積分はもちろん極限と可換．

広義リーマン積分の注意

8.2　1 次元ルベーグ積分の位相的性質

ボレル測度空間では，連続関数は可測関数である

ルージンの定理：可測関数は任意の $\epsilon > 0$ に対して測度 ϵ 以内の集合をうまく除いた閉集合で連続である（エゴロフの定理から）

8.3　平行移動不変性

$\mu_1(A) = \mu_1(A + x) = \mu_1(-A)$（ルベーグ測度構成の外測度の段階では明らか，$\Gamma$ 可測集合であることを定義から言えばよい）

9　直積測度とフビニの定理概論 (7/5)

$(\Omega_i, \mathcal{F}_i, \mu_i)$, $i = 1, 2$：以下 σ 有限とする

・ 切り口 $[E]_x$

・ 直積測度の構成 $\mu = \mu_1 \times \mu_2$（$\mu(E_1 \times E_2) = \mu_1(E_1)\,\mu_2(E_2)$ なる定義域 $\mathcal{F}$ 最小の測度，ただし $0 \times \infty = 0$）が拡張定理によって一意存在．いつもの構成方法で完備化が得られる（単調族定理を用いるが，区間の和の補集合が区間の和で書けることが 2 次元以上で煩わしいので Dynkin 族定理を使う手があるらしい）

・ ルベーグ測度の場合 $\mathcal{B}_n \times \mathcal{B}_m = \mathcal{B}_{n+m}$，$\mathcal{F}_n \times \mathcal{F}_m = \mathcal{F}_{n+m}$（直積と見てもいきなり $n+m$ 次元と見ても等しい）

・**定理**：

・ $E \in \mathcal{F}$, $x \in \Omega_1$ なら $[E]_x \in \mathcal{F}_2$，$\displaystyle\int_{\Omega_1} \mu_2([E]_x)\, d\mu_1(x) = \mu(E)$，特に $\mu(E) < \infty$ なら $\mu_2([E]_x) < \infty$, a.e.

・ $f \geqq 0$ 可測ならば直積測度積分は逐次積分に等しい，可積分でも同様

・完備化した測度の場合は a.e. がたくさん付くだけで同様の定理が成立

10　後期のイメージ

- 直積測度とフビニの定理：単調族定理 [Durrett Chapt. 5], [Williams ?] 直積測度の構成，$\mathcal{B}_m \times \mathcal{B}_n = \mathcal{B}_{m+n}$，フビニの定理，分布等式，ミンコフスキーの積分不等式
- 不定積分とラドン・ニコディムの定理：不定積分，絶対連続性と密度，ラドン・ニコディムの定理，ラドン測度，解析学の基本定理

  測度正の疎な閉集合を用いてリーマン非可積分でルベーグ可積分かつ $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^x f(y)dy = f(x)$ が各点で成り立つ f の例
- 加法的集合関数：ジョルダン分解，ハーン分解，ルベーグ・スチルチェス積分，部分積分，置換積分，サードの定理，リースの定理
- L^p 空間，基本不等式（チェビシェフ，シュワルツ，ヘルダー，ミンコフスキー，ヤング），線形空間，ノルムと縮小写像の原理，L^p 空間の完備性（バナッハ空間としての L^p 空間）
- 以下の（おそらく）いずれか
  - 計量線形空間，ヒルベルト空間としての L^2 空間，リース・パーセバルの等式，フーリエ変換
  - 確率測度，種々の収束（概収束，確率収束，法則収束）