分離定理とミニマックス定理，リスク中立確率，協力ゲームのコア

20121130,1206,08–12,16–17,20,20130121,
20130121–23,26–0206,10(協力ゲーム)
20130211
20150109(分離定理に基づく mimiax 定理と鞍点定理の証明の関係完成),19

要約．

ラグランジュの未定乗数法（等式条件下の極値問題）と分離定理の知識を仮定して，関連する経済数学のいくつかの話題をその視点から統一的に要約する：

1. 分離定理の要約の後，その凸関数への適用としてのミニマックス定理を証明する．特に，古典的な二人零和非協力ゲームの理論におけるミニマックス定理は凸関数が線形な場合である．
2. 凸関数不等式条件下の凸関数最小値問題（鞍点定理・Kuhn–Tucker 条件）と分離定理の関係もミニマックス定理である．但し，最小値問題ではゲームの理論におけるプレーヤー 1 の特定の純戦略（成分）の極値と関係がつく条件設定で，成分に関する精密な結果であり，双対変数の線形性を用いてラグランジュの鞍点と注目成分の最小が一致する必要十分条件にしている．
3. 特に，線形化した問題には多くの応用がある．
   - (a) 確率測度の存在定理の証明としての分離定理という観点から，裁定が無い市場におけるリスク中立確率の存在定理を要約する．特に，線形空間と第 3 象限が原点のみで接する場合の分離定理から対応するベクトル，すなわち，確率測度の正値性を得る．
   - (b) 双対定理は鞍点定理において凸関数として線形な場合である．
   - (c) 不等式条件下の最小値問題を C^1 の場合に局所化して線形化すれば，一般の C^1 関数でミニマックス定理の帰結としての Fritz–John 条件を得る．
   - (d) 提携型ゲームの中の協力ゲームの配分理論についてコアと双対定理に関係がある．コアは集合関数の（全測度が共通な）測度による上からの評価なので，双対定理によってゲームが平衡 (balanced) であることと同値になる．
   - (e) ゲームが全平衡（すべての部分集合に制限したゲームが平衡）であることと均一効用関数市場表現を持つことは同値である．

目 次

0 準備：記号． 2

1 準備：分離定理の復習． 2

2 関数の値域に関する分離定理． 3

3 二人零和非協力ゲームの復習． 4

4 ミニマックス定理． 6

5 凸関数不等式条件下の凸関数の最小値の鞍点定理． 8

6 凸関数の最小値に関するミニマックス定理と鞍点定理． 9

7 線形空間と「第 3 象限」の分離定理. 10
7.1 Gordan の定理. 11
7.2 リスク中立確率の存在. 12
7.3 Fritz–John 条件. 13
7.4 双対定理. 15

8 協力ゲームの配分の理論のコアの問題. 16
8.1 協力ゲームの配分の理論のコアの問題の概観. 16
8.2 協力ゲームと配分の定義. 17
8.3 コアの存在と平衡ゲーム. 17
8.3.1 コア. 17
8.3.2 平衡 (balanced) ゲーム. 18
8.4 全平衡ゲームと市場ゲームの同値性. 19
8.4.1 全平衡 (totally balanced) ゲーム. 19
8.4.2 市場 (transferrable utility market) ゲーム. 20
8.4.3 全平衡ゲームと市場表現の存在の同値性. 22
8.5 コヒーレントリスク測度. 23
8.5.1 コアによるゲームの表示. 23
8.5.2 コヒーレントリスク測度 23
8.5.3 コアで表示されたゲームの性質. 23
8.6 例：3 人対称ゲーム. 24
8.6.1 いくつかのクラスの包含関係. 24
8.6.2 市場表現と全平衡被覆. 25
8.6.3 $v_3 > 3v_1$ のときの市場ゲーム. 25
8.7 市場ゲームとコアの関係. 28

0 準備：記号.

以下，$u \in \mathbb{R}^n$ をベクトルとして，第 i 成分を u_i と書き，内積を $u \cdot v$，ノルムを $\|v\| = \sqrt{v \cdot v}$ で表す．次元（成分数）n に関係なく零ベクトルを $\overrightarrow{0}$ で表す．ベクトル u が非負 ($u \geqq \overrightarrow{0}$) とは全ての i について $u_i \geqq 0$ を言う．ベクトル u, v について $u \geqq v$ は $u - v \geqq \overrightarrow{0}$ を言う．$\overrightarrow{0}$ 以外のベクトルは記号の簡単のため矢印を付けない．

以下に登場するベクトルは一部を，n 次元空間 $\mathbb{R}^n$ 上の点と同一視する．同一視は，ベクトル v の各成分をそれぞれ点の各座標成分と対応させることで行う．これによって，凸集合を空間内の凸領域とみなして分離定理に対する幾何的な直感とする．

1 準備：分離定理の復習.

分離定理は，n 次元空間 $\mathbb{R}^n$ の中の共有点を持たない 2 個の凸集合は $n-1$ 次元空間（超平面）の仕切りを入れて別々の半無限空間に収めることができる，という事実である．$A \subset \mathbb{R}^n$ が**凸集合**とは $u, v \in A$ かつ $0 < t < 1$ ならば $tu + (1-t)v \in A$ を満たすことを言う．空集合は考えない．「A, B が凸集合ならば $A - B = \{u - v \mid u \in A. v \in B\}$ も凸集合」という機械的に確かめられる性質によって一方が原点だけの集合の場合に帰着する．($A - B$ はここでは $A \setminus B = A \cap B^c$ と異なるので注意.)

命題 1 (原点と閉凸集合の分離定理) $A \subset \mathbb{R}^n$ が閉凸集合で $\overrightarrow{0} \notin A$ ならば，どの $v \in A$ も $q \cdot v \geqq c$ を満たす，$q \in \mathbb{R}^n \setminus \{\overrightarrow{0}\}$ と正定数 c の組がある． ◇

証明． $w \in A$ をとり，$R = \|w\|$ とおき，$B = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \|v\| \leqq R\}$ とおく．$f(v) = \|v\|$ で $f\colon A \cap B \to \mathbb{R}_+$ を定義すると，f は連続関数で $A \cap B$ は有界閉集合だから，最小値の原理から，どの $v \in A \cap B$ も $f(v) \geqq f(q)$ を満たす $q \in A \cap B$ がある．$q \in B$ だから $f(q) = \|q\| \leqq R$ なので，$v \in A \cap B^c$ でも $f(v) \geqq f(q)$. $\overrightarrow{0} \notin A$ だから $q \neq \overrightarrow{0}$ なので，$c = \|q\|^2 = f(q)^2 > 0$. A が凸なので，$v \in A$ かつ $0 < t < 1$ ならば $f(tv + (1-t)q)^2 \geqq f(q)^2 = c$. よって $t\|v\|^2 + 2(1-t)v \cdot q + (t-2)\|q\|^2 \geqq 0$ が任意の $0 < t < 1$ に対して成り立つ．$t \to 0$ として $v \cdot q \geqq \|q\|^2 = c$. □

命題 2 (原点と原点に接する凸集合の分離定理) A が凸集合で $\overrightarrow{0} \in \overline{A} \setminus A$ ならばどの $v \in A$ も $q \cdot v \geqq 0$ を満たす $q \in \mathbb{R}^n \setminus \{\overrightarrow{0}\}$ がある． ◇

証明． 概略のみ示す．$\overrightarrow{0}$ は凸集合 A の境界の点で A に含まれないから $\lim_{k\to\infty} w_k = \overrightarrow{0}$ を満たす $w_k \in (\overline{A})^c$, $k = 1, 2, \ldots,$ が（次元に関する帰納法によって）とれる．k を固定して閉凸集合 $\overline{A} - \{w_k\}$ を命題 1 の A とすれば，とくに，どの $v \in A$ も $q_k \cdot v > q_k \cdot w_k$ を満たす $q_k \in \mathbb{R}^n \setminus \{\overrightarrow{0}\}$ がある．$\|q_k\|$ でこの不等式の両辺を割ることで，最初から $\|q_k\| = 1$ とおける．$\{q \in \mathbb{R}^n \mid \|q\| = 1\}$ はコンパクトだから収束部分列をとることで，$\{q_k\}$ が $k \to \infty$ で q に収束するとしてよい．極限を取ると $q \cdot v \geqq q \cdot \overrightarrow{0} = 0$. □

命題 3 (二つの凸集合の分離定理) $A, B \subset \mathbb{R}^n$ が凸集合で $A \cap B = \emptyset$ ならばどの $u \in A$ も $q \cdot u \geqq c$ かつどの $v \in B$ も $q \cdot v \leqq c$ を満たす，ゼロでないベクトル $q \in \mathbb{R}^n \setminus \{\overrightarrow{0}\}$ と実定数 c の組がある． ◇

証明． A と B は凸だから $A - B$ は凸である．$A \cap B = \emptyset$ なので $A - B \not\ni \overrightarrow{0}$. $\overline{A - B} \not\ni \overrightarrow{0}$ ならば命題 1 から，$\overline{A - B} \ni \overrightarrow{0}$ ならば命題 2 から，どの $u \in A$ と $v \in B$ の組も $q \cdot (u - v) \geqq 0$ を満たす $q \in \mathbb{R}^n \setminus \{\overrightarrow{0}\}$ がある．$c = \sup_{v \in B} q \cdot v$ とおくと $c \leqq \inf_{u \in A} q \cdot u$ がわかるので，q と c が求める性質を満たす． □

2 関数の値域に関する分離定理．

二人零和非協力ゲームのミニマックス定理と凸関数不等式条件下の凸関数の最小値に関する鞍点定理に共通する分離定理は次である．

定理 4 (ミニマックス型分離定理) $S \subset \mathbb{R}^n$ を凸集合，$h\colon S \to \mathbb{R}^k$ を凸関数（値の各成分ごとに凸関数）であって，

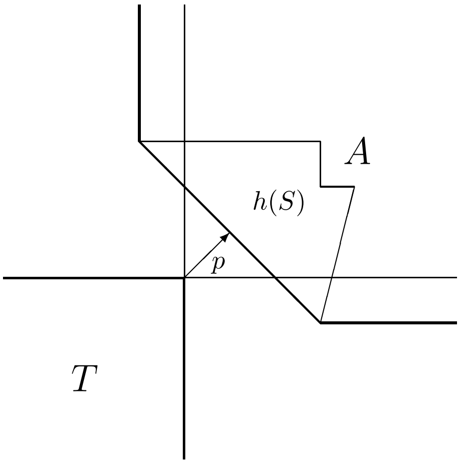
$$\min_{x \in S} \max_{i=1,\ldots,k} h_i(x) \geqq 0 \tag{1}$$

を満たすとする．このとき，

$$\exists p \in \mathbb{R}^k_+ \setminus \{\overrightarrow{0}\};\ \min_{x \in S} p \cdot h(x) \geqq 0 \tag{2}$$

が成り立つ． ◇

証明． $A = \{u \in \mathbb{R}^k \mid \exists x \in S;\ u \geqq h(x)\}$ および第 3 象限（境界を除く）$T = \{u \in \mathbb{R}^k \mid u < \overrightarrow{0}\}$ とおくと，(1) から，$A \cap T = \emptyset$.



T はあきらかに凸で，A も凸である．なぜなら $u, v \in A$ と $0 < \lambda < 1$ に対して，$u \geqq h(x)$ および $v \geqq h(y)$ が成り立つ $x, y \in S$ が存在し，S が凸だから $\lambda x + (1-\lambda)y \in S$ であって，$h\colon\ S \to \mathbb{R}^k$ が凸だから，

$$\lambda u + (1-\lambda)v \geqq \lambda h(x) + (1-\lambda)h(y) \geqq h(\lambda x + (1-\lambda)y)$$

となって，$\lambda u + (1-\lambda)v \in A$ となるからである．

よって分離定理（命題 3）から，$p \cdot u \geqq c \geqq p \cdot v,\ u \in A,\ v \in T.$ となる $p \in \mathbb{R}^k \setminus \{\overrightarrow{0}\}$ と $c \in \mathbb{R}$ の組がある．

T の中で $v_i \to -\infty$ とできるので，$p_i \geqq 0, i = 1, \ldots, k$．さらに T の中で $v \to \overrightarrow{0}$ とできるので，$c \geqq 0$. よって $\exists p \in \mathbb{R}_+^k \setminus \{\overrightarrow{0}\};\ (\forall u \in A)\ p \cdot u \geqq 0$. 特に任意の $x \in S$ に対して $h(x) \in A$ だから(2) を得る． □

3　二人零和非協力ゲームの復習．

ノイマンの二人零和非協力ゲームでは，プレーヤー 1 と 2 それぞれの選択肢集合の上の確率測度に関する双線形形式をプレーヤー 1 の利得とし，同時に 2 の損失とする．すなわち，ゲームの結果に応じた 2 から 1 への支払いを与える．1 から 2 への支払いは負の値で表す．

$1\backslash 2$	表	裏
表	1	-1
裏	-1	1

上の表の例は，各プレーヤーがそれぞれ硬貨を持ち，それぞれ表か裏のどちらを出すか決めて同時に出す，というゲームである．各プレーヤーの選択肢はどちらもそれぞれ $\{$ 表, 裏 $\}$ であり，支払いは，表裏が一致したとき 1，逆のとき -1，である．

直感的には，プレーヤー 1 は相手の選択を読めば勝ち，プレーヤー 2 は相手の読みを外せば勝ち，というゲームである．これに引き分けを加えたのがじゃんけんと考えられる．上表の例やじゃんけんは純粋戦略が Nash 均衡にならない．たとえばプレーヤー 1 が選択肢を一つに決めると，2 は一方的に勝つ選択肢で対抗するので，1 は最初の選択肢を取り替えたほうが利得が増える．Nash 均衡とは，双方が戦略を定めたとき，どちらも一方的に自分の戦略を取り替える理由がない，戦略の組み合わせを言う．

古典的な理論では，混合戦略，すなわち，各プレーヤーの純粋戦略集合上の確率測度を定めることを戦略の自由度とする．たとえば，じゃんけんでグー，チョキ，パーをどういう割合で出すか，を指す.（「前回○を出したから次は×の確率を増やす」というように，過去の手番の結果に基づいて次を決めることも日常では多いが，ここでは，互いに完全に手の内を読み切った結果，全ての回が独立という,「究極の名人芸」のような状況を考えている．過去の手番の影響を受ける状況はゲーム理論では繰り返しゲーム，確率論では確率過程（確率連鎖）として研究される.）

		q	$1-q$
	$1\backslash 2$	表	裏
p	表	1	-1
$1-p$	裏	-1	1

上表の例では，プレーヤー 1 の純粋戦略集合 { 表, 裏 } の上の確率測度の集合

$$\Delta_2 = \{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 \mid p_1 \geqq 0,\ p_2 \geqq 0,\ p_1 + p_2 = 1\}$$

が混合戦略の全体で，1 はその中から一つを選ぶ．p_1 は 1 が表を選ぶ確率，p_2 は裏を選ぶ確率である．今の例では表を出す確率 $p = p_1$ を与えれば $p_2 = 1 - p$ と決まって，1 の混合戦略（確率測度）の選択が決まる．ここで，確率の非負値性から

$$0 \leqq p \leqq 1$$

である．

プレーヤー 2 の混合戦略の全体も同様に 2 の純粋戦略集合 { 表, 裏 } の上の確率測度の集合（Δ_2 のコピー）である．

純粋戦略はどれかの選択肢を確率 1 で取る，と理解して，混合戦略の一つとみなす．1 が表を選び続ける純粋戦略は $p = 1$ で表される．

プレーヤー達がそれぞれの混合戦略 p と q を選んでから実際のゲームが始まる．1 と 2 が同時に硬貨を出すということは，ある結果が生じる確率が，確率測度 $(p, 1-p) \in \Delta_2$ と確率測度 $(q, 1-q) \in \Delta_2$ の直積確率測度である，という意味である．したがって，上表の例では，プレーヤー 1 の利得の期待値（零和ゲームでは 2 の損失の期待値に等しい）は，

$$E(p, q) = pq - p(1-q) - (1-p)q + (1-p)(1-q) = (1-2p)(1-2q)$$

である．

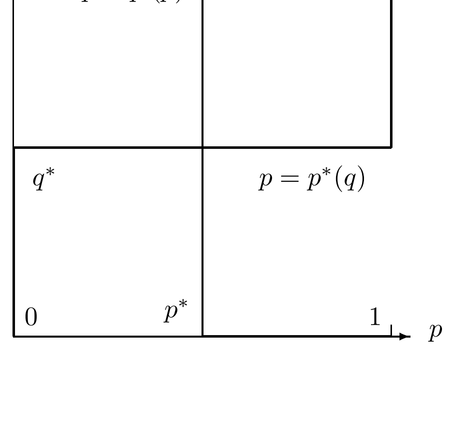
プレーヤー 1 は，2 が選んだ戦略 q を察して，それに応じて，自分がコントロールできる自分の戦略，すなわち p，をうまく選んで，$E(p, q)$ を最大にする：

$$E(p^*(q), q) = \max_{0 \leqq p \leqq 1} E(p, q).$$

$E(p, q)$ の具体形から，$q < 1/2$ のときは，$1 - 2q > 0$ なので，p が小さいほど $E(p, q)$ が大きいので，選びうる p の最小値 $p = 0$ が最善である．つまり 2 が裏を出す可能性が高い時は，それに合わせて 1 も裏を出し続けるのが最善の戦略である．逆に $q > 1/2$ のときは $p = 1$ が最善である．$q = 1/2$ のときは，p に無関係に $E(p, 1/2) = 0$ となるので，$0 \leqq p \leqq 1$ 全てが選択肢である：

$$p = p^*(q) = \begin{cases} 0, & 0 \leqq q < 1/2, \\ [0, 1], & q = 1/2, \\ 1, & 1/2 < q \leqq 1 \end{cases} ;\ E(p^*(q), q) = \begin{cases} E(0, q) = 1 - 2q, & 0 \leqq q < 1/2, \\ E(p, q) = 0, & q = 1/2, \\ E(1, q) = 2q - 1, & 1/2 < q \leqq q \end{cases}$$

$E(p, q^*(p)) = \min_{q} E(p, q)$ を与える $q = q^*(p)$ も同様に求まる．



$p = p^*(q)$ と $q = q^*(p)$ が交点 (p^*, q^*) を持てば，$E(p^*, q^*) = \max_p E(p, q^*) \geqq E(p, q)$ だから，プレーヤー 1 は戦略を変更する理由が無く，$E(p^*, q^*) = \min_q E(p^*, q) \leqq E(p^*, q)$ だから，プレーヤー 2 も戦略を変更する理由が無い．すなわち，2 変数関数 E の鞍点であり，Nash 均衡である．

後述の定理5（ミニマックス定理と鞍点定理）は

$$\min_q \max_p E(p, q) = \min_q E(p^*, q) = E(p^*, q^*) = \max_p E)p, q^*) = \max_p \min_q E(p, q)$$

なる (p^*, q^*) の存在を保証する．これは $p = p^*(q)$ と $q = q^*(p)$ の交点であり，鞍点すなわち Nash 均衡点の存在が定理5によって零和非協力二人ゲームにおいて一般的に保証される．

4　ミニマックス定理．

§ 3 の例を一般化するために

$$\Delta_m = \{p = (p_1, \ldots, p_m) \in \mathbb{R}_+^m \mid \sum_{j=1}^m p_i = 1\} \tag{3}$$

とおく．

定理 5 (ミニマックス定理と鞍点定理) $S \subset \mathbb{R}^n$ を凸集合，$K\colon\ S \to \mathbb{R}^m$ を凸関数とする．

$$E(p, q) = p \cdot K(q) = \sum_{i=1}^m p_i\, K_i(q) \tag{4}$$

で $E\colon\ \Delta_m \times S \to \mathbb{R}$ を定義するとき，$\min_{q \in S} E(p, q) > -\infty,\ p \in \Delta_m,$ とする．このとき，

$$\max_{p \in \Delta_m} \min_{q \in S} E(p, q) = \min_{q \in S} \max_{p \in \Delta_m} E(p, q) = \min_{q \in S} E(p^*, q) = \max_{p \in \Delta_m} E(p, q^*) = E(p^*, q^*) \tag{5}$$

となる $(p^*, q^*) \in \Delta_m \times S$ が存在する．◇

(5) の左半分がミニマックス定理，右半分が鞍点定理

$$E(p, q^*) \leqq E(p^*, q^*) \leqq E(p^*, q), \quad p \in \Delta_m\,,\ q \in S, \tag{6}$$

(p^*, q^*) が鞍点である．

例えば二人零和非協力ゲームの場合は $S = \Delta_n$ で閉凸集合なので E の有界性は問題ない．$i = 1, \ldots, m$ はプレーヤー 1 の行動の選択肢（純戦略）を表し，$j = 1, \ldots, n$ はプレーヤー 2 の行動の選択肢（純戦略）を表す．K の第 i 成分 $K_i\colon\ S \to \mathbb{R}$ は，プレーヤー 1 の純戦略 i に対する 1 の利得であり，$E(p, q)$ はプレーヤー 1 の混合戦略 $p \in \Delta_m$ とプレーヤー 2 の混合戦略 $q \in S$ に対する 1 の期待利得である．**K には 2 の混合戦略 q に関する凸性以外に何の制約も無い**．

なお，ノイマンの二人零和非協力ゲームの場合は 1 と 2 に対する対称性から，$K(q) = A \cdot q$ と，行列 A を用いて線形写像に選び，$S = \Delta_n$ に選ぶ．いずれも定理5の仮定を満たすので，結論がそのまま成立する．

(5) のミニマックス定理の等号うち一方の不等号は自明である．

命題 6 $U \subset \mathbb{R}^k,\ V \subset \mathbb{R}^\ell,\ f\colon\ U \times V \to \mathbb{R},\ x^* \in U$ たちがなんであっても，

$$\min_{y \in V} \max_{x \in U} f(x, y) \geqq \max_{x \in U} \min_{y \in V} f(x, y)$$

が成り立つ．◇

証明． 自明に，$\min_{y'\in V} f(x,y') \leqq f(x,y) \leqq \max_{x'\in U} f(x',y)$ が全ての $x\in U$ と $y\in V$ に対して成り立つので，

$$(\forall x\in U)(\forall y\in V)\ \min_{y'\in V} f(x,y') \leqq \max_{x'\in U} f(x',y).$$

右辺は x によらず左辺は y によらないので主張の左の不等号が成り立つ． □

定理5 の証明． 命題 6 と，任意の $p^*\in\Delta_m$ に対して成り立つ $\max_{p\in\Delta_m}\min_{q\in S} E(p,q) \geqq \min_{q\in S} E(p^*,q)$ から，逆向きの不等式，

$$\min_{q\in S} E(p^*,q) \geqq \min_{q\in S}\max_{p\in\Delta_m} E(p,q) \tag{7}$$

が成り立つ $p^*\in\Delta_m$ があることを証明すれば(5) のうちミニマックス定理の部分

$$\max_{p\in\Delta_m}\min_{q\in S} E(p,q) = \min_{q\in S}\max_{p\in\Delta_m} E(p,q) = \min_{q\in S} E(p^*,q) \tag{8}$$

が言える．

$i=1,\ldots,m$ に対して $K_i(x)$ から i と x によらない定数を引いて

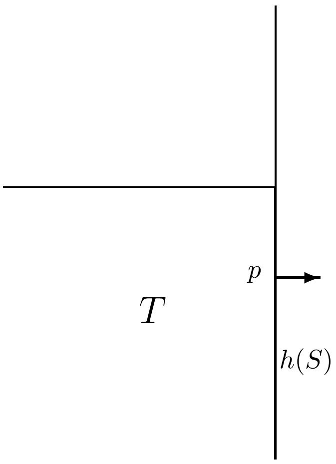
$$h_i(x) = K_i(x) - \min_{q\in S}\max_{p\in\Delta_m} E(p,q) \tag{9}$$

とおくと，K_i が凸なので h_i も凸で，

$$\max_{p\in\Delta_m} E(p,q) = \max_{p\in\Delta_m} p\cdot K(q) = \max_{i\in\{1,\ldots,m\}} K_i(q),\ q\in S,$$

に注意すると，

$$\min_{x\in S}\max_{i\in\{1,\ldots,m\}} h_i(x) = 0. \tag{10}$$



h_i, $i=1,\ldots,m$, をたばねたものを $h:\ S\to\mathbb{R}^m$ とおくと，定理4で $k=m$ としたものの仮定が成り立ったので，$\min_{x\in S} p\cdot h(x) \geqq 0$ となる $p\in\mathbb{R}^m_+\setminus\{\overrightarrow{0}\}$ がある．

$\displaystyle\sum_{i=1}^m p_i > 0$ だから，$p^* := \dfrac{1}{\sum_{i=1}^m p_i} p \in \Delta_m$ であって，

$$\min_{q\in S} p^*\cdot h(q) \geqq 0. \tag{11}$$

これに(9) を代入して，$\displaystyle\sum_{i=1}^m p_i^* = 1$ を用いると，(7)（ミニマックス定理）が成り立つ．

ここまでは(1) の不等号しか使わなかったが，実際は(10) のように等号が成り立つので，$\max_{i\in\{1,\ldots,m\}} h_i(q^*) = 0$ を満たす $q^* \in S$ がある．これは特に $h_i(q^*) \leqq 0,\ i = 1, 2, \ldots, m,$ を意味するが，(11) と合わせると

$$0 \geqq p^* \cdot h(q^*) \geqq \min_{q\in S} p^* \cdot h(q) \geqq 0$$

となるので，すべて 0，したがって

$$E(p^*, q^*) - \min_{q\in S} \max_{p\in\Delta_m} E(p, q) = p^* \cdot K(q^*) - \min_{q\in S} \max_{p\in\Delta_m} E(p, q) = p^* \cdot h(q^*) = 0 \tag{12}$$

である．また，$h_i(q^*) \leqq 0$ からは，任意の $p \in \Delta_m$ に対して $p \cdot h(q^*) \leqq 0$ も得る．したがって，

$$E(p^*, q^*) - E(p, q^*) = p^* \cdot K(q^*) - p \cdot K(q^*) = p^* \cdot h(q^*) - p \cdot h(q^*) \geqq 0,$$

すなわち $\max_{p\in\Delta_m} E(p, q^*) = E(p^*, q^*)$. いっぽう (12) と (8) から $E(p^*, q^*) = \min_{q\in S} E(p^*, q)$ も成り立つので，(5) の鞍点定理の部分

$$\min_{q\in S} E(p^*, q) = \max_{p\in\Delta_m} E(p, q^*) = E(p^*, q^*)$$

も成り立つ． □

5 凸関数不等式条件下の凸関数の最小値の鞍点定理．

制約想定を満たす C^1 凸不等式条件の下で C^1 凸関数の最小点は Kuhn–Tucker 条件を満たす点と同値である．凸でなければ局所線形化して，Fritzh–John 条件が極値の必要条件となり，制約想定の下で Kuhn–Tucker 条件が必要となる一方で，凸関数ならば極小点の唯一性から十分条件にもなるという構図である．

いっぽう C^1 でなくても，不等式条件下の最小点であることから，Kuhn–Tukcer 条件を大局化したラグランジュ関数の最小性が（凸性と制約想定の下で）分離定理から得られる．

このとき双対変数（未定乗数）に関しては，非負な範囲に限れば自然に最大点になるという明らかな結果を加えれば（鍵となる性質 $b_i g_i(a) = 0$ を経由して）必要十分条件になる．これが鞍点定理である．

鞍点定理における分離定理の使い方はミニマックス定理と同じであることを § 6 で示す．

定理 7 (鞍点定理) $S \subset \mathbb{R}^n$ を凸集合，$f:\ S \to \mathbb{R}$ と $g:\ S \to \mathbb{R}^m$ を凸関数で $g(x_0) < 0$ となる $x_0 \in S$ がある（*Slater* の制約想定の十分条件）とする．$L(x, y) = f(x) + y \cdot g(x)$ で定義される $L:\ S \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$（ルジャンドル変換の母関数，ラグランジュ関数）を考える．このとき，$g(a) \leqq \overrightarrow{0}$ を満たす $a \in S$ について次の *(i)* と *(ii)* は同値.

(i) $\min_{x\in S;\ g(x)\leqq\overrightarrow{0}} f(x) = f(a),$

(ii) $\exists b \in \mathbb{R}^m_+;\ L(x, b) \geqq L(a, b) \geqq L(a, y),\ x \in S,\ y \geqq 0.$

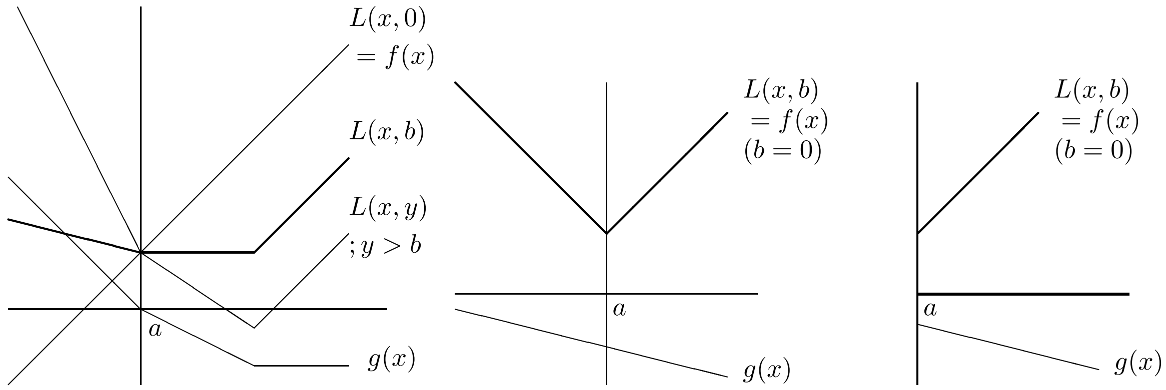
さらに，いずれか（したがって両方）が成り立つとき

(iii) $b_i\, g_i(a) = 0,\ i = 1, 2, \ldots, m,$ が成り立つ．したがって特に $L(a, b) = f(a)$ が成り立つ. ◇

証明． (ii) → (i) は明らか．実際，(ii) の右の不等式で $y = 0$ とおくと，$b \geqq \overrightarrow{0}$ と $g(a) \leqq \overrightarrow{0}$ から，$b_i\, g_i(a) = 0,\ i = 1, \ldots, m$．よって，(iii) が成り立ち，さらに (ii) 左の不等式から

$$f(x) \geqq f(x) + b \cdot g(x) \geqq f(a) + b \cdot g(a) = f(a),\ x \in S,\ g(x) \leqq \overrightarrow{0},$$

だから (i) が成り立つ.



分離定理は (i) → (ii) の証明で使う．(i) が成り立つとして，$h(x) = \begin{pmatrix} f(x)-f(a) \\ g(x) \end{pmatrix}$ で $h:\ S \to \mathbb{R}^{m+1}$ を定義すると，$x \in S$ ごとに

$$\max_{i=2,\dots,m+1} h_i(x) = \max_{i=1,\dots,m} g_i(x) > 0 \text{ または } g(x) \leqq 0$$

であって，後者のときは (i) から $h_1(x) = f(x) - f(a) \geqq 0$ だから $k = m+1$ として定理4の(1) が成り立つので，定理4の(2) から

$$\exists p \in \mathbb{R}^{m+1}_+ \setminus \{\overrightarrow{0}\};\ \min_{x\in S} p \cdot h(x) \geqq 0$$

が成り立つ．もし，$p_1 = 0$ ならば，p_2 から $p_m + 1$ までのどれかは正で他は非負だから，仮定（Slater の制約想定の十分条件）から $p \cdot h(x_0) = \sum_{i=2}^{m+1} p_i g_{i-1}(x_0) < 0$ となって矛盾するから，$p_1 > 0$．そこで，$b = \frac{1}{p_1}{}^t(p_2\ p_3\ \cdots\ p_{m+1}) \in \mathbb{R}^m_+$ とおけば $x \in S$ と $y \geqq 0$ に対して

$$L(x,b) = f(a) + f(x) - f(a) + b \cdot g(x) = f(a) + \frac{1}{p_1} p \cdot h(x) \geqq f(a).$$

特に $x = a$ とおくと $b \geqq \overrightarrow{0}$ かつ $g(a) \leqq \overrightarrow{0}$ だから $b \cdot g(a) = 0$ となり，さらに (iii) が成り立つ．

よってさらに，

$$L(x,b) \geqq L(a,b) = f(a) \geqq f(a) + y \cdot g(a) = L(a,y),\quad x \in S,\ y \geqq 0.$$

すなわち (ii) が成り立つ． □

6　凸関数の最小値に関するミニマックス定理と鞍点定理．

凸不等式条件下の凸関数の最小値の問題（§ 5）に，ミニマックス定理（定理5）をそのまま適用して得られる知見と，鞍点定理（定理7）を比べることで，鞍点定理における分離定理の使い方はミニマックス定理と本質的に同じであることを確認する．定理7の仮定のうち凸性に関するものだけを用意すれば，ミニマックス定理が適用できるが，期待利得 $E(p,q)$ を関数 $L(p,q)$ で書くためには，$p_1 > 0$ が必要なので，制約想定の十分条件も最初から加えておく．

$S \subset \mathbb{R}^n$ を凸集合，$f:\ S \to \mathbb{R}$ と $g:\ S \to \mathbb{R}^m$ を凸関数で $g(x_0) < 0$ となる $x_0 \in S$ がある（Slater の制約想定の十分条件）とする．定理7の (i) から (ii) を言うことを念頭に，$g(a) \leqq \overrightarrow{0}$ を満たす $a \in S$ において，$\min_{x\in S;\ g(x)\leqq\overrightarrow{0}} f(x) = f(a)$ が成り立つとする．

定理5に記号を合わせるために，$K(x) = \begin{pmatrix} f(x)-f(a) \\ g(x) \end{pmatrix}$ で $K:\ S \to \mathbb{R}^{m+1}$ を定義し，$0 < p_0 < 1$ かつ $(p_0, p) \in \Delta_{m+1}$ に対して（以下 (p_0,p) に限って列ベクトルと行ベクトルの記法を混用する）

$$E((p_0,p),q) = (p_0,p) \cdot K(x) = p_0\,(f(q) - f(a)) + p \cdot g(q)$$

で $\Delta_{m+1} \times S \to \mathbb{R}$ を定義する．K は定理7の (i) $\to$ (ii) の証明の h である．

実用上は当然の仮定だが，$\min_{q \in S} E(p,q) > -\infty$**,** $p \in \Delta_m$**，とする**と，ミニマックス定理（定理5）が成り立ち，そのうちもっとも非自明本質的な不等式は

$$\exists (p_0^*, p^*) \in \Delta_{m+1};\ \min_{q \in S} (p_0^* \left(f(q) - f(a)\right) + p^* \cdot g(q)) \geqq \min_{q \in S} \max_{(p_0,p) \in \Delta_{m+1}} (p_0 \left(f(q) - f(a)\right) + p \cdot g(q))$$

である．**右辺の** q **の最小値が** $q^* \in S$ **で実現するとして，**

$$\exists (p_0^*, p^*) \in \Delta_{m+1},\ \exists q^* \in S;\ \min_{q \in S} (p_0^* \left(f(q) - f(a)\right) + p^* \cdot g(q)) \geqq \max_{(p_0,p) \in \Delta_{m+1}} (p_0 \left(f(q^*) - f(a)\right) + p \cdot g(q^*)).$$

この不等式の右辺で $(p_0, p) = (p_0^*, p^*)$ とおいたものを考え，それとは別に，左辺で $q = q^*$ とおいたものを考えてつなぐと，

$$\begin{aligned} &\exists (p_0^*, p^*) \in \Delta_{m+1},\ \exists q^* \in S;\ (\forall q \in S)\ (\forall (p_0,p) \in \Delta_{m+1}) \\ &p_0^* \left(f(q) - f(a)\right) + p^* \cdot g(q) \geqq p_0^* \left(f(q^*) - f(a)\right) + p^* \cdot g(q^*) \geqq p_0 \left(f(q^*) - f(a)\right) + p \cdot g(q^*). \end{aligned} \tag{13}$$

$q = a$ のとき最左辺は仮定 $g(a) \leqq \overrightarrow{0}$ から非正なので，残りの辺も非正である．特に，もし，$g_i(q^*) > 0$ なる i があれば，$p_i = 1,\ p_j = 0,\ j \neq i,$ とおくことにより，$0 > 0$ となって矛盾するので，$g(q^*) \leqq \overrightarrow{0}$．$f(a)$ は仮定から $x \in S$ かつ $g(x) \leqq \overrightarrow{0}$ の中での最小値なので $f(a) \leqq f(q^*)$ となるが，(13) に戻って，$q = a$ と $(p_0, p) = (1, \overrightarrow{0}) \in \Delta_{m+1}$ とおくと，最左辺と最右辺から $f(a) \geqq f(q^*)$ も得るので，$f(q^*) = f(a)$ となる．

簡単のため，$\{x \in S \mid g(x) \leqq \overrightarrow{0}\}$ **での** f **の最小値は** a **でのみ実現するとする**と，$q^* = a$ なので，(13) から，

$$(\forall q \in S)\ (\forall (p_0,p) \in \Delta_{m+1})\ p_0^* f(q) + p^* \cdot g(q) \geqq p_0^* f(a) + p^* \cdot g(a) \geqq p_0^* f(a) + p \cdot g(a). \tag{14}$$

$p_0^* = 0$ とすると，制約想定の十分条件の仮定 $g(x_0) < \overrightarrow{0}$ から $p^* \cdot g(x_0) < 0$ なので，$(p_0, p) = (1, \overrightarrow{0})$ と選んだとき $0 > p^* \cdot g(x_0) \geqq 0$ となって矛盾する．よって $p_0^* > 0$．(14) の辺々を p_0^* で割って

$$b = \frac{1}{p_0^*} p^* \in \mathbb{R}_+^m \ \Leftrightarrow\ (p_0^*, p^*) = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^m b_i} (1, b) \in \Delta_{m+1}$$

とおき，$L(x, y) = f(x) + y \cdot g(x)$ で定義される関数 $L\colon\ S \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ で書くと，

$$\exists b \in \mathbb{R}_+^m;\ (\forall q \in S)\ (\forall r \leqq \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^m b_i})\ (\forall p \in r\Delta_m)\ L(q, b) \geqq L(a, b) \geqq L(a, p).$$

定理7の (ii) と比べると，右辺の p の大きさの制限 r だけ弱いが，$g(a) \leqq \overrightarrow{0}$ なので，p を伸ばす単調性は自明である．また，(ii) $\to$ (i) において y の小さい範囲の単調性があれば十分でもある．

こうして，分離定理の使い方において鞍点定理定理7とミニマックス定理定理5に本質的な差はない．

7　線形空間と「第 3 象限」の分離定理．

定理4の形で分離定理を用いてきたが，線形空間と「第 3 象限」の分離定理は分離方向ベクトルの成分の非負値性を導く一方で，方向ベクトルと線形空間の直交性を導くことから，ミニマックス定理の他に，リスク中立確率，C^1 不等式条件下の最小値問題に関する Fritz–John (Kuhn–Tucker) 条件，線形計画（アフィン関数の場合の同最小値問題），それを通してさらに，協力ゲームのコアの存在と平衡ゲームであることの同値性，および全平衡ゲームと市場ゲームであることの同値性，などの応用がある．

7.1 Gordan の定理.

次の定理の前半が通常 Gordan の定理と呼ばれていて，線形空間と「第 3 象限」に分離定理を適用することで非負成分の直交ベクトルの存在を言う．

特に，リスク中立確率の正値性には，後半の線形空間と**閉**「第 3 象限」の分離定理が用いられる．

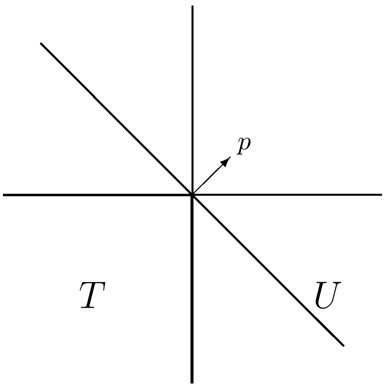
定理 8 $m \times n$ 行列 A に対して $U = \{{}^t A y \mid y \in \mathbb{R}^m\} \subset \mathbb{R}^n$ とおく．このとき，第 3 象限（境界を除く）$T = \{u \in \mathbb{R}^n \mid u < \overrightarrow{0}\}$ と共通部分がないこと $(U \cap T = \emptyset)$ と $Ap = \overrightarrow{0}$ を満たす $p \in \mathbb{R}_+^n \setminus \{\overrightarrow{0}\}$ があることが同値である．
さらに，線形空間と境界付き第 3 象限の共通部分が原点だけ，すなわち，$U \cap \overline{T} = \{\overrightarrow{0}\}$ のとき，言い換えると，原点を除く境界付き第 3 象限と共通部分がない，すなわち，$U \cap (\overline{T} \setminus \{\overrightarrow{0}\})$，と $Ap = \overrightarrow{0}$ を満たす $p > 0$ があることが同値である． ◇

証明． $Ap = \overrightarrow{0}$ を満たす $p \in \mathbb{R}_+^n \setminus \{\overrightarrow{0}\}$ があれば，$y \in \mathbb{R}^m$ に対して $0 = Ap \cdot y = p \cdot {}^t A y$．いっぽう $u < \overrightarrow{0}$ なる $u \in \mathbb{R}^n$ に対して $p \cdot u < 0$ よって $U \cap T = \emptyset$．

後半に関しても，$Ap = \overrightarrow{0}$ を満たす $p > 0$ があれば，$y \in \mathbb{R}^m$ に対して $0 = Ap \cdot y = p \cdot {}^t A y$．いっぽう $u \leqq \overrightarrow{0}$ なる $u \neq 0$ に対して $p \cdot u < 0$ よって $U \cap \overline{T} = \{\overrightarrow{0}\}$．

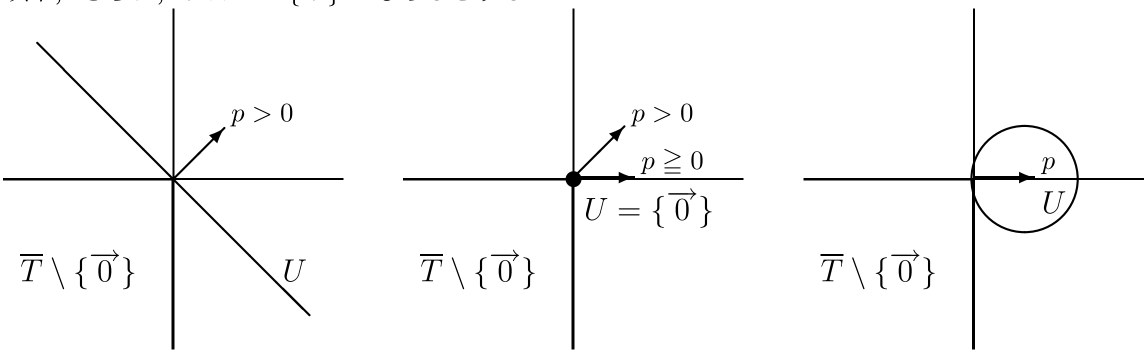
問題は逆向きである[1]．線形空間は凸集合なので U は凸だから分離定理（命題 3）から， $p \cdot u \geqq c \geqq p \cdot v,\ u \in U,\ v \in T.$ となる $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{\overrightarrow{0}\}$ と $c \in \mathbb{R}$ の組がある．T の中で $v_i \to -\infty$ とできるので，$p_i \geqq 0$, $i = 1, \ldots, n$．さらに T の中で $v \to \overrightarrow{0}$ とできるので，$c \geqq 0$．よって

$$\exists p \in \mathbb{R}_+^n \setminus \{\overrightarrow{0}\};\ (\forall y \in \mathbb{R}^m)\ Ap \cdot y = p \cdot {}^t A y \geqq 0. \tag{15}$$



$y \in \mathbb{R}^m$ のとき $-y \in \mathbb{R}^m$ だから $Ap \cdot y = 0$ となる．

以下，さらに，$U \cap \overline{T} = \{\overrightarrow{0}\}$ でもあるとする．



補題 9 定理8 の後半の状況において，$Ap = \overrightarrow{0}$ を満たす $p \in \mathbb{R}_+^n$ であって p の成分のうち 0 のものの個数が $1 \leqq k < n$ のものがあれば，0 の成分の個数が $k-1$ の $p' \in \mathbb{R}_+^n$ で $Ap' = \overrightarrow{0}$ を満たすものがある． ◇

[1](15) までについては,『凸集合 $S = \mathbb{R}^m$ 上の凸関数（線形写像）$h(y) = {}^t A y$ について仮定は定理4の仮定(1) と同値なので定理4の結論(2) から(15) を得る.』とできる．

補題 9 の証明． 最初に，$A\,p = \overrightarrow{0}$ と，p が U のすべてのベクトルと直交することと，$p \in U^{\perp}$ は同値であることに注意しておく．

$p_\ell = 0$ とし，第 ℓ 成分のみ 1，残りは 0 のベクトルを $e^{(\ell)}$ とおく．

全ての $q \in U^{\perp}$ に対して $q_\ell = 0$ ならば，$e^{(\ell)} \cdot q = 0,\ q \in U^{\perp}$, だから，$e^{(\ell)} \in (U^{\perp})^{\perp} = U$．したがって，$-e^{(\ell)} \in U \cap \overline{T}$ となって仮定に反する．

よって $\exists q \in U^{\perp};\ q_\ell \neq 0$. $U^{\perp}$ は線形空間なので，$q_\ell = 1$ とおいてよい．q が第 ℓ 成分以外は 0 ならば $e^{(\ell)} = q \in U^{\perp}$．再び $U^{\perp}$ は線形空間なので $p' = p + e^{(\ell)} \in U^{\perp}$ で，したがって $A\,p' = \overrightarrow{0}$ であり，その 0 成分の個数は $k-1$ である．

q が第 ℓ 成分以外にも 0 でない成分があるならば，$k < n$ なので少なくとも 1 つの i で $p_i > 0$ なので，

$$r = \max\{\frac{|q_i|}{p_i} \mid i = 1, \ldots, n;\ p_i > 0\} > 0$$

が（正値実数で）存在する．$p_i > 0$ ならば，$p_i + \dfrac{1}{2r} q_i \geqq \dfrac{1}{2} p_i > 0$ だし，$p_\ell + \dfrac{1}{2r} q_\ell = \dfrac{1}{2r} > 0$ なので，$p' = p + \dfrac{1}{2r} q \in U^{\perp}$ は 0 成分が $k-1$ 個以下のベクトルである．再び $U^{\perp}$ は線形空間なので $p' \in U^{\perp}$ で，したがって $A\,p' = \overrightarrow{0}$ である． □

分離定理によって定理8の前半で得た $p \geqq \overrightarrow{0}$ は，$p \neq \overrightarrow{0}$ なので 0 成分の個数が n 個未満である．したがって，補題 9 と帰納法により，定理8の後半の仮定の下で，定理8の後半が成り立つ． □

系 10 $U \subset \mathbb{R}^n$ が線形空間，$T = \{u \in \mathbb{R}^n \mid u < 0\}$ が「第 3 象限」（内部のみ）のとき，$U \cap \overline{T} = \{\overrightarrow{0}\}$ ならば $U^{\perp} \cap T \neq \emptyset$. ◇

証明． U の基底の 1 つを $\{a_i \in \mathbb{R}^n \mid i = 1, \ldots, m\}$ とし，$A = {}^t(a_1\ \cdots\ a_m)$ とおくと $U = \{{}^t A\,y \mid y \in \mathbb{R}^m\}$ となるから，定理8の後半で得られる $p > 0$ に対して，$-p \in T$ であって

$$({}^t A\,y) \cdot (-p) = -y \cdot (A\,p) = 0,\ y \in \mathbb{R}^m,$$

だから $-p \in U^{\perp}$ でもある． □

7.2 リスク中立確率の存在．

$\Omega = \{\omega_i \mid i = 1, \ldots, N\}$ $(N = \sharp\Omega)$ を母集団（シナリオの全体）とする確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ を考える．P は実確率測度．

n 個の金融原資産を持つ金融市場で時刻 $t \in \{0, 1\}$ での商品の価値を表す確率変数を $S_t :\ \Omega \to \mathbb{R}^n$ とする．ここで S_t のの第 i 成分 $S_{t,i}$ は商品 i の時刻 t での値段．

ポートフォリオ $x \in \mathbb{R}^n$（ショートも自由に許す）の時刻 t での価値は

$$(S_t, x) = \sum_{i=1}^{n} S_{t,i} x_i$$

である．

満期時の価格を全てのシナリオ（サンプル）に対して並べた行列を

$$D = \begin{pmatrix} S_{1,1}(\omega_1) & \cdots & S_{1,n}(\omega_1) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ S_{1,1}(\omega_N) & \cdots & S_{1,n}(\omega_N) \end{pmatrix},$$

とおく．

直感的には正しい値段付けが

$$S_{0,i} = \frac{1}{1+r}\mathrm{E}[\, S_{1,i}\,] = \frac{1}{1+r}\sum_{j=1}^{N} D_{ji}\mathrm{P}[\,\{\omega_j\}\,], \quad i=1,\dots,n,$$

となることを表すのが以下の定理である．

現在価値が**非正**($S_0\cdot x \leqq 0$) のポートフォリオであって，満期時に**全てのシナリオにおいて非負**($D\,x \in \mathbb{R}_+^N$) もの，ただし，現在価値と満期時の全シナリオすべてが 0 ではない組み合わせ，が存在するとき，この市場に裁定機会があるという．

定理 11 (無裁定市場のリスク中立確率) 市場に**裁定機会が無ければ**，$S_0 = {}^tD\,\psi$ を満たす $\psi > 0$ なる $\psi \in \mathbb{R}_+^N$ が存在する． ◇

$\mathrm{P}[\,\{\omega\}\,] = \dfrac{\psi(\omega)}{\sum_{\omega\in\Omega}\psi(\omega)}$ が定義する Ω を support とする確率測度をリスク中立確率と呼ぶ．

定理11 の証明． 定理8において，$m \to n$, $n \to N+1$ と読み替え，${}^tA = \begin{pmatrix} {}^tS_0 \\ -D \end{pmatrix}$ とおくと，現在価値 ${}^tS_0\,x = S_0\cdot x \leqq 0$ であって満期時に全シナリオで非負 ($-D\,x \leqq \overrightarrow{0}$) というポートフォリオが $0 \to \overrightarrow{0}$ 以外にない，ので，$U \cap (\overline{T} \setminus \{\overrightarrow{0}\}) = \emptyset$ だから，定理8から，$p_0\,S_0 - {}^tD\,p = 0$ を満たす $p_0 > 0$ と $p > 0$ なる $p \in \mathbb{R}_+^N$ がある．$\psi = \dfrac{1}{p_0}p$ が求めるものである． □

7.3 Fritz–John 条件．

C^1 凸関数に対する制約想定を満たす凸不等式条件下の最小値問題の Kuhn–Tucker 条件は鞍点条件，あるいは，§ 6 の対応の意味で，ミニマックス定理である．

C^1 だが凸関数とは限らない場合，極値の近くで線形化すればアフィン，すなわち，凸なので，極値の必要条件である Fritz–John 条件も分離定理に基づくミニマックス定理である．

不等式条件が凸で制約想定を見たし，最小値を取るべき関数も凸ならば Fritz–John 条件は Kuhn-Tucker 条件に強められかつ必要十分条件になる，という関係にある．

定理 12 (Fritz–John) $S \subset \mathbb{R}^n$ 上の C^1 関数たち $g:\ S \to$ $nrealsm$ と $f:\ S \to \mathbb{R}$，および，$a \in S$ に対して，

$$f(a) = \min_{x\in S;\ g(x)\leqq \overrightarrow{0}} f(x)$$

ならば，

$$\begin{aligned}
&\exists \mu_0 \geqq 0,\ \exists \mu \in \mathbb{R}_+^m;\\
&\mu_0\,\mathrm{grad}\,f(a) + \sum_{i=1}^{m}\mu_i\,\mathrm{grad}\,g_i(a) = \overrightarrow{0},\\
&(\mu_0,\mu_1,\dots,\mu_m) \neq (0,0,\dots,0),\\
&g_i(a)\mu_i = 0,\ i=1,2,\dots,m.
\end{aligned}$$

◇

証明． $I(a) = \{i \in \{1,2,\dots,m\} \mid g_i(a)=0\}$ とおく．条件から，g_i, $i \in I(a)$, が全て非正になる x では $f(x)-f(a) \geqq 0$ だから，$f(x)-f(a)$ と $g_i(x)$, $i \in I(a)$ が全て同時に負になることはない．C^1 なので，平均値の定理によって線形化できて，

$$\begin{aligned}
&A = \{\begin{pmatrix} (v, \mathrm{grad}\,f(a)) \\ (v, (\mathrm{grad}\,g_i(a),\ i \in I(a)) \end{pmatrix} \mid v \in \mathbb{R}^n\}\\
&T = \{u \in \mathbb{R}^{1+I(a)} \mid u < \overrightarrow{0}\}
\end{aligned}$$

とおくと，A は線形空間だから凸集合で，T も「第 3 象限」だから今までどおり凸集合で，$A \cap T = \emptyset$．よって，命題 3 から，どの $u \in A$ も $(\mu_0, \mu) \cdot u \geqq c$ かつどの $u \in T$ も $(\mu_0, \mu) \cdot u \leqq c$ を満たす，ゼロでないベクトル $(\mu_0, \mu) \in \mathbb{R}^{1+I(a)} \setminus \{\overrightarrow{0}\}$ と実定数 c の組がある．

$i \in I(a)$ に対して $-u_i$ がいくらでも大きい $u \in T$ があるので，$(\mu_0, \mu) \cdot u \leqq c$ が成り立つには $\mu_i \geqq 0$, $i \in \{0\} \cup I(a)$, が必要である．さらに $\overrightarrow{0}$ にいくらでも近い $u \in T$ があるので，いくらでも 0 に近い $(\mu_0, \mu) \cdot u$ があるので $c \geqq 0$ が必要である．

よって，どの $u \in A$ も $(\mu_0, \mu) \cdot u \geqq 0$ となる $q \in \mathbb{R}_+^{1+I(a)} \setminus \{\overrightarrow{0}\}$ がある．

A の定義から，どの $v \in \mathbb{R}^n$ に対しても $(v,\ \mu_0 \operatorname{grad} f(a) + \sum_{i \in I(a)} \mu_i \operatorname{grad} g_i(a)) \geqq 0$ となる．A は線形空間だから $-v \in \mathbb{R}^n$ も同時に成り立つので $(-v,\ \mu_0 \operatorname{grad} f(a) + \sum_{i \in I(a)} \mu_i \operatorname{grad} g_i(a)) \geqq 0$ すなわち $(v,\ \mu_0 \operatorname{grad} f(a) + \sum_{i \in I(a)} \mu_i \operatorname{grad} g_i(a)) \leqq 0$ だから 0 に等しい．これがどの $v \in \mathbb{R}^n$ に対しても成り立つから，$\mu_0 \operatorname{grad} f(a) + \displaystyle\sum_{i \in I(a)} \mu_i \operatorname{grad} g_i(a)) = 0$．$i \notin I(a)$ のとき $\mu_i = 0$ とおいて差し支えないので，Fritz–John 条件を得る． □

定理 13 (Kuhn–Tucker) 凸集合 $S \subset \mathbb{R}^n$ 上で定義された C^1 凸関数 $f:\ S \to \mathbb{R}$ と，$g(x_0) < \overrightarrow{0}$ となる $x_0 \in S$（制約想定の十分条件）が存在する m 成分 C^1 凸関数 $g:\ S \to$
$nrealsm$，および，$a \in S$ に対して，

$$f(a) = \min_{x \in S;\ g(x) \leqq \overrightarrow{0}} f(x)$$

と，

$$\begin{aligned} &\exists \lambda \in \mathbb{R}_+^m; \\ &\operatorname{grad} f(a) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \operatorname{grad} g_i(a) = \overrightarrow{0}, \\ &g_i(a)\lambda_i = 0,\ i = 1, 2, \ldots, m. \end{aligned} \tag{16}$$

は同値である． ◇

証明． a で最小値をとるならば，鞍点定理（定理7）の極値条件から勾配ベクトルに対する必要条件を得れば(16) は全て定理7に書かれている．

逆に KT 条件(16) が成り立つとする．$g(x) \leqq \overrightarrow{0}$ なる $x \in S$ に対して，f の凸 C^1 性，(16)，g の凸 C^1 性と $\lambda_i \geqq 0$，$I(a)$ の定義，を順に使うと

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &\geqq (x-a) \cdot \operatorname{grad} f(a) = -\sum_{i=1}^m \lambda_i (x-a) \cdot \operatorname{grad} g_i(a) = -\sum_{i \in I(a)} \lambda_i (x-a) \cdot \operatorname{grad} g_i(a) \\ &= -\sum_{i \in I(a)} \lambda_i (x-a) \cdot \operatorname{grad} g_i(a) \geqq \sum_{i \in I(a)} \lambda_i (-g_i(x) + g_i(a)) = -\sum_{i \in I(a)} \lambda_i g_i(x) = 0. \end{aligned}$$

よって $f(a)$ は $f(x)$ の $g(x) \leqq \overrightarrow{0}$ の下での S での最小値である． □

定理12を用いた順方向の別証． の証明． C^1 凸関数なので，$u = x_0 - a \in \mathbb{R}^n$ とおくと，$i \in I(a)$ に対して，制約想定の十分条件および $g_i(a) = 0$ と併せることで，

$$0 > g_i(x_0) - g_i(a) \geqq (u, \operatorname{grad} g_i(a)).$$

a で最小値をとるならば，定理12から Fritz–John 条件が成り立つので，特に

$$\mu_0(u, \operatorname{grad} f(a)) + \sum_{i \in I(a)} \mu_i(u, \operatorname{grad} g_i(a)) = 0.$$

FJ 条件から全ての $i \in I(a)$ について $\mu_i \geqq 0$，かつ，もし $\mu_0 = 0$ ならば FJ 条件から $\exists i \in I(a);\ \mu_i > 0$．よって，

$$\mu_0(u, \operatorname{grad} f(a)) = -\sum_{i \in I(a)} \mu_i(u, \operatorname{grad} g_i(a)) < 0.$$

よって $\mu_0 \neq 0$．$\lambda_i = \frac{1}{\mu_0}\mu_i$, $i = 1, \ldots, m$, とおくと，FJ 条件から KT 条件(16) を得る． □

7.4 双対定理．

凸関数の場合の不等式条件下の極値問題についての Kuhn–Tucker 条件は，凸関数の特別な場合として 1 次式（affine 関数）の場合に双対定理となる．

適切な変数を選ぶことでf **を affine にしたとき，**g **が凸になるならば**，$g \leqq 0$ を $g = 0$ の接平面群に対する不等式に置き換えることで,（無限個の）affine 不等式条件下の極値問題になる：

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i, \quad g_j(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i - b_j,\ j = 1, \ldots, m. \tag{17}$$

Affine は凸なので，たとえば $g(x_0) < \overrightarrow{0}$ なる $x_0 \in S$ があれば Kuhn–Tucker 条件が最小値問題の同値条件になる．

f が affine なので，$\{x \in S \mid g(x) \leqq \overrightarrow{0}\}$ における f の最小値

$$f(x^*) = \min_{x \in S;\ g(x) \leqq \overrightarrow{0}} \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \tag{18}$$

は，S の境界点 $x^* \in \partial S$ で実現する．

(18) の同値条件である $x^* \in S$ に対する Kuhn–Tucker 条件は

$$\begin{cases} c_i + \sum_{j=1}^{m} y_j^* a_{ji} = 0,\ i = 1, \ldots, n, \\ y_j^* \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i^* - b_j\right) = 0, \quad j = 1, \ldots, m, \\ y^* \in {\mathbb{R}_+}^m \\ \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i^* - b_j \leqq 0,\ j = 1, \ldots, m. \end{cases} \tag{19}$$

$n > m$ だと generic には最初の方程式に解がないが，おそらく，条件が少ないと，S が有界でなくなって，$f(x)$ はいくらでも小さい値を取れることに対応してるのだろう．最小値(18) があるとした時点で $m \geqq n$ が実現しているはずである．以下，$A_{ij} = (a_{ji})$ で定まる $n \times m$ 行列 A について，

$$m \geqq \mathrm{rank} A = n \tag{20}$$

を仮定する．

さて，定理7の L は

$$\begin{aligned} & L(x, y) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i + \sum_{j=1}^{m} y_j \sum_{i=1}^{n} (a_{ji} x_i - b_j) \\ & \text{言い換えると,} \\ & -L(x, y) = \sum_{j=1}^{m} b_j y_j + \sum_{i=1}^{n} x_i \left(-\sum_{j=1}^{m} y_j a_{ji} - c_i\right) = \tilde{f}(y) + \sum_{i=1}^{n} x_i \tilde{g}_i(y); \\ & \tilde{f}(y) = \sum_{j=1}^{m} b_j y_j, \quad \tilde{g}_i(y) = -\sum_{j=1}^{m} y_j a_{ji} - c_i,\ i = 1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{21}$$

$-L$, $\tilde{f}$, $\tilde{g}$ たちを変数 y の関数と見て，

$$\tilde{S} = \{y \in {\mathbb{R}_+}^m \mid \tilde{g}_i(y) = 0,\ i = 1, \ldots, n\} \tag{22}$$

とおく．

定理 14 (18) と y についての等式ー非負条件下の最小問題の解

$$\tilde{f}(y^*) = \min_{y \in \tilde{S}} \tilde{f}(y) \tag{23}$$

は同値である．すなわち x^* と y^* 一方が存在すれば他方も存在して $f(x^*) = -\tilde{f}(y^*)$． ◇

証明． (18) が成り立てば，定理7が成り立つので，y^* は $-L(x^*, y)$ の ${\mathbb{R}_+}^m$ における最小値を与える．また，(22) から，$y \in \tilde{S}$ ならば $\tilde{f}(y) = -L(x, y)$．よって，

$$\tilde{f}(y^*) = -L(x^*, y^*) \leqq -L(x^*, y) = \tilde{f}(y), \quad y \in \tilde{S}$$

よって(23) が成り立つ．

逆に，(23) が成り立つとする．

${\mathbb{R}_+}^m$ は Slater が成り立つので，不等式条件 $-y_j \leqq 0,\ j = 1, \ldots, m,$ における Kuhn–Tucker 条件の成立および等式 $\tilde{g}(y) = 0$ に対する Lagrange の未定乗数法が従う．後者について，(20) から，等式条件の退化が無いことから必要性が成り立つ．すなわち，

$$\begin{cases} 0 = \mathrm{grad}_y(-L(x^*, y^*) + \displaystyle\sum_{j=1}^{m} w_j\,(-y_j)) = \mathrm{grad}_y\,\tilde{f}(y^*) + x^*\,\tilde{J}(y^*) - w, \\ \quad \tilde{J}(y^*) = \mathrm{grad}_y\,\tilde{g}(y^*) = -A, \\ w_j y_j^* = 0, \quad j = 1, \ldots, m, \\ w_j \geqq 0, \quad j = 1, \ldots, m, \\ y^* \in \tilde{S}. \end{cases} \tag{24}$$

すなわち，

$$\begin{cases} b_j - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^* a_{ji} = w_j \geqq 0,\ j = 1, \ldots, m, \\ y_j^*\,(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i^* - b_j) = 0, \quad j = 1, \ldots, m, \\ y^* \in {\mathbb{R}_+}^m, \quad \displaystyle\sum_{j=1}^{m} y_j^* a_{ji} + c_i = 0,\ i = 1, \ldots, n. \end{cases}$$

これは(18) の同値条件である(19) に一致するので(18) が成り立つ． □

8 協力ゲームの配分の理論のコアの問題．

8.1 協力ゲームの配分の理論のコアの問題の概観．

協力ゲームは（非負値）集合関数であり，配分はその集合関数の 1 点集合に対する値の（全体集合の値を揃える条件下での）上からの評価となる測度であり，コアはその集合関数の（全体集合の値を揃える条件下での）上からの評価となる測度なので，双対定理によってゲームが平衡 (balanced) であることとコアの存在が同値になる．

さらに，ゲームが全平衡（すべての部分集合に制限したゲームが平衡）であることと均一効用関数市場表現を持つことは同値だが，特に $v(S) = \min_{\mu \in \mathcal{A}} \mu(S)$（不確実な状況下で測度の極値評価で与えられるゲーム）のとき，対応する効用関数 $u(x)$ は財のポートフォリオ x の coherent risk measure $\Gamma(x)$ に等しい．

集合関数の測度による評価としての配分の理論は，個人合理性と全体合理性を仮定するので，提携合理性が中心課題になる．コアは提携合理解だが，コアのない（平衡でない）ゲームがあるので，

1. コアの存在条件
2. コアの代わりの配分

の 2 種類の問題が研究されてきた．

後者については，シャプレイ値（平均場）と仁（不足の辞書式順序に関する affineKT 解）が必ず一意存在し，後者の帰納的証明で用いられるのがカーネルと交渉集合がある．

以上の他に，安定集合はコアの拡張概念で，コアがあればコアを含み，コアを含まない場合に配分の集合で状況をとらえる点で，前者の，コアの存在条件の研究の手がかりになる．安定集合は存在する例と存在しない例が知られているのみで，存在条件が**未解決**である．

前者について，ゲーム v が全平衡（すべての部分集合に制限したゲームが平衡）であることと均一効用関数市場表現を持つことは同値であり，平衡だが全平衡でない場合も市場ゲームが全平衡被覆 $\overline{v}$ を実現し，$\overline{v} \geqq v$ であることから，市場ゲームの $v(N)$ に対するプレーヤーの効用値がコアを与える．そのときの全体集合の提携値 $v(N)$ を実現する各プレーヤーの効用関数値がコアになる．その意味で，コアが空でない（平衡）ゲームの場合は市場でコアを実現できる．以下の節ではこれについて要約する．

8.2 協力ゲームと配分の定義．

ここでは，協力ゲームを非負値集合関数として定義する．すなわち集合 N と集合族 $\mathcal{F} \subset 2^N$ と $\mathcal{F}$ を定義域とする非負値関数

$$v: \ \mathcal{F} \to \mathbb{R}_+ \tag{25}$$

の 3 つ組 $(N, \mathcal{F}, v)$ をゲームと言う．

ここでは

$$\sharp N < \infty, \quad \mathcal{F} = 2^N, \tag{26}$$

すなわち有限集合で単位事象がすべて根元事象である場合のみを扱う．提携の差を問題にするので，v の値の差だけが問題になるので，一般性を失うことなく

$$v(\emptyset) = 0 \tag{27}$$

とおく．

通常は，$v(\emptyset) = 0$ は明示するが $v(S) \geqq 0$ は明示しない．しかし，通常の例は非負値である．配分を signed measure に拡張できる部分は多いと思うが，ここでは**負値** $v(S) < 0$ **は扱わない**.

ゲーム (N, v) と $R \subset N$ に対して v の R への制限を $u = v|_R$ とおく：

$$u(S) = v(S), \ S \in 2^R. \tag{28}$$

ゲーム (R, u) を (N, v) のサブゲームという

ゲーム (N, v) と整合する測度の集合を

$$\mathcal{M}(N, v) = \{\mu : \ 2^N \to \mathbb{R}_+ \mid 加法的, \ \mu(N) = v(N)\} \tag{29}$$

とし，**配分**の集合を

$$\mathcal{I}(N, v) = \{\mu \in \mathcal{M}(N, v) \mid \mu(\{i\}) \geqq v(\{i\}), \ i \in N\} \tag{30}$$

とおく．(29) は**全体合理性**，(30) は**個人合理性**をそれぞれ表す．

$R \subset N$ に対して $\mathcal{M}(R, v|_R) = \{\mu : \ 2^R \to \mathbb{R}_+ \mid 加法的, \ \mu(R) = v(R)\} \not\subset \mathcal{M}(N, v)$ なので，サブゲームの配分は親ゲームの配分の制限ではないことに注意．（したがって，特に，balanced game と totally balanced game には開きがある．）

通常は(29) の代わりに全体合理性を $x(N) \leqq v(N)$ で定義しているが，$\mu = \dfrac{v(N)}{x(N)} x$ を考えれば等号で十分である．あとで balanced（平衡）ゲームを不等式で定義するが，**等号が実現するので問題ないはずである**.

もし $v(N) = 0$ ならば測度の非負値性と(29) から配分は恒等的に 0 の集合関数だけからなる：$\mathcal{I}(N, v) = \{\mathbf{1}_\emptyset\}$．すなわち，配分の理論に意味があるのは $v(N) > 0$ 場合に限る．

8.3 コアの存在と平衡ゲーム．

8.3.1 コア．

配分の理論では全体合理性(29) と個人合理性(30) を仮定するので，提携合理性が問題となる．すべての提携について合理性がある配分を**コア**という：

$$C(N, v) = \{\mu \in \mathcal{M}(N, v) \mid \mu(S) \geqq v(S), \ S \in 2^N\} \ \ (\subset \mathcal{I}(N, v)). \tag{31}$$

コアとは，集合関数 v の上からの評価で，最大値が v に一致する測度の集合である．言い換えると，組織が受け取ったつかみ金を，構成員に分配したとき，コアに従って分配すれば，部分的な提携（**抜け駆け**）によって配分が出し抜かれて失敗することが起きないという意味で，安定な山分けのしかたの集合である．別の見方では，ゲーム v における各参加者の影響力の評価でもある．

命題 15 コアは測度の集合(29) の中の凸集合である． $\diamond$

証明． $\mu,\nu \in C(N,v)$ および $0<\lambda<1$ とすると，(29) と(31) からただちに $\xi=\lambda\mu+(1-\lambda)\nu \in C(N,v)$ を得る． $\square$

コアの存在も一意性も自明で無いが，コアの存在は平衡ゲームであることと同値であることが知られている．これをここで復習する．

8.3.2 平衡 (balanced) ゲーム．

$\delta:\ 2^N \to \mathbb{R}_+$ が N–balancing とは

$$\sum_{S\in 2^N;\ S\ni i} \delta_S = 1,\ i\in N, \tag{32}$$

が成り立つことを言う．例えばクロネッカーのデルタ $\delta_{A,B}$ によって $\delta_S=\delta_{S,N}$ となる δ は N–balancing である．

通常は，δ よりも $\mathcal{B} := \mathrm{suppt.}\delta$ を前面に出して balancing と呼ぶのかもしれないが，証明では $\mathcal{B}$ の外側に 0 で延長した集合関数を用いるので，その定義は不自然である．ここでは，(32) を定義とする．

Balancing は，集合関数が測度にどの程度似ているかを測る．

命題 16 集合関数 $x:\ 2^N \to \mathbb{R}$ が加法性を持つ（測度である）ことと

$$\sum_{S\in 2^R} \delta_S x(S) = x(R) \tag{33}$$

がすべての $R\in 2^N$ についてすべてのR–**balancing** δ に対して成り立つことが同値である．

たとえば x が $x(S)=\sum_{i\in S} w_i$ で定義されていれば，

$$\sum_{S\in 2^R} \delta_S \sum_{i\in S} w_i = \sum_{i\in R} w_i$$

がすべての $R\in 2^N$ について R–*balancing* δ に対して成り立つ． $\diamond$

証明． x が加法的ならば，(32) から $R\in 2^N$ に対して

$$\sum_{S\in 2^R} \delta_S x(S) = \sum_{S\in 2^R}\sum_{i\in S} \delta_S x(\{i\}) = \sum_{i\in R} x(\{i\}) \sum_{S\in 2^R;\ S\ni i} \delta_S = \sum_{i\in R} x(\{i\}) = x(R)$$

で(33) が成り立つ．

逆に(33) が成り立てば，

$$\delta_S = \sum_{i\in R} \mathbf{1}_{S=\{i\}},\ S\in 2^R, \tag{34}$$

が R–balancing なので，(33) から $x(R)=\sum_{S\in 2^R}\sum_{i\in R}\mathbf{1}_{S=\{i\}}\,x(S)=\sum_{i\in R} x(\{i\})$．これが任意の $R\in 2^N$ に対して成り立つから，x は $\rho(i)=x(\{i\}),\ i\in N,$ を Radon–Nykodim 密度とする測度である． $\square$

ゲーム (N,v) が平衡ゲーム (balanced game) であるとは,

$$\max\{\sum_{S\in 2^N}\delta_S\, v(S) \mid \delta:\ 2^N\to\mathbb{R}_+;\ N\text{–balancing}\} \leqq v(N) \tag{35}$$

が成り立つことを言う.

ここでの定義では $\delta_S=\delta_{S,R}$ が R–balancing の（自明な）例なので, $\leqq v(R)$ は実際は $=v(R)$ である.

定理 17 $C(N,v)\neq\emptyset$ と (N,v) が平衡ゲームであることは同値. ◇

証明. $C(N,v)\neq\emptyset$ とし, $\mu\in C(N,v)$ とする. N–balancing な $\delta:\ 2^N\to\mathbb{R}_+$ を任意にとると, (31) と(33) と(29) から,

$$\sum_{S\in 2^N}\delta_S v(S)\leqq\sum_{S\in 2^N}\delta_S\mu(S)=\mu(N)=v(N).$$

よって, (N,v) は平衡ゲームである.

逆に (N,v) が平衡ゲームとする. 定理14において

$$n=n,\quad m=2^n,\qquad A_{Si}=-\mathbf{1}_{\{S\ni i\}},\ b_S=-v(S),\ c_i=1,\quad x_i=\mu(\{i\}),\ y_S=\delta_S,\quad S\in 2^N,\ i\in N,$$

とおくと,

$$-\tilde f(\delta)=\sum_{S\in 2^N}v(S)\delta_S,\quad \tilde g_i(\delta)=\sum_{S\in 2^N;\ S\ni i}\delta_S-1,\ i\in N,\quad f(\mu)=\mu(N),\quad g_S(\mu)=v(S)-\mu(S),\ S\in 2^N,$$

となるので, 定理14から

$$\sum_{S\in 2^N}\delta^*_S v(S)=-\tilde f(\delta^*)=\max\{\sum_{S\in 2^N}\delta_S v(S)\mid\delta:\ 2^N\to\mathbb{R}_+,\ \sum_{S\ni i}\delta_S=1,\ i\in N\}$$

なる $\delta^*:\ 2^N\to\mathbb{R}_+$ の存在と

$$\mu^*(N)=f(\mu^*)=\min\{\mu(N)\mid\mu(S)\geqq v(S),\ S\in 2^N,\ \mu\ \text{は非負値加法的}\ \}$$

なる測度 $\mu^*:2^N\to\mathbb{R}_+$ の存在が同値で, そのとき

$$\mu^*(N)=\sum_{S\in 2^N}\delta^*_S v(S)$$

が成り立つ.

平衡ゲームの定義(35) (with (32)) と(35) の下の注意（等号が実現すること）から, (N,v) を平衡ゲームとしたので,

$$\exists\delta^*;\ \sum_{S\in 2^N}\delta^*_S v(S)=v(N).$$

よって $\mu^*(S)\geqq v(S)$, $S\in 2^N$, および $v(N)=\mu^*(N)$ を満たす測度 μ^* が存在する. (31) と(29) から, $\mu^*\in C(N,v)$. すなわち, コアは空ではない. □

8.4 全平衡ゲームと市場ゲームの同値性.

8.4.1 全平衡 (totally balanced) ゲーム.

ゲーム (N,v) に対して全平衡被覆 (totally balanced cover) $(N,\overline{v})$ とは,

$$\overline{v}(S)=\max\{\sum_{T\in 2^S}\delta_T v(T)\mid\sum_{T\in 2^S}\delta_T e_T=e_S,\ \delta:\ 2^S\to\mathbb{R}_+\},\quad S\in 2^N, \tag{36}$$

で定義されるゲーム $(N,\overline{v})$ である．ここで $S\in 2^N$ に対して $e_S\in {\mathbb{R}_+}^N$ は

$$(e_T)_i=\mathbf{1}_{i\in T},\ i\in N \tag{37}$$

で定義される．特に，(36) の右辺の条件式は,

$$\sum_{T\in 2^S}\delta_T e_T=e_S \quad\Leftrightarrow\quad \sum_{T\in 2^S,\ T\ni i}\delta_T=1,\ i\in S, \tag{38}$$

だから，(32) から，$\delta:\ 2^S\to\mathbb{R}_+$ が S–balancing であることと同値である．

特に，(36) の右辺で $\delta_T=\delta_{T,S}$ と選ぶことで

$$\overline{v}(S)\geqq v(S),\ S\in 2^N, \tag{39}$$

を得る．また，$R\subset N$ に対して，(36) と(38) 下の注意と(35)，そして(39) から

$$(R,v|_R)\ \text{が平衡ゲーム}(35)\quad\Leftrightarrow\quad \overline{v}(R)\leqq v(R)\quad\Leftrightarrow\quad \overline{v}(R)=v(R) \tag{40}$$

である．

(N,v) が全平衡 (totally balanced) ゲームとは，全ての $R\subset N$ に対して部分ゲーム $(R,v|_R)$ が平衡ゲームであることを言う．(40) から,

$$v=\overline{v}\quad\Leftrightarrow\quad (N,v)\ \text{全平衡ゲーム} \tag{41}$$

である．

8.4.2 市場 (transferrable utility market) ゲーム．

交換可能 (transferrable) な効用とは効用関数 u が実数値であることを言う．その値を貨幣（値が効用に比例する財）と合算することで，財の組や参加者間の効用の大小を実数値の大小として全順序づけられることを背景にした用語である．

他方，効用関数は財の組の量を表す（多変数）実数を変数とするが，これらは価格をかける（価格をシグナルとする）ことで貨幣と同様に線形な効用として，使用量を効用から減算することで，財の交換が議論できる．このときの均衡（総効用の最大値を与える点）を競争的均衡（ナッシュ均衡）と呼ぶが，これはここで論じる市場ゲームのコアの表示を与える．

ここでは交換に深入りせず，市場表現と全平衡ゲームであることが同値であることのみを紹介することにし，交換可能 (TU) の用語を略す.

有限集合 N（参加者）と自然数 m（財の種類）と $w=(w_1,\dots,w_N)\in\prod_{i\in N}\mathbb{R}^m$（参加者の初期資産）と

$$\text{凹，連続，かつ},u(tx)=tu(x),\ t\geqq 0\ \text{の意味で 1 次同次} \tag{42}$$

を満たす効用関数 $u:\ \mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$（手持ち財の効用）の 3 つ組 (N,w,u) を市場と呼び，市場 (N,w,u) から

$$v^M(S)=\max\{\sum_{i\in S}u(x_i)\mid(x_1,\dots,x_S)\in\prod_{i\in S}\mathbb{R}^m,\ \sum_{i\in S}x_i=\sum_{i\in S}w_i\},\quad S\in 2^N, \tag{43}$$

によって定義される集合関数（ゲーム）(N,v^M) を市場（表現を持つ）ゲームと呼ぶ.

効用関数 u_i は参加者によっても市場の定義としてはかまわないが，これだと「市場表現を持つゲームは全平衡ゲームである」という後述の性質がすぐには証明できないので，**ここでは均質な効用関数を仮定する．効用関数を参加者によって変えた場合，どうなるかは興味がある．**

(42) を満たす効用関数の例は

$$u(x_1,x_2)=x_1\vee x_2,\quad u(x)=|x| \tag{44}$$

などがある.

(42) から，優加法性

$$u(x+y)=u(2\frac{x+y}{2})=2\,u(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y)\geqq 2\,(\frac{1}{2}u(x)+\frac{1}{2}u(y))=u(x)+u(y) \tag{45}$$

がしたがう．

特に，$m=n$（参加者ごとにその労働力という財が分配される）で(37) の e_T を用いて $w_i=e_{\{i\}}$, $i\in N$, のとき (N,e,u) を単純市場といい，単純市場から(43) によって定義されるゲーム (N,v^M) を単純市場ゲームという．

命題 18 単純市場ゲームの利得は $v^M(S)=u(e_S)$, $S\in 2^N$, で与えられる． ◇

証明． 優加法性(45) と(43) と $w=e$ から，

$$\sum_{i\in S}u(x_i)\leqq u(\sum_{i\in S}x_i)=u(e_S)$$

なので，(43) から $v^M(S)\leqq u(e_S)$.

逆に，$x_i=\dfrac{1}{|S|}e_S$, $i\in N$, とおくと 1 次同次性から

$$v^M(S)\geqq\sum_{i\in S}u(x_i)=\frac{1}{|S|}\,|S|\,u(e_S)=u(e_S).$$

よって $v^M(S)=u(e_S)$. □

ゲーム (N,v) から導かれる単純市場 (N,e,u) とは

$$u(x)=\max\{\sum_{S\in 2^N}\delta_S v(S)\mid\sum_{S\in 2^N}\delta_S e_S=x,\ \delta:\ 2^N\to\mathbb{R}_+\} \tag{46}$$

を言う．なお，$u(x)=0$, $x\leqq 0$, で考えている．(ここまで，そのことを明示していなかったかもしれない.)

命題 19 (46) の効用関数は(42) を満たす．

また，(36) で定義される (N,v) の全平衡被覆 $\overline{v}$ は $\overline{v}(S)=u(e_S)$, $S\in 2^N$, で与えられる． ◇

証明． 連続性と 1 次同次性は明らか．$0<\lambda<1$ および $x,y\in\mathbb{R}^n$ として(46) 右辺の最大値を実現する δ を x,y に対して δ^x, δ^y とする：

$$u(x)=\sum_S\delta^x_S v(S),\quad u(y)=\sum_S\delta^y S v(S).$$

(46) から $\displaystyle\sum_S\delta^x_S e_S=x$, $\delta^x\geqq\overrightarrow{0}$, $\displaystyle\sum_S\delta^y_S e_S=y$, $\delta^y\geqq\overrightarrow{0}$. したがって特に,

$$\sum_S(\lambda\delta^x_S+(1-\lambda)\delta^y_S)e_S=\lambda x+(1-\lambda)y.$$

よって(46) から

$$u(\lambda x+(1-\lambda)y)\geqq\sum_S(\lambda\delta^x_S+(1-\lambda)\delta^y_S)v(S)=\lambda u(x)+(1-\lambda)u(y).$$

よって凹.

次に，$S\in 2^N$ として $\overline{v}(S)=u(e_S)$ を証明する．ゲーム (N,v) から導かれる効用関数(46) から

$$u(e_S)=\max\{\sum_{T\in 2^N}\delta_T v(T)\mid\sum_{T\in 2^N}\delta_T e_T=e_S,\ \delta:\ 2^N\to\mathbb{R}_+\}.$$

右辺の条件式は $i \notin S$ のとき e_S の定義から $(e_S)_i = 0$ なので

$$\sum_{T \in 2^N;\ T \ni i} \delta_T = 0, \quad i \notin S,$$

となる．δ は非負値なので，これから $i \in T \cap S^c$ があれば $\delta_T = 0$ となる．よって $u(e_S)$ の右辺の T は $T \subset S$ の範囲に和を制限できる．よって

$$u(e_S) = \max\{\sum_{T \subset S} \delta_T v(T) \mid \sum_{T \subset S} \delta_T e_T = e_S,\ \delta:\ 2^S \to \mathbb{R}_+\}.$$

これは(36) の $\overline{v}(S)$ の定義に一致する． □

8.4.3 全平衡ゲームと市場表現の存在の同値性．

定理 20 ゲーム (N, v) が全平衡ゲームであることと市場表現を持つことは同値である． ◇

証明． (N, v) から(46) によって導かれる単純市場を (N, e, u) とおき，(N, e, u) に基づく市場ゲームを (N, v^M) とおくと，$S \in 2^N$ に対して，命題 19 から $\overline{v}(S) = u(e_S)$，命題 18 から $v^M(S) = u(e_S)$ なので，

$$v^M(S) = u(e_S) = \overline{v}(S), \quad S \in 2^N. \tag{47}$$

(N, v) が全平衡ゲームであるとすると，$\overline{v} = v$ なので，(47) から $v^M = v$ となるので，(N, v) から導かれた単純市場 (N, e, u) は (N, v) の市場表現である．

次に，市場 (N, w, u) に対して $(N, v) = (N, v^M)$ とし，$R \in 2^N$ と R–balancing な $\delta:\ 2^N \to \mathbb{R}_+$ をとる．各 $S \in 2^R$ に対して市場ゲームの利得 $v^M(S)$ を実現する市場交換を $x^S = (x_1^S, \ldots, x_n^S) \in \prod_{i \in m} \mathbb{R}_+^N$ とする：

$$v^M(S) = \sum_{i \in S} u(x_i^S), \quad \sum_{i \in S} x_i^S = \sum_{i \in S} w_i, \quad x_i^S \in \mathbb{R}^m,\ i \in S. \tag{48}$$

この x^S に対して $f = (f_1, \ldots, f_R) \in \prod_{i \in R} \mathbb{R}^m$ を

$$f_i = \sum_{S \in 2^R;\ S \ni i} \delta_S x_i^S \tag{49}$$

で定義すると，(43) の最後の条件式と命題 16 から

$$\sum_{i \in R} f_i = \sum_{S \in 2^R} \delta_S \sum_{i \in S} x_i^S = \sum_{S \in 2^R} \delta_S \sum_{i \in S} w_i = \sum_{i \in R} w_i$$

だから，f は R の市場交換なので，(43) から

$$\sum_{i \in R} u(f_i) \leqq v^M(R). \tag{50}$$

(48)，(42)（u は凹），(49)，(50) をこの順に使うと

$$\begin{aligned}\sum_{S \in 2^R} \delta_S v^M(S) &= \sum_{S \in 2^R} \sum_{i \in S} \delta_S u(x_i^S) = \sum_{i \in R} \Bigl(\sum_{S \in 2^R;\ S \ni i} \delta_S u(x_i^S) \Bigr) \\ &\leqq \sum_{i \in R} u\bigl(\sum_{S \in 2^R;\ S \ni i} \delta_S x_i^S \bigr) = \sum_{i \in R} u(f_i) \\ &\leqq v^M(R).\end{aligned}$$

すなわち $(R, v^M|_R)$ は balanced．

$R \in 2^N$ は任意だったから $(N, v) = (N, v^M)$ は全平衡 (totally balanced) ゲームである． □

8.5 コヒーレントリスク測度．

8.5.1 コアによるゲームの表示．

ゲーム理論でコアによって表示されるゲームは，確率測度ないしは全測度が $c>0$ で共通の有限測度の族 $\mathcal{A}$

$$\mathcal{A} \subset \mathcal{M}_c := \{\mu:\ 2^N \to \mathbb{R}_+ \mid \mu(N)=c,\ \text{加法的}\ \} \tag{51}$$

に対して

$$v_{\mathcal{A}} = \min_{\mu\in\mathcal{A}} \mu \tag{52}$$

で定義される集合関数 $v_{\mathcal{A}}:\ 2^N \to \mathbb{R}_+$ である．凸ゲームは $\mathcal{A}$ をそのコアの全体として(52) の表示を持ち，あるゲームが固定した $\mathcal{A}$ に対して(52) の表示を持つならば全平衡ゲームである．(52) の表示を持たない全平衡ゲームは存在するが，凸ゲームと(52) の表示が同値か否かは 20141108 時点で筆者の中では解決していない．

これによる有界関数 $X:\ N \to \mathbb{R}$ の（期待値に相当する）評価 Γ を

$$\Gamma(X) = \min_{\mu\in\mathcal{A}} \int_N X(i)d\mu(\{i\}) \tag{53}$$

で定義する．

8.5.2 コヒーレントリスク測度

コヒーレントリスク測度について数学的な内容を勉強しておきたい．コヒーレントリスク測度の定義は

$$\Gamma(X+Y) \geqq \Gamma(X)+\Gamma(Y),\quad \Gamma(aX)=|a|\Gamma(X),\quad \Gamma(X+c)=\Gamma(X)+c \tag{54}$$

である．

(52) は(54) を満たす．

8.5.3 コアで表示されたゲームの性質．

ここでは(52) の形のゲームの性質の概要を試みに考える．

命題 21 $\mathcal{A} \subset C(N, v_{\mathcal{A}})$．特に，$(N, v_{\mathcal{A}})$ は平衡ゲーム．◇

証明． 記号を $v=v_{\mathcal{A}}$ と略す．$\mu\in\mathcal{A}$ とすると定義から $v(S) \leqq \mu(S)$, $S\in 2^N$, かつ $v(N)=\mu(N)$．(31) と(29) から $\mu\in C(N, v_{\mathcal{A}})$．特に，コアが空でないので定理17から平衡ゲーム．□

命題 22 $(N, v_{\mathcal{A}})$ は全平衡ゲーム．◇

証明． $R\in 2^N$ と R–balancing な $\delta:\ 2^R \to \mathbb{R}_+$ を任意に取ると，(33) から

$$\sum_{S\in 2^R} \delta_S v_{\mathcal{A}}(S) \leqq \min_{\mu\in\mathcal{A}} \sum_{S\in 2^R} \delta_S \mu(S) = \min_{\mu\in\mathcal{A}} \mu(R) = v_{\mathcal{A}}(R)$$

なので $(R, V_{\mathcal{A}}|_R)$ は R–balanced．R は任意だから $(N, V_{\mathcal{A}})$ は totally balanced．□

命題 22 と(41) から $v_{\mathcal{A}} = \overline{v_{\mathcal{A}}}$ である．(全平衡ゲームと $v=\overline{v}$ の同値性は全平衡ゲームの定義のほぼ言い換えに過ぎないので，当然成り立つがそのことだけでは新しい情報はない．しかし,）このとき，定理20の(47) から対応する単純市場 (N,e,u) とそれに対応する市場ゲームについて

$$v^M(S) = u(e_S) = \overline{v_{\mathcal{A}}}(S) = v_{\mathcal{A}}(S),\quad S\in 2^N. \tag{55}$$

定理17の証明と同様に定理14において

$$n = n,\ \ m = 2^n,\quad A_{Si} = -\mathbf{1}_{\{S \ni i\}},\ b_S = -v(S),\ c_i = x_i,\ \ x_i = \mu(\{i\}),\ y_S = \delta_S,\quad S \in 2^N,\ i \in N,$$

とおく（定理17の証明では $c_i = 1$ だった点だけが違う）と，

$$-\tilde{f}(\delta) = \sum_{S \in 2^N} v(S)\delta_S,\ \ \tilde{g}_i(\delta) = \sum_{S \in 2^N;\ S \ni i} \delta_S - x_i,\ i \in N,$$
$$f(\mu) = \mathrm{E}_\mu[\,x\,] = \sum_{i \in N} x_i \mu(\{i\}),\ \ g_S(\mu) = v(S) - \mu(S),\ S \in 2^N,$$

となるので，定理14から（効用関数 $u(x)$ の定義(46) で前半を書くことで）

$$u(x) = \sum_{S \in 2^N} \delta^*_S v(S) = -\tilde{f}(\delta^*)$$

なる $\delta^* :\ 2^N \to \mathbb{R}_+$ の存在と

$$\mathrm{E}_{\mu^*}[\,x\,] = f(\mu^*) = \min\{\mathrm{E}_\mu[\,x\,] \mid \mu(S) \geqq v(S),\ S \in 2^N,\ \mu \text{ は非負値加法的 }\}$$

なる測度 $\mu^* : 2^N \to \mathbb{R}_+$ の存在が同値で，そのとき

$$\mathrm{E}_{\mu^*}[\,x\,] = \sum_{S \in 2^N} \delta^*_S v(S)$$

が成り立つ．すなわち，

$$u(x) = \mathrm{E}_{\mu^*}[\,x\,] = \min\{\mathrm{E}_\mu[\,x\,] \mid \mu(S) \geqq v(S),\ S \in 2^N,\ \mu \text{ は非負値加法的 }\} \tag{56}$$

これはまさに(53) である．

8.6 例：3 人対称ゲーム．

8.6.1 いくつかのクラスの包含関係．

§ 8.3 によって，コア $C(N, v)$ の存在は平衡ゲームであることと同値だが，これは構成的な特徴付けとは言えない．平衡ゲームは全平衡被覆によって上から評価され，後者は § 8.4 によって市場表現を持つが，これも凸計画問題を解かなければいけない．

具体的なコアの構成としては，対称なゲーム (N, v) において，$v_{|S|} = v(S)$ とおくと，

$$C(N, v) \neq \emptyset \ \Leftrightarrow\ \frac{v_{|S|}}{|S|} \leqq \frac{v(N)}{|N|},\ \ S \in 2^N. \tag{57}$$

実際，この不等式が成り立てば，均等配分

$$x_i = \frac{1}{|N|} v(N),\ \ i \in N \tag{58}$$

がコアになり，他方でコア $x \in C(N, v)$ があれば，コアの条件式 $\sum_{i \in S} x_i \geqq v_S$ を，$|S| = k$ なる S について加えると，(57) で $|S| = k$ の場合を得る．他方，全平衡ゲームは，全ての部分集合への制限が平衡ゲームであることだから，$\frac{v_k}{k}$ が k について非減少であることが条件となり，全平衡でない平衡ゲームがある．

$N = \{1, 2, 3\}$ の場合に具体的に書くと，

- 凸 (convex) ゲーム：$v_3 + v_1 \geqq 2v_2,\ v_3 \geqq v_1 + v_2,\ v_2 \geqq 2v_1$,
- 全平衡ゲーム（市場表現）：$\frac{v_3}{3} \geqq \frac{v_2}{2} \geqq v_1$,
- 平衡ゲーム（コア存在）：$\frac{v_3}{3} \geqq \frac{v_2}{2} \vee v_1$,
- 優加法的ゲーム：$v_3 \geqq v_1 + v_2,\ v_2 \geqq 2v_1$.

よって

$$\begin{array}{lllll} \text{凸ゲーム} & \subset & \text{全平衡ゲーム} & \subset & \text{平衡ゲーム} \\ & & & \subset & \text{優加法的ゲーム} \end{array} \tag{59}$$

8.6.2 市場表現と全平衡被覆．

ゲーム (N, v) から(46) によって導かれる単純市場 $M = (N, e, u)$ から(43) によって得られる市場ゲーム (N, v^M) は(47) によって元のゲームの全平衡被覆 $(N, \overline{v})$ に等しい．

元のゲームが全平衡ゲームならば(41) によって $\overline{v} = v$ なので，M は元のゲーム (N, v) の市場表現だが，元のゲームが全平衡ゲームでなければ，一般には(39) によって $v^M = \overline{v} \geqq v$ だから，元のゲームから導かれる単純市場 M は上からの評価を与える．したがって，全体集合の提携値が変わらなければ，すなわち，平衡ゲームならば，配分やコアの理論には利用できる．

3 人対称ゲーム

$$v_{|S|} = v(S), \quad S \subset N = \{1, 2, 3\}, \ (v(\emptyset) = 0) \tag{60}$$

の場合，(36) は

$$\begin{aligned}
&\overline{v}_1 = \overline{v}(\{1\}) = v_1, \\
&\overline{v}_2 = \overline{v}(\{1,2\}) = \max\{(\delta_{\{1\}} + \delta_{\{2\}})\, v_1 + \delta_{\{1,2\}}\, v_2 \mid \delta_{\{1\}} + \delta_{\{1,2\}} = \delta_{\{2\}} + \delta_{\{1,2\}} = 1\} \\
&\qquad\qquad\qquad = \max\{2(1-x)v_1 + xv_2 \mid 0 \leqq x \leqq 1\} = (2v_1) \vee v_2, \\
&\overline{v}_3 = \overline{v}(\{1,2,3\}) = \max\{(v_3 - 3v_1)x + (v_2 - 2v_1)\sum_{i=1}^{3} y_i + 3v_1 \mid \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad 0 \leqq x + \sum_{i=1}^{3} y_i - y_j \leqq 1, \quad x \geqq 0, \ y_j \geqq 0, \ j = 1, 2, 3\} \\
&\qquad\qquad\qquad = \begin{cases} \max\{v_3 x + \frac{3}{2} v_2 (1-x) \mid 0 \leqq x \leqq 1\} = v_3 \vee (\frac{3}{2} v_2), & v_2 \geqq 2v_1, \\ \max\{v_3 x + 3v_1(1-x) \mid 0 \leqq x \leqq 1\} = v_3 \vee (3v_1), & v_2 < 2v_1, \end{cases} \\
&\qquad\qquad\qquad = v_3 \vee (\frac{3}{2} v_2) \vee (3v_1) = v_3 \vee (\frac{3}{2} \overline{v}_2).
\end{aligned} \tag{61}$$

よって，濃度の小さい集合から順に全平衡になる最小の提携値を与えたゲームが全平衡被覆であり，元のゲームから得た単純市場に基づく市場ゲームはこの提携値を与える．

8.6.3 $v_3 > 3v_1$ のときの市場ゲーム．

3 人対称ゲームから導かれる単純市場ゲームを(46)

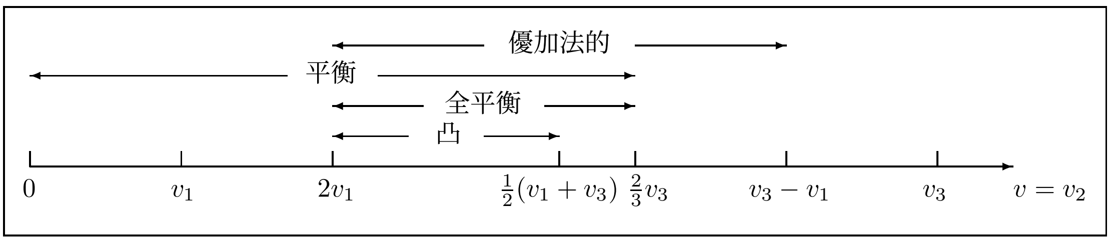
$$\begin{aligned}
u(x) = \max\{&v_1 \sum_{i=1}^{3} \delta_{\{i\}} + v_2 \sum_{i=1}^{3} \delta_{N \setminus \{i\}} + v_3 \delta_N \mid \\
&x_i = \delta_{\{i\}} + \sum_{j \neq i} \delta_{\{i,j\}} + \delta_N, \ i = 1, 2, 3, \quad \delta_S \geqq 0, \ S \subset N\}, x \geqq 0,
\end{aligned}$$

から具体的に求める．

簡単のため，個人合理性と全体合理性が整合する（すなわち，配分(30) が存在する）場合に限るため，

$$v_3 > 3v_1 > 0 \tag{62}$$

として，$v = v_2$ について § 8.6.1 の場合分けに当てはめて(59) を確認すると，



(46) は $x_i \in \mathbb{R}_+$, $i = 1, 2, 3$, に関して対称なので，

$$0 \leqq x_1 \leqq x_2 \leqq x_3 \tag{63}$$

として $u(x) = u(x_1, x_2, x_3)$ を求める．

凸計画問題なので領域の端点で $u(x)$ の最大値が実現するから，x_1 については $S \ni 1$ なる $S \subset N$ のうち $\delta_S \neq 0$ となるのは 1 つだけで $\delta_S = x_1$ となる．その次に $S \ni 2$ なる δ_S のいずれかが x_2 または $x_2 - x_1$ を（可能な限り）総取りする（実際は x_3 によって場合分けが生じる）．具体的には以下の通り．

1. $x_1 = \delta_N$ $(x_2 - x_1 = \delta_{\{2\}} + \delta_{\{2,3\}})$ のとき，
   (a) $x_1 = \delta_N$, $x_2 - x_1 = \delta_{\{2\}}$, $x_3 - x_1 = \delta_{\{3\}}$, $u(x) = u_a(x) = (x_2 + x_3 - 2x_1)v_1 + x_1 v_3$,
   (b) $x_1 = \delta_N$ $x_2 - x_1 = \delta_{\{2,3\}}$, $x_3 - x_2 = \delta_{\{3\}}$, $u(x) = u_b(x) = (x_3 - x_2)v_1 + (x_2 - x_1)v + x_1 v_3$,
2. $x_1 = \delta_{\{1,3\}}$ $(x_2 = \delta_{\{2\}} + \delta_{\{2,3\}})$ のとき，
   (a) i. $x_1 + x_2 < x_3$ のとき，$x_1 = \delta_{\{1,3\}}$, $x_2 = \delta_{\{2,3\}}$, $x_3 - x_1 - x_2 = \delta_3$,
   $u(x) = u_c(x) = (x_3 - x_1 - x_2)v_1 + (x_1 + x_2)v$,
   ii. $x_1 + x_2 \geqq x_3$ のとき，$x_1 = \delta_{\{1,3\}}$, $x_3 - x_1 = \delta_{\{2,3\}}$, $x_1 + x_2 - x_3 = \delta_2$ $(\delta_3 = 0)$,
   $u(x) = u_d(x) = (x_1 + x_2 - x_3)v_1 + x_3 v$,
   (b) $x_1 = \delta_{\{1,3\}}$, $x_2 = \delta_{\{2\}}$, $x_3 - x_1 = \delta_{\{3\}}$, $u(x) = u_y(x) = (x_2 + x_3 - x_1)v_1 + x_1 v$,
3. $x_1 = \delta_{\{1,2\}}$ $(x_2 - x_1 = \delta_{\{2\}} + \delta_{\{2,3\}})$ のとき，
   (a) $x_1 = \delta_{\{1,2\}}$, $x_2 - x_1 = \delta_{\{2,3\}}$, $x_3 - x_2 + x_1 = \delta_{\{3\}}$, $u(x) = u_z(x) = (x_3 - x_2 + x_1)v_1 + x_2 v$,
   (b) $x_1 = \delta_{\{1,2\}}$, $x_2 - x_1 = \delta_{\{2\}}$, $x_3 = \delta_{\{3\}}$, $u(x) = u_y(x)$,
4. $x_1 = \delta_{\{1\}}$ $(x_2 = \delta_{\{2\}} + \delta_{\{2,3\}})$ のとき，
   (a) $x_1 = \delta_{\{1\}}$, $x_2 = \delta_{\{2,3\}}$, $x_3 - x_2 = \delta_{\{3\}}$, $u(x) = u_z(x)$.
   (b) $x_1 = \delta_{\{1\}}$, $x_2 = \delta_{\{2\}}$, $x_3 = \delta_{\{3\}}$, $u(x) = u_x(x) = (x_1 + x_2 + x_3)v_1$,

以上のうち，(62) と(63) の下で(46) の最大値を実現しないものを除く：

- (62) の下で $u_a(x) - u_x(x) = (v_3 - 3v_1)x_1 \geqq 0$ だから u_x は実現しない．
- 1. $v \leqq 2v_1$ の（$v = v_2$ が優加法性または全平衡性を壊すほど小さい）とき，(62) の下で
     $u_a(x) - u_y(x) = (v_3 - v_1 - v)x_1 \geqq (v_3 - 3v_1)x_1 \geqq 0$ だから u_y は実現しない，
  2. $v > 2v_1$（$v = v_2$ が優加法的またはそれ以上）のとき，(63) の下で
     $u_z(x) - u_y(x) = (v - 2v_1)(x_2 - x_1) \geqq 0$ だから u_y は実現しない，

  ので，(62) と(63) の下で $u_a(x) \vee u_z(x) \geqq u_y(x)$ だから u_y は実現しない．
- 1. $v \leqq 2v_1$ の（$v = v_2$ が優加法性または全平衡性を壊すほど小さい）とき，(63) の下で
     $u_y(x) - u_z(x) = (2v_1 - v)(x_2 - x_1) \geqq 0$ だから u_z は実現しない，
  2. $v > 2v_1$（$v = v_2$ が優加法的またはそれ以上）のとき，
     (a) $x_1 + x_2 < x_3$ のとき，$u_c(x) - u_z(x) = (v - 2v_1)x_1 \geqq 0$ だから u_z は実現しない，
     (b) $x_1 + x_2 \geqq x_3$ のとき，(63) の下で $u_d(x) - u_z(x) = (v - 2v_1)(x_3 - x_2) \geqq 0$ だから u_z は実現しない，

  ので，(63) の下で $u_y(x) \vee \{u_c(x), u_d(x)\} \geqq u_z(x)$ だから u_z は実現しない．

残った u_a, u_b, u_c, u_d のどれが最大値か v の場合に応じて調べると，最終的に元のゲーム (N, v) から導かれる単純市場の効用関数 $u = u_a \vee u_b \vee u_c \vee u_d$ が決まる．

- $u_a(x) - u_b(x) = (2v_1 - v)(x_2 - x_1)$,
- $u_b(x) - u_c(x) = (v_3 + v_1 - 2v)x_1$,
- $u_b(x) - u_d(x) = (v_3 - v - v_1)x_1 + (2v_1 - v)(x_3 - x_2) = (v_3 + v_1 - 2v)x_1 + (v - 2v_1)(x_2 + x_1 - x_3)$,

を見ると，(63) の下で，

1. $v_3 > 3v_1$ かつ $v < 2v_1$ の（$v = v_2$ が凸性（優加法性）または全平衡性を壊すほど小さい）とき，
   $u(x) = u_a(x) = (v_3 - 2v_1)x_1 + v_1x_2 + v_1x_3$,
2. $2v_1 \leqq v \leqq \frac{1}{2}(v_1 + v_3)$ の（$v = v_2$ が凸性を満たす）とき，
   $u(x) = u_b(x) = (v_3 - v)x_1 + (v - v_1)x_2 + v_1x_3$,
3. $v > \frac{1}{2}(v_1 + v_3)$ の（$v = v_2$ が凸性を壊すほど大きい）とき，
   (a) $x_1 + x_2 > x_3$ のとき：
      i. $x_1 + x_2 > x_3$ かつ $(v_3 - v - v_1)x_1 + (2v_1 - v)(x_3 - x_2) \geqq 0$ のとき，
         $u(x) = u_b(x) = (v_3 - v)x_1 + (v - v_1)x_2 + v_1x_3$,
      ii. $x_1 + x_2 > x_3$ かつ $(v_3 - v - v_1)x_1 + (2v_1 - v)(x_3 - x_2) < 0$ のとき，
         $u(x) = u_d(x) = v_1(x_1 + x_2) + (v - v_1)x_3$,
   (b) $x_1 + x_2 \leqq x_3$ のとき：$u(x) = u_c(x) = (v - v_1)(x_1 + x_2) + v_1x_3$.

念のため，この効用関数に基づく市場 M に対応する(43) の単純市場ゲーム (N, v^M)：

$$v^M(S) = \max\{\sum_{i\in S} u(y_i) \mid (y_1, \dots, y_S) \in \prod_{i\in S} \mathbb{R}_+^N,\ \sum_{i\in S} y_i = \sum_{i\in S} e_i\},\quad S \in 2^N,$$

が，$v^M = \overline{v}$ によって(61) を再現することを確認する．なお，上の u を(43) に当てはめる際は(63) に注意して y を x に翻訳する．また u の変数の添え字は成分を表し，(63) の添え字は異なるプレーヤーへの財の分配を表すことにも注意．

(62) で考えているので $v_3 > 3v_1$ である．(63) の条件があるので，$v^M_{|S|} = v^M(S)$ は $|S|$ だけで決まるいっぽうで，v^M の定義の変数 y で見ると $u(y_i)$ は非線形だから，(43) のプレーヤーへの分割は値を変える可能性がある．

$|S| = 1$ のとき，(43) と(63) と u の具体形から v の値によらずすべての場合で

$$v^M_1 = v^M(\{3\}) = 3u(0, 0, 1) = 3v_1.$$

これは(61) の $\overline{v}_1$ に一致する．

同様に，$|S| = 2$ のとき

$$v^M_2 = v^M(\{2, 3\}) = \max\{u(0, a, b) + u(0, 1 - b, 1 - a) \mid 0 \leqq a \leqq b \leqq 1\}.$$

u の変数が $x_1 + x_2 \leqq x_3$ を満たすから u の具体形から場合分けがないので変数に関して線形で，その上，それ故最大値は端点で実現するので

$$\begin{aligned} v^M_2 &= \max\{u(0, 1 + a - b, 1 - a + b) \mid 0 \leqq a \leqq b \leqq 1\}. = \max\{u(0, 1 - c, 1 + c) \mid 0 \leqq c \leqq 1\} \\ &= u(0, 1, 1) \vee u(0, 0, 2) = v \vee (2v_1) \end{aligned}$$

が v の値によらず成り立つが，これは(61) の $\overline{v}_2$ に一致する．

以下 $|S| = 3$ とする．(43) の $v_3 > 3v_1$ と(63) に注意．

$v < 2v_1$ のとき，u の具体形と(43) から，x_1 に分配するほど $u(x_1, x_2, x_3)$ が大きく，(63) から，$x_1 = x_2 = x_3$ の場合となる．場合分けがそろえば $v < 2v_1$ のとき u の具体形から線形なので，プレーヤーへの分割は無意味で，

$$v^M_3 = v^M(\{1, 2, 3\}) = u_a(1, 1, 1) = v_3.$$

$v < 2v_1$ かつ $v_3 > v_1$ なので，これは(61) の $\overline{v}_3$ に一致する．

$2v_1 \leqq v \leqq \dfrac{1}{2}(v_1 + v_3)$ のときも同様なので，

$$v^M_3 = v^M(\{1, 2, 3\}) = u_b(1, 1, 1) = v_3.$$

$v_3 > 3v_1$ かつ $v \leqq \dfrac{1}{2}(v_1 + v_3)$ のとき，

$$v_3 = \frac{1}{4}v_3 + \frac{3}{4}v_3 \geqq \frac{3}{4}v_1 + \frac{3}{2}v - \frac{3}{4}v_1 = \frac{3}{2}v$$

だから $v_3 \vee (\frac{3}{2}v) \vee (3v_1) = v_3$ なので，これは(61) の $\overline{v}_3$ に一致する．

残っているのは $|S| = 3$ で，$v > \dfrac{1}{2}(v_1 + v_3)$ かつ $v_3 > 3v_1$ のときである．

(63) から，あるプレーヤー i への配分に関して $x_1 + x_2 > x_3$ が起こるときの端点は

$$(x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}) = \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3} y_{ij}(1,1,1).$$

よって

$$\begin{aligned} u(x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}) &= \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3} y_{ij}u_b(1,1,1) = \frac{1}{3}v_3\sum_{j=1}^{3} y_{ij}, & v_3 \geqq v + v_1, \\ u(x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}) &= \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3} y_{ij}u_d(1,1,1) = \frac{1}{3}(v + v_1)\sum_{j=1}^{3} y_{ij}, & v_3 < v + v_1, \end{aligned}$$

すなわち

$$u(x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}) = \frac{1}{3}(v_3 \vee (v + v_1))\sum_{j=1}^{3} y_{ij}.$$

他方，$x_1 + x_2 \leqq x_3$ が起こるときの端点は

$$(x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3} y_{ij}(0,1,1) \quad と \quad \sum_{j=1}^{3} y_{ij}(0,0,1).$$

$v > \dfrac{1}{2}(v_1 + v_3)$ かつ $v_3 > 3v_1$ なので $v > 2v_1$ だから，

$$u(x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}) = \sum_{j=1}^{3} y_{ij}\Big((\frac{1}{2}u_c(0,1,1)) \vee u_c(0,0,1) \Big) = \Big((\frac{1}{2}v) \vee v_1 \Big)\sum_{j=1}^{3} y_{ij} = \frac{1}{2}v\sum_{j=1}^{3} y_{ij}.$$

v の場合分けに応じて最大値をとる場合が決まり，これを 3 プレーヤーで足し合わせるので，実現可能な限り各最大値の 3 倍が v_3^M になる．

$$v_3^M = 3\max\{\frac{1}{3}v_3,\ \frac{1}{2}v,\ \frac{1}{3}(v + v_1\} = \max\{v_3,\ \frac{3}{2}v,\ v + v_1\}.$$

ここで $\dfrac{1}{3}(v + v_1) > \dfrac{3}{2}v \ \Leftrightarrow\ v < 2v_1$ で，(43) の $v_3 > 3v_1$ を仮定しているので $v_3 > 3v_1 > v + v_1$ となり，$v + v_1$ は最大値としては実現しない．よって，$v_3^M = \max\{v_3,\ \frac{3}{2}v\}$ となり，(43) の下で(61) に一致する．

それぞれ市場として実現するのは

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}(v_1 + v_3) < v \leqq \frac{2}{3}v_3 \text{ のとき } v_3^M = v_3 = 3u_b(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}), \\ &v > \frac{2}{3}v_3 \text{ のとき } v_3^M = \frac{3}{2}v = u_c(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) + +u_c(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}) + u_c(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0) \end{aligned}$$

となる．$\dfrac{1}{2}(v_1 + v_3) < v \leqq \dfrac{2}{3}v_3$ のときは結果は $2v_1 \leqq v \leqq \dfrac{1}{2}(v_1 + v_3)$ のときと一致するが，u_c（2 財ずつ交換する市場）との比較が新たに問題となった．

8.7　市場ゲームとコアの関係．

対称ゲームはコアがあるとすれば(58) の $x_i = \dfrac{1}{|N|}v(N),\ i \in N,$ である．市場ゲームの，たとえば $\dfrac{1}{3}v_3 = u_b(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3})$ がそれに当たる．

一般に，全平衡ゲームの場合は市場ゲームの $v(N)$ に対するプレーヤーの各効用値がコアの実現を与える．平衡ゲーム v の場合は全平衡被覆 $\overline{v}$ が $v(N) = \overline{v}(N)$ を満たす市場ゲームなので，$\overline{v} \geqq v$ であることから，やはり市場ゲームの $v(N)$ に対するプレーヤーの効用値がコアを与える．その意味で，コアが空でない（平衡）ゲームの場合は市場ゲームでコアを実現できる．(ただし，実際のコアの計算は，凸計画法を解かねばならない.)

参考文献

[1] 岡田章,「ゲーム理論 新版」, 有斐閣, 1996.

[2] 中山幹夫,「協力ゲームの基礎と応用」, 勁草書房, 2012.

本文中のいくつかの基礎概念の定義は必ずしも参考文献のそれと一致していないので注意.