ルベーグ積分論（測度論）続論　（解析学概論 B2；数学科 3 年選択必修）
2005 年度後期火曜 2 限 (10:30–12:00) 数学棟 201
服部哲弥 2005/10/04

講義予定表　（節番号は教科書（伊藤清三）の該当節）

日	節	内容
10/04 10/11 10/18	§9, 15	復習，フビニの定理 （直積測度，単調族定理，切り口の可測性，フビニの定理）
10/25 11/01 11/08	§17 – 20	ラドン・ニコディムの定理 （加法的集合関数，変動，ハーン分解， 絶対連続と特異，ラドン・ニコディムの定理）
11/15 11/22	§22	L^p 空間 （L^p ノルム，Hölder の不等式，完備性，など）
11/29	(試験)	
12/06 12/13		確率論の基礎 （確率空間・確率変数・期待値，基本不等式）
12/20	休講	
1/10		確率論の基礎（続き）
1/17	(試験)	

教科書． おおむね，伊藤清三，ルベーグ積分入門，裳華房，数学選書 4，の後半から．細かい内容の配列や議論の展開は変わります．教職科目指定の関係上，(教科書にありませんが）測度論と同義と言ってよい確率論の基礎についても少し取り上げます.

参考書． URL: `http://www.math.tohoku.ac.jp/ hattori/hattori.htm` の下の ／講義／ルベーグ積分 と ／雑記帳／大学院入試問題（測度論） に関連資料があります.（後期には不十分ですがご容赦.）この分野の日本語の基礎教科書は最近多数出てきました．たとえば：　新井仁之，ルベーグ積分講義，日本評論社，　盛田健彦，実解析と測度論の基礎，培風館，　猪狩惺，実解析入門，岩波書店，　志賀徳造，ルベーグ積分から確率論，共立出版，　谷島賢二，ルベーグ積分と関数解析，朝倉書店，　熊谷隆，確率論，共立出版．目的に応じて参照してください.

試験． 成績評価は試験によります．試験前までの講義の範囲に対応する講義，教科書，入試問題集，過去問，を完全に理解していることを理想として，試験を行う予定です．詳しくは初回口頭で相談・説明します.

演習． 佐藤得志先生の担当する解析学概論演習 B2（火曜午後）とは内容的に関連しています．実力を付けるために，また，講義で扱えなかった話題の補完を佐藤先生にお願いする場合もあり得ますので，演習に積極的に参加して下さい.

T.A. 田原 喜宏 (TAWARA Yoshihiro) 君 (D1)

連絡先． 服部哲弥 `hattori@math.tohoku.ac.jp`　（数学棟 512）

講義メモ（各時間の講義内容計画　兼　受講者予習復習用チェックリスト）

1　前期の復習

測度空間 $(X, \mathcal{F}, \mu)$　特に X が位相空間で $\mathcal{F} = \sigma[\mathcal{O}]$ のとき Borel 測度
　例：$X = \mathbb{R}^n$，$\mathcal{B}_n = \sigma[\mathcal{O}_n]$,
　$\mu_n((a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)) = \prod_{k=1}^{n} (b_k - a_k)$
　注：$\mathbb{R}^n$ の位相的性質（開集合は可算個の区間の和で書ける (Lindelöf)）→ μ_n: n 次元 Borel 測度
　測度の完備化 $(X, \mathcal{F}, \mu) \ \mapsto \ (X, \overline{\mathcal{F}}, \overline{\mu})$；零集合の部分集合を全て含む最小の σ 加法族
　例：n 次元ルベーグ測度（n 次元ボレル測度の完備化）$(\mathbb{R}^n, \mathcal{F}_n, \mu_n)$ （ここだけの記号）

μ_n の存在　・定義域を σ 加法族に拡張できることを言う必要ー測度の構成 (Carathéodory): 有限加法族上の σ 加法性を持つ有限加法的測度であることをがんばって示せば（この部分は個別に詳細による），外測度とそれに関する可測集合の族を考えることで存在が言え，そうやって作った場合は外測度による近似によって一意性も直接言える（X が σ 有限のとき）.
　・ 外測度経由で構成すると，自動的に完備化された測度（外測度で覆うから）

可測関数と積分　・ 単関数近似（$E \in \mathcal{F}$，f が非負値可測，$\{f_n\}$ が非負値単関数の増加列で，f に各点収束ならば，$\int_E f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n\, d\mu$），
　○ $f = f_+ + f_-$, $f = \mathbf{Re}(f) + \sqrt{-1}\mathbf{Im}(f)$ で実数値，複素数値に拡張.
　○ 零集合上の積分は 0．特に，$\pm\infty$ を値として許す可積分関数が $\pm\infty$ を取る点の集合は零集合.
　○ 「ほとんどいたるところ」.
　○ 非負関数の積分が 0 なら積分範囲上ほとんどどいたるるところ 0.
　・ 積分の線形性（$\int_E (a\, f + b\, g)\, d\mu = a \int_E f\, d\mu + b \int_E g\, d\mu$）.
　・ 積分範囲についての σ 加法性.
　・ 優収束定理（各点収束する可測関数列で可積分関数で各点で抑えられているものについて極限と積分が可換）.

2　フビニの定理

2.1　直積測度と Fubini の定理

単調族定理 [Durrett Chapt. 5], [Williams §3.14, §A.3]，直積測度 [Williams §8]

・2 つの σ 有限測度空間 $(X, \mathcal{F}, \mu)$, $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ において，直積測度 $(X\times Y, \mathcal{F}\times\mathcal{G}, \mu\times\nu)$：$(\mu\times\nu)(E\times F) = \mu(E)\,\nu(F)$ なる定義域最小の測度（注：$0\times\infty = 0$）.（一意存在：後述）

Fubini の定理　$n+m$ 次元ルベーグ測度 μ_{n+m} に関して可積分な関数 f について，直積測度積分は逐次積分に等しい：

$$\int_{\mathbb{R}^{n+m}} f\,d\mu_{n+m} = \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^m} f\,d\mu_m\right)d\mu_n = \int_{\mathbb{R}^m}\left(\int_{\mathbb{R}^n} f\,d\mu_n\right)d\mu_m\,.$$

$m+n$ 次元可積分性の代わりに，$m+n$ 次元可測（これは必ず必要）かつ上記 3 つの積分のどれかが有限，を仮定しても同値.

○ f が非負可測可測ならば無条件に（∞ を許せば，可積分性の仮定不要で）3 つの積分は等しい.

○ 注：逐次積分は，残す変数について a.e. に最初の積分が定義され，その積分値は残した変数の可測関数である，の意味

○ ルベーグ測度 $\mu_.$ の代わりにボレル測度 $\mu_.$ としても，f をルベーグ可測の代わりにボレル可測とすれば以上同じ結論．ボレル測度で $f \geqq 0$ のときの逐次積分は，残す変数について（a.e. どころではなく必ず）最初の積分が定義される，の意味.（直積測度の一般性質ということ：σ 有限な任意の 2 つの測度空間 $(X, \mathcal{F}, \mu)$, $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ の直積測度空間について成立．μ の微妙な違いは直積に完備化が加わるから.）

・ 積分の線形性と極限との可換性から $f = \chi_E$ の場合に帰着

Fubini の定理（集合版）　σ 有限測度空間 $(X, \mathcal{F}, \mu)$, $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ において，$E \in \mathcal{F}\times\mathcal{G}$ と $x \in X$ に対して**切り口**$[E]_x = \{y \in Y \mid (x, y) \in E\} \in \mathcal{G}$, $x \mapsto \nu([E]_x)$ は $\mathcal{F}$ 可測で $\displaystyle\int_X \nu([E]_x)\,d\mu(x) = (\mu\times\nu)(E)$．特に $(\mu\times\nu)(E) < \infty$ なら $\mu([E]_x) < \infty$, a.e..

○ $\mu\times\nu$ を完備化した場合は，切り口は x–a.e. に $\mathcal{G}$ 可測，と変わるだけであとは同じ.

2.2　単調族定理

[西尾，二章定義 4 から定理 5 まで][Williams, §§1.6, A1.2–4] [Durrett, App. (2.1)]

・ μ_n のように区間の族（有限加法族ではない）上で最初に測度や性質が定義された場合，σ 加法族に拡張したいとき，基本は，結論が成り立つ可測集合（ないしは可測関数）の全体を $\mathcal{F}$ （$\mathcal{H}$）とおくときそれが，元の族が生成する σ 加法族（可測関数のベクトル空間）を含むことを（生成する σ 加法族の最小性を用いて）証明.（個別問題毎に実質的にそれを経過した補題を使う別証明あり.）

・ 有限加法族にまず拡張するのが基本.

○ **単調族**：増大列，減少列に関して閉じている集合族　— 有限加法族が σ 加法族になることと単調族になることは同値（容易）

○ 前期はΓ可測集合の族がσ加法族になることの証明なども以上を使ったが，有限加法族の構成が明らかな割にきちんと書くと煩雑（森真「超入門」では直積測度の構成でさぼっている）

○ 有限加法族上，定義域の範囲内でのσ加法性と，次が同値：測度有限の減少集合列の共通部分が空集合ならば測度の極限が0，かつ，増加列の和集合が測度無限なら測度の極限が∞（これ自体は容易）

・π **族**とは$\cap$に関して閉じていること（区間の族，Cylinder sets など）

・d **族** (λ **族**) とは，全体集合Xを要素に持ち，包含関係がある場合の差と増加集合列の極限について閉じていること．

○ 集合族がσ加法族 $\Leftrightarrow$ π族かつd族.（証明：$\Leftarrow$が問題，補集合，有限和，可算和の順に言う.）

Dynkin の補題（集合版の単調族定理）　$\mathcal{I}$がπ族ならば$\mathcal{I}$を含む最小のd族$d[\mathcal{I}] = \sigma[\mathcal{I}]$. 特に$\pi$族$\mathcal{I}$が$d$族$\mathcal{G}$に含まれるならば$\sigma[\mathcal{I}]$も$\mathcal{G}$に含まれる．特に$\pi$族かつ$d$族ならば$\sigma$加法族. ◇

（証明：$d[\mathcal{I}] \subset \sigma[\mathcal{I}]$なので，$d[\mathcal{I}]$が$\pi$族を言えば終わる．2段階で証明.

Step 1: $\mathcal{D}_1 = \{B \in d[\mathcal{I}] \mid B \cap C \in d[\mathcal{I}],\ \forall C \in \mathcal{I}\} \supset \mathcal{I}$は定義を確かめると$d$族で，$\subset d[\mathcal{I}]$だから等しい.

Step 2: $\mathcal{D}_2 = \{A \in d[\mathcal{I}] \mid B \cap A \in d[\mathcal{I}],\ \forall B \in d[\mathcal{I}]\}$は Step 1 から$\supset \mathcal{I}$で Step 1 と同様に$d$族だから$= d[\mathcal{I}]$だが，これは$\pi$族であることを意味する.）

○ 同様の状況で測度の拡張の一意性を示す（測度が持つ性質を証明するのにも使える）

$\rightarrow$　Dynkin 族定理

Dynkin 族定理　全測度有限な測度2つが全体集合を要素に持つπ族$\mathcal{I}$で一致すれば$\sigma[\mathcal{I}]$で一致．特に，Carathéodory の拡張定理の一意性が成立.（証明：$\mathcal{D} = \{F \in \sigma[\mathcal{I}] \mid \mu_1(F) = \mu_2(F)\} \supset \mathcal{I}$ は定義を確かめるとd族なので Dynkin の補題.）

○ Fubini の定理で集合版（切り口の測度）に帰着させて証明するなら Dynkin の補題. 帰着させるところまで込めて関数の積分の言葉で証明するなら次の単調族定理.

単調族定理　$(X, \mathcal{F})$可測空間，$X \in \mathcal{I}$なるπ族に対して，$\mathcal{H} \subset \{f :\ X \to \mathbb{R} \mid bdd\}$が (i) ベクトル空間，(ii) $\chi_I \in \mathcal{H},\ I \in \mathcal{I}$，(iii) $\{f_n\} \subset \mathcal{H}$：有界非負関数列；$f_n \uparrow f$ならば$f \in \mathcal{H}$.

このとき$\mathcal{H}$は全ての有界$\sigma[\mathcal{I}]$可測関数を含む. ◇

（証明：単関数近似を考えれば集合の定義関数だけでやれば十分で，$\mathcal{F} = \{F \subset X \mid \chi_F \in \mathcal{H}\}$に翻訳すると Dynkin の補題そのもの.

論点：ベクトル空間というだけでは$\mathcal{F}$は共通部分を持たない集合の和について閉じていることしか出てこないので，有限加法族とは言えない！）

2.3　Fubini の定理の証明

直積測度の構成（一意存在）定理　σ有限測度空間 $(X, \mathcal{F}, \mu)$, $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ において，直積測度 $(X \times Y, \mathcal{F} \times \mathcal{G}, \mu \times \nu)$：$(\mu \times \nu)(E \times F) = \mu(E)\,\nu(F)$なる定義域最小の測度（注：$0 \times \infty = 0$）が一意存在. ◇

証明：有限加法的測度を作って有限加法族上の σ 加法性を言えば，Carathéodory の拡張定理から一意存在．σ 加法性はルベーグ測度の構成と同様に単調性を示す方法で．(矩形集合の全体は π 族なので，一意性は Dynkin 族定理でも．また，Γ 可測集合の全体は可測性の定義から矩形集合を含みかつ差について閉じて，$\Gamma(\emptyset)=0$ から全体集合を含み，増加列は共通部分を持たない集合の和で書けるがその可測性は Γ 可測集合に関して最初に証明するので Dynkin の補題でやっているとも言える．実際 [伊藤清三 §5 定理 5.3] 以下の証明はまず d 族であることを言って，あとは Dynkin の補題の証明を実質行っている．有限加法族上の σ 加法性は矩形集合に対して $\Gamma=m$ を言うためであった.）

ルベーグ測度 $\mathbb{R}^{n+m}$ の場合　最初から $n+m$ 次元ルベーグ（ボレル）測度があるのでそれと本質的に一致していることを言っておく．ボレル測度については，区間で一致することから Dynkin 族定理で OK．ルベーグ測度はその完備化なので，容易に分かる完備化の一意性から直積測度を完備化したものが $n+m$ 次元ルベーグ測度になっている．

Fubini の定理の証明　集合版だけ証明すればよい．$\mathbb{R}^{n+m}$ に関してはルベーグ測度は完備化だからボレル測度の場合だけやればあとは容易．結局直積測度について証明すれば十分．σ 有限測度は有限測度に帰着するので，有限測度空間のみ証明する．

集合版 Fubini の定理有限測度空間 $(X,\mathcal{F},\mu)$, $(Y,\mathcal{G},\nu)$ において，(i) $E\in\mathcal{F}\times\mathcal{G}$ と $x\in X$ に対して**切り口**$[E]_x=\{y\in Y \mid (x,y)\in E\}\in\mathcal{G}$, (ii) $x\mapsto\nu([E]_x)$ は $\mathcal{F}$ 可測で，(iii) $\displaystyle\int_X \nu([E]_x)\,d\mu(x)=(\mu\times\nu)(E)$. $\Diamond$

証明：(i) $\mathcal{A}=\{E\in\mathcal{F}\times\mathcal{G} \mid [E]_x\in\mathcal{G},\ x\in X\}$ とおくとき $\mathcal{A}\supset\mathcal{F}\times\mathcal{G}$ を言う．矩形集合（特に全体集合）は入る．矩形集合は π 族をなすから，$\mathcal{A}$ が d 族であることを言えば Dynkin の補題から終了．差は $E\supset F$ なら $[E]_x\supset[F]_x$ で $[E\setminus F]_x\in\mathcal{G}$．増加集合列の極限も同じく $\mathcal{G}$ が閉じていることから．(ii) Dynkin の補題で，$\mathcal{G}=\{E\in\mathcal{F}\times\mathcal{G} \mid x\mapsto\nu([E]_x)$ が $\mathcal{F}$ 可測 $\}$ とすれば測度の加法性と連続性から (i) と同様に d 族．$\mathcal{I}$ を矩形集合の全体とすれば π 族になるので Dynkin の補題から．(iii) 同様に等式が成り立つ E の全体を $\mathcal{G}$ とおく．積分の線形性と増加極限との可換性から (ii) と同様に成立.

2.4　分布等式

Fubini の定理の応用例.

測度空間 $(X,\mathcal{F},\mu)$ 上の非負可測関数 $f:\ X\to\mathbb{R}_+$ に対して $\displaystyle\int_X f\,d\mu=\int_X\int_0^\infty \chi_{f(x)\geqq t}\,dt\,d\mu(x)\int_0^\infty \mu(\{f>t\})\,dt$．ここで $\{f>t\}=\{x\in X \mid f(x)\geqq t\}$.

特に，$\mu(X)=1$ なる測度空間を確率空間と呼び，μ の代わりに P と書くことが多い．さらに $\mathrm{P}[\,|f>t\}\,]=:\mathrm{P}[\,f\geqq t\,]$（$f$ が t 以上になる確率），$\displaystyle\int_X f\,d\mathrm{P}=:\mathrm{E}[\,f\,]$（$f$ の期待値）と書くと，$\mathrm{E}[\,f\,]=\int_0^\infty \mathrm{P}[\,f\geqq t\,]\,dt$ と書ける.

3　ラドン・ニコディムの定理

[猪狩，§§5.6-5.7][谷島，８章][伊藤清三，IV 章，§§17–18]
可測空間 $(X, \mathcal{F})$（たとえば，$\mathbb{R}^n$ 上のボレル可測集合族）固定.

3.1　加法的集合関数と変動

$\Phi\colon\ \mathcal{F} \to \mathbb{R}$（$\pm\infty$ は許さない，実数値集合関数）が σ 加法性を満たすとき**加法的集合関数**という.（σ 加法性の定義の集合和は順序によらないから，級数は絶対収束と決まる. なお，$\pm\infty$ の一方は許して大丈夫だが，証明で場合分けが煩雑なので略す.）

例１：$\mu(X) < \infty$ なる測度.
例２：$f\colon\ X \to \mathbb{R}$ が μ で可積分のとき $\Phi(E) = \int_E f\,d\mu$.
例３：$\mu(X), \nu(X) < \infty$ なる２つの測度の差 $\Phi = \mu - \nu$.
（例３で両方正のところは打ち消せばよい，と想像すると例４：）
例４：$\mu(X) < \infty$，$X_1 \in \mathcal{F}$, に対して $\Phi(\cdot) = \mu(\cdot \cap X_1) - \mu(\cdots \cap X_1^c)$.
　$\to$　実はこの形に尽きる（Hahn の定理）.
・ 測度と同様の証明で得られる性質：
◯ $\Phi(\emptyset) = 0$
◯ 有限加法性
◯ 可測集合の増加列または減少列に対して連続性 $\Phi(\lim_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \Phi(A_n)$
・ 上変動 $\overline{V}(\Phi; E) = \sup_{A\subset E} \Phi(A)$,
下変動 $\underline{V}(\Phi; E) = \inf_{A\subset E} \Phi(A)$,
全変動 $V(\Phi; E) = |\overline{V}(\Phi; E)| + |\underline{V}(\Phi; E)|$　　（以下 Φ を省略）
◯ $A = \emptyset$ をとれば，$\underline{V} \leqq 0 \leqq \overline{V}$
◯ $\underline{V}(E) = 0$ なる E を（Φ の）正集合，$\overline{V}(E) = 0$ なる E を（Φ の）負集合という.

・ [猪狩][谷島] は Hahn の定理（上下変動に相当する部分が互いに特異＝ support が排反）を直接証明し，そこから Jordan 分解を証明することで変動の意味に至る. [伊藤清三] は上下変動をまず定義してそれが有限測度であることを言い，その差が元の関数になる (Jordan 分解) ことから Hahn の定理に至る. どちらも最初に（変動の有界性または正負への分離を）泥臭い補題が必要のようだ. ここでは記号は [伊藤] に，配列は [猪狩] に従う.

補題　([猪狩，補題 5.2])　任意の可測集合 A に対して $\Phi(B) \geqq \Phi(A)$ なる正集合 $B \subset A$ が存在する.　◇

[谷島，補題 8.8] も「$\Phi(B) \geqq \Phi(A)$ なる」が抜けているが同じ証明.

証明：$-a_1 = \inf_{E\subset A} \Phi(E) < 0$ としてよい（そうでなければ A が正集合）ので $\exists E_1 \subset A;\ -\Phi(E_1) > a_1/2 > 0$ だから仮定の $\Phi(A) > 0$ と併せて $\Phi(A \setminus E_1) = \Phi(A) - \Phi(E_1) > \Phi(A)$. $A_1 = A \setminus E_1$ とおく.

a_j, E_j, n_j, A_j, $j = 1, \cdots, k-1$, が決まったとき，$-a_k = \inf_{E\subset A_{k-1}} \Phi(E) < 0$ としてよい（そうでなければ A_{k-1} が正集合）ので $\exists E_k \subset A_{k-1};\ -\Phi(E_k) > a_k/2 > 0$ だから帰納法の一つ前の結論 $\Phi(A_{k-1}) > 0$ と併せて $A_k = A_{k-1} \setminus E_k$ とおくと $\Phi(A_k) > 0$.

$B = A \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ とおくと，Φ の σ 加法性から $\Phi(B) = \Phi(A) - \sum_{k=1}^{\infty} \Phi(E_k) > \Phi(A) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} a_k > 0$．$-\infty < \Phi(A) - \Phi(B) = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi(E_k) < -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ だから右辺は収束．特に $a_k \to 0$．しかも $\Phi(B) > \Phi(A) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} a_k > \Phi(A)$．$C \subset B$ ならば $C \subset A_{k-1}$ だから $\Phi(C) \geqq -a_k$．$k \to \infty$ とすると $\Phi(C) \geqq 0$．つまり $B \subset A$ が $\Phi(B) > 0$ なる正集合．□

Hahn の定理　可測空間 X 上の加法的集合関数 Φ に対して $\underline{V}(P) = \overline{V}(P^c) = 0$ なる $P \subset X$ が存在する．(零集合の分だけ任意性があるので一意的ではない．) ◇

証明：補題から $\Phi(A_k) \to \overline{V}(X) =: a$ なる正集合列 $\{A_k\}$ があり，$P = \bigcup A_k$ は $\Phi(P) = a$ なる正集合．$C \subset P^c$ ならば $a \geqq \Phi(C \cup P) = \Phi(C) + a$ から $\Phi(C) \leqq 0$ なので P^c は負集合となる．□

・ Hahn の定理の P をとり $\Phi_+(A) = \Phi(A \cap P)$，$\Phi_-(A) = -\Phi(A \cap P^c)$ で加法的集合関数 $\pm\Phi_\pm$ を定義すると Hahn の定理からこれらは有限測度で $\Phi = \Phi_+ - \Phi_-$．

Jordan 分解定理　$\overline{V} = \Phi_+, \underline{V} = -\Phi_-$，従って，特に $\Phi = \overline{V} + \underline{V}$（加法的変動関数は測度の差として一意的に書けること）および全変動 $V = \overline{V} - \underline{V}$ は有限測度．◇

証明：$F \subset E$ に対して（P が正集合 P^c が負集合だから）$\Phi(F) = \Phi(F \cap P) + \Phi(F \cap P^c) \leqq \Phi(E \cap P)$．$F \subset E$ について sup をとると $\overline{V}(E) \leqq \Phi_+(E)$．定義から $\overline{V}(E) \geqq \Phi(E \cap P)$ だから等号が成り立つ．もう一方も同様．□

定理（全変動という命名の由来）　$V(E) = \sup \sum_{j=1}^{n} |\Phi(E_j)|$．ここで sup は E の有限分割の方法全てにわたる上限．◇

証明：$V(E) = \Phi_+(E) + \Phi_-(E) = \Phi(E \cap P) + |\Phi(E \cap P^c)|$ だから $\leqq$ は OK．一方 V は測度だから $E = \bigcup_{j=1}^{n} E_j$ を排他和とすると $V(E) = \sum_{j=1}^{n} V(E_j) \geqq \sum_{j=1}^{n} |\Phi(E_j)|$ だから $\geqq$ も OK．□

・ 不定積分．測度空間 $(X, \mathcal{F}, \mu)$ 上の可積分関数 $f\colon X \to \mathbb{R}$ に対して $\Phi\colon E \mapsto \int_E f\, d\mu$ は $\Phi_\pm(\cdot) = \int_\cdot f_\pm\, d\mu$ なる加法的集合関数．これを不定積分と呼ぶ．

3.2　ラドン・ニコディムの定理

可測空間 $(X, \mathcal{F})$ を固定．以下は加法的集合関数 (signed measure) についても言えるが，測度で書いておく．

絶対連続と特異　測度 μ と ν について，ν が μ に関して**絶対連続**$\nu \ll \mu$ とは任意の可測集合 E に対して $\mu(E) = 0$ ならば $\nu(E) = 0$ となること，μ と ν が**特異**$\nu \perp \mu$ とは，可測集合 A が存在して $\mu(A) = 0, \nu(A^c) = 0$ となることを言う．

特異な測度の例：　$\delta_0(A) = \chi_{0 \in A}$ は，ルベーグ測度と特異な，ルベーグ可測空間上の測度（絶対連続な例は不定積分）．

・ 測度が絶対連続かつ特異ならば恒等的に 0．

・ $\nu \ll \mu \iff (\forall \epsilon > 0)\ \exists \delta > 0;\ (\mu(E) < \delta \Rightarrow \nu(E) < \epsilon)$ ◇

証明：$\Rightarrow$ を否定すると $\exists\epsilon>0,\ \exists E_j;\ \mu(E_j)<2^{-j},\ \nu(E_j)>\epsilon$．$E=\displaystyle\bigcap_{k=0}^{\infty}\bigcup_{j=k}^{\infty}E_j$ は $\nu\ll\mu$ の反例になる． □

・ $\nu\perp\mu\ \Leftrightarrow\ (\forall\epsilon>0)\ \exists E\in\mathcal{F};\ \mu(E)<\epsilon,\ \nu(E^c)<\epsilon$ ◇

証明：$\Leftarrow$ を示すのに，$\mu(E_j)<2^{-j},\ \nu(E_j^c)<2^{-j},\ j\in\mathbb{N}$, を用いて $E=\displaystyle\bigcap_{k=0}^{\infty}\bigcup_{j=k}^{\infty}E_j$ が μ,ν を分離.（本は Fatou と言っている．まあそうだが，単調性というべき.）

Lebesgue の分解定理と Radon–Nikodym の定理　μ を σ 有限測度，Φ を加法的集合関数とするとき，$\Phi_{ac}\ll\mu$（$V_{\Phi_{ac}}\ll\mu$ のこと）と $\Phi_s\perp\mu$（同上）が存在して $\Phi=\Phi_{ac}+\Phi_s$．この分解は一意．さらに μ–a.e で定義された可積分関数 $f\colon\ X\to\mathbb{R}$ が存在して $\Phi_s(E)=\displaystyle\int_E f\,d\mu,\ E\in\mathcal{F}$. ◇

注：「後半から $\nu\ll\mu$ ならば μ–a.e で定義された非負値可積分関数 $f\colon\ X\to\mathbb{R}_+$ が存在して $\nu(E)=\displaystyle\int_E f\,d\mu,\ E\in\mathcal{F}$」を得る．これを Radon–Nikodym の定理と言い，f を ν の μ についての**密度関数**または**Radon–Nikodym 導関数**と呼んで，$f=\dfrac{d\nu}{d\mu}$ と書く.

（なお，密度で書けない部分が特異な部分 Φ_s とする [伊藤清三] 証明がすなおに見えるので，Lebesgue の分解定理と Radon–Nikodym の定理はセットで証明する.）

証明：μ が σ 有限なので有限測度の場合に帰着する．Hahn の分解定理から Φ が測度 ν の場合をやれば十分.

次の (*) を満たす非負値可測関数 $\phi\colon\ X\to\mathbb{R}_+$ 全体を Ψ とおく：

(*) 「$\displaystyle\int_X\phi\,d\mu<\infty$，かつ，不定積分 $F_\phi\colon\ E\mapsto\int_E\phi\,d\mu$ が $F_\phi(E)\leqq\nu(E),\ E\in\mathcal{F}$, を満たす.」

恒等的に 0 なる関数 $\chi_\emptyset\in\Psi$ だから Ψ は空でないので $\alpha=\displaystyle\sup_{\phi\in\Psi}F_\phi(X)$ が存在して $0\leqq\alpha\leqq\nu(X)<\infty$．$\{\phi_n\}\subset\Psi$ を $\displaystyle\lim_{n\to\infty}F_{\phi_n}(X)=\alpha$ となるように選んで $f(x)=\displaystyle\sup_{n\geqq1}\phi_n(x)$ で非負値可測関数 f を定義すると $f\in\Psi$ かつ $F_f(X)=\alpha$ となることが以下のように分かる：

$f_n=\max\{\phi_1,\cdots,\phi_n\}$ とおくと，任意の $E\in\mathcal{F}$ に対して $E=\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n}\{f_n=\phi_i\}$ だから，$E_i\subset\{f_n=\phi_i\}$ を選んで $E=\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n}E_i$ かつ $E_i\cap E_j=\emptyset,\ i\neq j$, とできて，$\displaystyle\int_E f_n\,d\mu=\sum_{i=1}^{n}F_{\phi_i}(E_i)\leqq\nu(E)$ を得る．一方 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}f_n=\sup_{n\geqq1}\phi_n=f$ が各点で成り立つから，単調収束定理から $F_f(E)=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_E f_n\,d\mu$ よって，$F_f(E)\leqq\nu(E),\ E\in\mathcal{F}$, となり $f\in\Psi$ を得る．さらに $\alpha\geqq F_f(X)=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu\geqq\lim_{n\to\infty}\int_X\phi_n\,d\mu=\alpha$ で $F_f(X)=\alpha$ も得る.

不定積分 F_f は加法的集合関数なので $\Phi'=\nu-F_f$ も加法的集合関数で非負値有限（つまり有限測度）．これが恒等的に 0 でなければ特異であることを言う.

補題：　μ,ν が有限測度で ν は恒等的に 0 でなく，μ と特異でなければ $\exists n,\ \exists E_n\in\mathcal{F};\ \mu(E_n)>0;\ (\forall E\subset E_n)\ \nu(E)\geqq n^{-1}\mu(E)$. ◇

補題の証明：　加法的集合関数 $\Phi_n=\nu-n^{-1}\mu$ に Hahn の定理を使うと $\exists E_n;\ E\subset E_n\ \Rightarrow\ \nu(E)\geqq n^{-1}\mu(E),\ E\subset E_n^c\ \Rightarrow\ \nu(E)\leqq n^{-1}\mu(E)$．$\mu(E_n)>0$ なる n があれば証明が終わる．そうでないなら，$E_0=\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$ は $\mu(E_0)=0$ を満たし，$E\subset E_0^c\ (\subset E_n^c)$ ならば $0\leqq\nu(E)\leqq n^{-1}\mu(E)\leqq n^{-1}\mu(X)$ が任意の n で成り立つので $\nu(E)=0$．つまり $\nu\perp\mu$ を得て矛盾. □

定理の証明の続き：　$\Phi' = \nu - F_f$ が特異でないなら $\exists n,\ \exists E_n \in \mathcal{F};\ \mu(E_n) > 0,\ (\forall E \subset E_n)\ \Phi'(E) \geqq n^{-1}\mu(E)$．よって $g = n^{-1}\chi_{E_n}$ とおくと $f+g$ は非負値可積分で

$$F_{f+g}(E) = F_f(E) + n^{-1}\mu(E \cap E_n) \leqq F_f(E) + \Phi'(E \cap E_n) \leqq F_f(E) + \Phi'(E) = \nu(E),$$

すなわち $f+g \in \Psi$．しかし $F_{f+g}(X) > F_f(X) = \alpha$ なので α の定義に反する．よって Φ' は特異．
あとは一意性を言えばよい．ν を 2 通りで絶対連続と特異部分に分けられたとすると，移行すれば差について絶対連続かつ特異となるので恒等的に 0.　□

3.3　1 次元積分

[谷島，5 章と §7.4][伊藤清三，IV 章，§§21–22]
実数上のルベーグ測度空間 $(\mathbb{R}, \mathcal{F}_1, \mu_1)$ を固定．

離散測度と連続測度　測度 μ が**離散的**とは恒等的に 0 ではなくかつ可算集合 $D \subset X$ が存在して $\mu(D^c) = 0$ となること，**連続**とは任意の点 $x \in X$ に対して $\mu(\{x\}) = 0$ となること．

・$(\mathbb{R}, \mathcal{F})$ 上の測度 μ は $\mu = \mu_c + \mu_d$ と一意的に分解される．ここで μ_c は連続，μ_d は離散.（$\mathbb{R}^n$ でも成立.）

証明：　$D = \{x \mid \mu_d(\{x\}) \neq 0\}$ は可算集合なので $\mu_d(\cdot) = \mu(\cdot \cap D)$．$\mu_c = \mu - \mu_d$ は連続．□

ルベーグ・スチルチェス積分　・$\mathbb{R}$ 上のルベーグ測度による 1 次元積分の拡張．
まず，$F:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を増加（非減少）関数とする．$\nu([a,b]) = F(b) - F(a)$ は区間の作る π 族上で σ 加法性を持つので，前期の Caratheodory の拡張定理から一意的に $\mathcal{B}_1$（さらに完備化 $\mathcal{F}_\nu$ も一意的だが，その可測集合はルベーグ可測集合 $\mathcal{F}_1$ と必ずしも一致しない）上の測度 ν に拡張できる．ν に関する積分 $\displaystyle\int_E g(x)\,d\nu$ を $\displaystyle\int_E g(x)\,dF(x)$ などと書く．

・F が増加とは限らない場合に加法的集合関数を用いて以上を拡張できる.（$F = F_+ - F_-$ で $f_+ = 0$ on E, $F_- = 0$ on E^c なるときは明らか．一般に有界変動関数はこのような分解が可能である.）結果のみ：

有界な F が有界変動関数とは，M が存在して $[a,b]$ の任意の分割に対して $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |F(x_i) - F(x_{i-1})| < M$.

○ 有界変動ならば増加関数の差 $F = F_1 - F_2$ で書ける．この中で $V = F_1 + F_2$ を最小にするものがとれる．以下それを固定．このときの増加関数 $V = V_F$ を全変動と呼ぶ．

○ F が有界変動のとき，$\displaystyle\int |g|\,dV_F < \infty$ なる g に対して $\displaystyle\int_E g(x)\,dF(x) := \int_E g(x)\,dF_1(x) - \int_E g(x)\,dF_2(x)$ が存在．これが Lebesgue–Stieltjes 積分．

○ E が閉区間で g が連続なら，Riemann–Stieltjes 積分に一致．

微分　・$F:\ [a,b] \to \mathbb{R}$, 有界, が絶対連続とは，$(\forall \epsilon > 0)\ \exists \delta > 0;\ [a,b]$ の共通部分を持たない区間の有限列 $\{(a_i, b_i] \mid i = 1, \cdots, n\}$ が $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i) < \delta$ を満たせば $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}|F(b_i) - F(a_i)| < \epsilon$ を満たすことを言う.（「有限列」を「無限列」に置き換えても同値.）

○ F が増加の時，F に対応する測度を ν とする．$\mathcal{F}_\nu \supset \mathcal{F}_1$ で $\mu_1(N)=0$ なら $\nu(N)=0$ となるとき ν は μ_1 に関して絶対連続という．F が絶対連続と ν が絶対連続は同値.

○ 絶対連続ならば有界変動.

○ 有界な F に対して，F，F_i たち，V_F，が絶対連続であることは互いに同値．それとルベーグ可積分な $f:\ [a,b]\to\mathbb{R}$ が存在して $F(x)-F(a)=\displaystyle\int_a^x f(y)\,dy$ の成立が同値.（Radon–Nikodym．一般の有界変動関数の場合は特異集合関数 Φ_s によって $\Phi_s((a,x])$ なる項が加わる.）

・**解析学の基本定理：** $F:\ [a,b]\to\mathbb{R}$ が絶対連続ならば，Radon–Nikodym 密度を f とおくと，ルベーグ測度に関してほとんど全ての x で $f(x)=\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(F(x+h)-F(x))$．$f$ を微分商とも呼ぶ.（実際は Radon–Nikodym を使わずに証明できる.）

・**積分変数の変換（一般の測度空間で OK）：** Φ を加法的集合関数で（μ_1 に関して）絶対連続 $\Phi(\cdot)=\displaystyle\int_\cdot \phi(x)\,dx$ とする．このとき可測関数 g が Φ の全変動 V_Φ について可積分なことと $g(x)\phi(x)$ が μ_1 に関して可積分なことは同値で，$\displaystyle\int_E f\,d\Phi=\int_E f(x)\,\phi(x)\,dx$.

・（$\mathbb{R}$ 上のルベーグ測度に対しては）F が絶対連続 $F(x)-F(a)=\displaystyle\int_a^x F'(y)\,dy$ ならば，$\displaystyle\int_E f\,dF=\int_E f(x)\,F'(x)\,dx$.

○ F が単調ならば $g=f\circ F^{-1}$ とおくと $\displaystyle\int_{F(a)}^{F(b)} g(y)\,dy=\int_a^b g(F(x))\,F'(x)\,dx$，すなわち，Riemann 積分の置換積分の公式.

・**部分積分法：** $[a,b]$ で F が連続で有界変動，ϕ が有界変動とすると $\displaystyle\int_a^b \phi(x)\,dF(x)=F(b)\phi(b)-F(a)\phi(a)-\int_a^b F(x)d\phi(x)$.（一方が連続なときは Riemann 和で近似できるので，実際は Riemann 積分の場合の証明に同じ.）

4　L^p 空間

測度空間 $(X, \mathcal{F}, \mu)$ を固定．積分 $\displaystyle\int_E f\, d\mu$.

4.1　L^p 空間の完備性

必要な性質を持つ関数を探す　―　例：微分方程式の解を求める

関数の集合（関数空間（位相，特に，距離の定義された集合を空間と言い習わす））を決めてその中で探す.

○ 近似列 f_n（解析の容易な，求めるものに近い関数たち）を含む関数空間

○ 完備性：広げた網（考察対象の関数空間）の中に求める関数があることを保証する

＝　f_n がコーシー列ならば極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n$ がその関数空間の中にあること

○ 関数解析と呼ばれる広大な分野の出発点

目標．　おおざっぱには，$\|f\|_p = \left(\displaystyle\int_X |f|^p\, d\mu\right)^{1/p}$ がノルム（L^p ノルム）になることを示し，L^p ノルム有限な可測関数の集合が Banach 空間（ノルムが定義する距離で完備な線形空間）であることを証明する．

○ 大ざっぱとは，厳格には関数の集合ではなく，測度ゼロの集合上の違いを無視した関数の同値類の集合，ということ．

同値類．　・ 同値関係：反射律，対称律，推移律を満たす 2 項関係

○ 同値関係 $\sim$ があるとそれで集合を同値類に類別できる：$c_x = \{y \in A \mid x \sim y\}$, $x \in \Lambda$. Λ：代表元.

$A/\sim = \{c_x \mid x \in \Lambda\}$　（集合族）.

○ $x \sim y$ のとき「x と y を同一視」するなどと言う

・ X 上の関数 f, g に対して $f = g$, a.e., 即ち $\mu(\{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}) = 0$ であることを $f \sim g$ と書くと $\sim$ は同値関係.

・ 以下では，関数とは，$\sim$ で同一視したものを指す.「ある条件を満たす関数の集合を X と書く」とは，その条件を満たす（本来の意味の）関数の集合 Y に対して $X = Y/\sim$ とすることとする．その要素のことを関数という.（条件が同一視と矛盾ない条件である＝代表限の取り方によらない＝ことを確認する必要がある.）

L^p 空間．　$p \geqq 1$ を固定.

・ $L^p = L^p(X)$：　可測関数 $f\colon\ X \to \mathbb{R}$ で $\displaystyle\int |f|^p\, d\mu < \infty$ を満たすものの集合（正しくは関数の同値類の集合，以下略）.

注：a.e. で一致する関数の同一視は，$f = g$, a.e., ならば $\displaystyle\int |f|^p\, d\mu = \int |g|^p\, d\mu$ なので，定義は代表元によらない.

例：$(1 + |x|)^{-q}$,　$|x|^{-q}\chi_{|x| \leqq 1}$

・ f の L^p–**ノルム**：　$\|f\|_p = \left\{\displaystyle\int |f|^p\, d\mu\right\}^{1/p}$

・ $f_n \in L^p$ が $f \in L^p$ に p **次平均収束**：　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0$

・ 関数 f_n が f に**概収束**：　$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, x-a.e.

Hölder 不等式．　**・ Schwarz の不等式**：　$f,\, g \in L^2$ ならば

$$\int |fg| d\mu \leqq \sqrt{\int |f|^2\, d\mu \int |g|^2\, d\mu}$$

・ Hölder の不等式．　$p > 1,\ \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1,$ とする．$f \in L^p,\, g \in L^q,$ ならば

$$\int |fg| \mu(dx) \leqq \|f\|_p \, \|g\|_q . \qquad \diamond$$

注：　Schwarz の不等式は Hölder の不等式の特別な場合．特別扱いは Hilbert 空間としての構造があるから

証明：　$f(x) = x^p/p + 1/q - x \geqq 0$ $(x \geqq 0)$ に $x = a\, b^{-q/p}$ を代入，両辺に b^q をかけると $a\, b \leqq \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}$ $(a \geqq 0,\, b \geqq 0)$．$0 < \|f\|_p \, \|g\|_q < \infty$ としてよい．$a = |f(x)|/\,\|f\|_p,\, b = |g(x)|/\,\|g\|_q$ とおいて積分．$\square$

Minkowski の不等式．　$p \geqq 1,\, f, g \in L^p$ ならば $\|f+g\|_p \leqq \|f\|_p + \|g\|_p$.　$\diamond$

・ 三角不等式（$\|\cdot\|_p$ がノルムになること）

証明：　$p = 1$ は各点での三角不等式から言えるので $p > 1$ としてよく，左辺が正の場合を考えれば十分．$\|f+g\|_p{}^p = \int |f+g|^{p-1} f\, d\mu + \int |f+g|^{p-1} g\, d\mu$ の右辺各項に Hölder の不等式を適用．$\square$

Banach 空間．　**・ 線型空間（ベクトル空間）**：　スカラー倍と和について閉じている空間集合

・ **ノルム** ($\|\cdot\|$)：　線形空間 X の実数値関数で，非負，一意（$\|f\| = 0 \Rightarrow\ f = 0$），一次 ($\|af\| = |a|\, \|f\|$)，三角不等式，を満たすもの．$(X, \|\cdot\|)$ を**線形ノルム空間**.

・ **距離**：　集合上の 2 変数実数値関数 ρ で，非負 ($\rho(f, g) \geqq 0$)，一意（$\rho(f, g) = 0 \Rightarrow f = g$），対称，三角不等式，を満たすもの.

例：　ρ が距離なら $d(x, y) = \dfrac{\rho(x, y)}{1 + \rho(x, y)}$ も．

○ 線形ノルム空間 $(X, \|\cdot\|)$ において，$\rho(f, g) = \|f - g\|$ は距離（**ノルムが定義する距離**）.

注：　ノルムは線形空間のみ，　距離は線形空間でなくても可能

・Banach 空間:　**ノルムが定義する距離に関して完備な線型ノルム空間** $(X, \|\cdot\|)$**.**（完備とはそのノルムに関するコーシー列がその空間の中でそのノルムに関して収束すること.）

例１：　$\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ （それぞれ $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ を係数体とする通常の和と積に関するベクトル空間として）Banach 空間になる．ノルムは $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}$ をとることができる（ℓ^p ノルム）．$p \geqq 1$ は任意．ノルムが違えば Banach 空間として違う空間と言うべきだが，有限次元線形空間の場合は $\|\cdot\|_p$ が定義する距離は異なる p でも同値.

例２：　$C^0([0, 1])$ は sup ノルムでバナッハ空間.

完備性の証明：　sup でコーシー列なら各点でコーシー列なので各点収束するから $\exists u(x) = \lim_{n\to\infty} u_n(x)$．しかも任意の $\epsilon > 0$ に対して，各 y 毎に $N(y)$ が存在して，$m \geqq N(y)$ ならば $|u_m(y) - u(y)| < \epsilon$ だから，$m(y) \geqq N(y)$ ならば $\|u_n - u\| \leqq \sup_{y\in[0,1]} |u_n(y) - u_{m(y)}(y)| + \epsilon$.

sup に関してコーシー列だから右辺第１項も十分大きい $n, m(y)$ に対して ϵ 以下になるから，結局 $u_n \to u$ in norm. $u \in C^0$ を言うには 3ϵ 論法，すなわち，ϵ だけで決まり x, y によらない n によって $|u(y)-u(x)| \leqq 2\epsilon + |u_n(x)-u_n(y)|$ を得るので $u_n \in C^0$ から $u \in C^0$. □

注： Lebesgue 積分の Riemann 積分に対する最大の利点の一つが，L^p の完備性.（Riemann 積分では極限と積分の順序交換が無条件では許されない.）

・**定理**： L^p 空間は完備である（すなわち Banach 空間である）. ◇

証明 : 完備性だけが残っている. $\{f_n\}$ を L^p の中の Cauchy 列 $\lim\limits_{n,m\to\infty} \|f_n - f_m\|_p = 0$. 単調増加で $\left\|f_n - f_{n(k)}\right\|_p < 2^{-k}$, $n > n(k)$, となるように $n(k)$ をとれるので，$\left\|f_{n(k+1)} - f_{n(k)}\right\|_p < 2^{-k}$, $\tilde{f}_k = f_{n(k)}$ とおく.

$g_n = |\tilde{f}_1| + \sum_{j=1}^{n-1} |\tilde{f}_{j+1} - \tilde{f}_j| \ \in L^p$ は各点で非負値単調増加だから $g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} g_n(x)$ が存在，かつ，各点の三角不等式から $\|g_n\|_p \leqq \left\|\tilde{f}_1\right\|_p + 1$.

単調収束定理から $\exists \left\|\lim\limits_{n\to\infty} g_n\right\|_p = \lim\limits_{n\to\infty} \|g_n\|_p \leqq \left\|\tilde{f}_1\right\|_p + 1$ なので $g \in L^p$.

$\tilde{f}_1 + \sum_{j=1}^{\infty} (\tilde{f}_{j+1} - \tilde{f}_j) = \lim\limits_{n\to\infty} \tilde{f}_n = f$ は $|g(x)| < \infty$ から a.e.-x で絶対収束して $|f| \leqq g$, a.e.，即ち $f \in L^p$. $|f(x) - \tilde{f}_n(x)| \leqq g(x)$ なので，優収束定理から $\lim\limits_{n\to\infty} \left\|f - \tilde{f}_n\right\|_p = 0$. $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \|f_n - f\|_p \leqq \lim\limits_{n,k\to\infty} \left\|f_n - f_{n(k)}\right\|_p + \lim\limits_{k\to\infty} \left\|f_{n(k)} - f\right\|_p$ から主張を得る. □

・**系**： $f_n \in L^p$, $n \in \mathbb{N}$, かつ $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0$ ならば，適当な部分列をとって $\lim\limits_{k\to\infty} f_{n(k)}(x) = f(x)$, a.e.-$x$, とできる. 即ち L^p 収束していれば，概収束する部分列が取れる. ◇

証明： 上の証明で次の性質を持つ部分列 $n(k)$ の存在が言えている：
$\exists \tilde{f};\ \lim\limits_{k\to\infty} f_{n(k)} = \tilde{f}$, a.e.,
$\lim\limits_{k\to\infty} \left\|\tilde{f} - f_{n(k)}\right\|_p = 0$.
$\left\|\tilde{f} - f\right\|_p \leqq \left\|\tilde{f} - f_{n(k)}\right\|_p + \left\|f_{n(k)} - f\right\|_p \to 0\ (k \to \infty)$. □

4.2 問題.

1. $\mu(X) < \infty$ ならば $1 < p < p'$ のとき $L^{p'} \subset L^p$.
（$f = f^p$ と $g = 1$ から $f^{p'}$ が出るように Hölder を使う.）

2. **（たたみこみ）** $1 \leqq p < \infty$, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ならば，$(f * g)(t) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy$ は $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

3(a) $\mathcal{E} = \{\chi_A \mid \mu(A) < \infty\} \subset L^p$ は L^p ノルムに関して閉集合.
（$\chi_{E_n} \to \phi \in L^p$ なら概収束部分列. 値域は $\{0,1\}$.）

(b) $f \in L^1$ に対して $F_f :\ \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ を，$\phi \in \mathcal{E} = \{\chi_A \mid \mu(A) < \infty\} \subset L^p$ に対して $F_f(\phi) = \int_X f(x)\phi(x)\,d\mu(x)$ で定義すると F_f は $\mathcal{E}$ 上の連続関数である.
（$\|\chi_{A'} - \chi_A\|_p = \mu(A' \oplus A)^{1/p}$ なので $\chi_{A'} \to \chi_A\ (L^p)$ と $\mu(A' \oplus A) \to 0$ は同値. 積分の絶対連続性から $\mu(A) \to 0$ のとき $\int_A |f|\,d\mu(x) \to 0$.（単関数増大近似列 $f_n \nearrow |f|$ で積分が近くなるよう n を大きく固定. $\int_A |f|\,d\mu$ を $\int_A f_n\,d\mu$ で近似し，単関数では $\sup f_n < \infty$ に注意して $\mu(A)$ で評価.）よって $|F_f(\chi_{A'}) - F_f(\chi_A)| \leqq \int_{A' \oplus A} |f(x)|\,d\mu(x) \to 0$, $\|\chi_{A'} - \chi_A\|_p \to 0$.）

4. （**Banach の不動点定理，縮小写像の原理**）　(X, d)：完備距離空間，$T:\ X \to X$; $\exists a \in (0,1);\ d(Tf, Tg) \leqq a\, d(f,g),\ f, g \in X$.

(a) $f_0 \in X$ に対して $f_n = Tf_{n-1}$, $n = 1, 2, \cdots$, で定義された $\{f_n\}$ はコーシー列.

(b) $f_\infty = \lim_{n\to\infty} f_n$ に対して $Tf_\infty = f_\infty$.

(c) $Tf = f$ を満たす f は唯一つ（f_∞ だけ）.

5. $(C([0,1]); \|\cdot\|_1)$ は完備でない.

4.3　補足.

L^∞.　$p = \infty$ に相当する空間も Banach 空間（[伊藤清三，§23] では M と表記．そのあと §24 で別の空間を L_∞ と記しているがそれとは別物）.

可測関数 f が本質的に有界とは，ある a に対して $|f(x)| \leqq a$, a.e.-x, が成り立つこと．これが成り立つ a の下限を $ess.\ sup_{x\in X}|f(x)|$ と書いて $|f|$ の**本質的上限**という．本質的に有界な関数全体を L^∞ と書く．今まで通り，a.e. 一致の同値類で関数を考える.

・**命題：**　$\|f\|_\infty = ess.\ sup_x|f(x)|$ はノルムになり，$(L^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ は Banach 空間になる．◇

内積と Hilbert 空間.　・**内積**：共役性 $((f,g) = \overline{(g,f)})$，線形性 $((af+bg, h) = a(f,h) + b(g,h))$，非負性 $((f,f) \geqq 0)$，一意性 $((f,f) = 0\ \Rightarrow\ f = 0)$，を満たす 2 変数関数 $(\cdot,\cdot)$.

・ $(f,g) = \int f\overline{g}\, d\mu,\ f,\ g \in L^2$ （$\overline{g}$ は g の複素共役）は L^2 の内積.

・ 内積から定義されるノルム： $\|f\| = \sqrt{(f,f)}$

・**Hilbert 空間**：　内積が定義された線形空間で内積が定義するノルムに関して Banach 空間になっているもの.

○ L^p の中では L^2 のみが Hilbert 空間である.

（ノルムが内積から来るためには中線定理が成り立つことが条件.）

Hilbert 空間は元の間の直交性や基底などの概念が可能になる点で Banach 空間の中でも特別に重要である.

5　確率論の基礎．

以下確率論講義ノートに引き継ぐ.

分布等式（再掲）

基本不等式（チェビシェフ，ミンコフスキー，ヤング，イェンセン），

（シュワルツ，ヘルダー，は既出）

例：$p \geqq 1, x, a, b > 0$ なら $(a+b)^p \leqq (1+x)^{p-1}a^p + \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{p-1} b^p$ （$x=1$ がイェンセンであとは x の増減表）

6　前期最初のイントロ

・「量（大きさ，分量）をはかる」ということの数学的に厳密かつ有用な定義
個数，長さ，面積，体積，n 次元体積
抽象化：全てをまとめて測度と呼ぶ　→　集合関数としての測度，非負値性，加法性
・面積としての（１変数実）関数の定積分　→　拡張性の良さ（任意の空間）

6.1　究極の数学的理想化精密化としての σ 加法性

・集合関数としての測度　→　定義域の問題：どのような集合が「はかれる」か？　→
可測集合（外からと中からで覆って誤差がなければよい）
・σ 加法性：極限操作の可能な測度の概念　→　σ 加法族
・拡張定理（存在定理）：有限加法的測度は σ 加法性を持てば σ 加法族に拡張できる！
一見複雑だが，ひとたび基礎を固めるとあとは頑丈で使いやすい
・可測関数:「囲んだ部分が可測集合になる関数」　→　操作の容易な定義 $f^{-1}((a,\infty)) \in \mathcal{F}$
・関数の可測性と可積分性を隔てるのは「$\infty - \infty$」だけ（絶対収束の類似）
・長さ 1 の区間は長さ 0 の点からなるから長さ 0 !?→ σ 加法性は加法性の究極の精密化
・ リーマン可積分ならばルベーグ可積分で値は一致

6.2　普遍性　ー　応用の広さ

測度論・積分論が由緒正しい一般化であることの傍証

6.2.1　２つの関数がどれくらい違うかを計る

関数空間のノルム（２点＝ここでは２つの関数，の違いを計る概念：0，三角不等式，スカラー倍），一様収束← sup ノルムは既習だが $\cdots$
例： $[0,1]$ 上の多項式の集合．リーマン積分で定義した L^1 ノルム
短距離の変動発散：L^1 ノルムはならすので sup ノルムよりおおらか
長距離（無限遠）の減衰 (decay)：積分は $1/x$ より早い decay を要求する
ルベーグ積分によることの利点？　→　完備性（極限と積分の可換性）

6.2.2　n 次元ルベーグ測度以外の測度

あらゆる「はかること」を統合して議論できる（全順序や成分の数から決まる次元は測度の必要条件ではない！）
・級数も測度である　・フラクタルとハウスドルフ次元
・無限次元空間，例：関数の集合の上の測度（大きさがはかれる！）例：Wiener 測度