ガスケット上の self-avoiding path に付随する 2 次元写像の固定点の一意性について

2007.01.30

志賀徳造先生研究会（東工大）

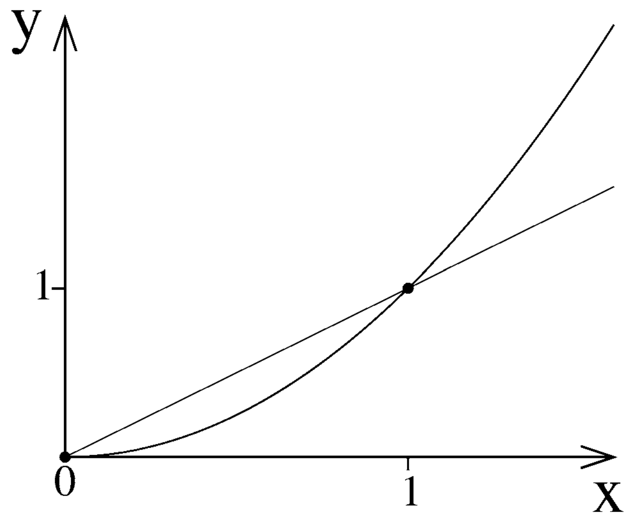
服部哲弥（東北大・理）

1. 問題.

★　2 次以上の項からなる 1 変数正係数多項式写像 f が定義する離散力学系は正実数固定点をただ 1 つ持つ.

例.　$X(x) = x^2$

☆正係数は必要条件ではないが，無条件では何も保証されない！



問題：　2 変数に拡張できるか？

答（定理１，２）：　存在と唯一性をある範囲に拡張できる.

2．例.

（以後，式を１本にするためにポテンシャルを持つ場合に限る）

$$\boxed{W_\epsilon(x,y) = \frac{1}{3}x^3 + x^4 y + \epsilon y^6}$$

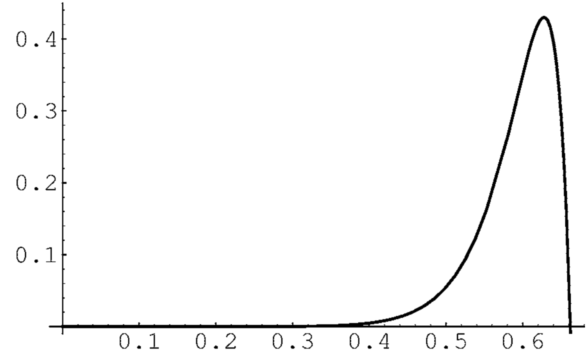
定理１，２　→　$\mathrm{grad} W_\epsilon(x,y) = (x,y)$ の解は，$0 \leqq \epsilon \leqq 8/3$ では $\Xi = \{(x,y) \mid 0 < y < x^2\}$ の内部にただ１つ

・　精密な解との比較：

$\mathrm{grad} W_\epsilon(x,y) = (x,y) \Leftrightarrow x^2 + 4x^3 y = x,\ x^4 + 6\epsilon y^5 = y$

第１式から y を消去，第２式に代入　→　代数方程式

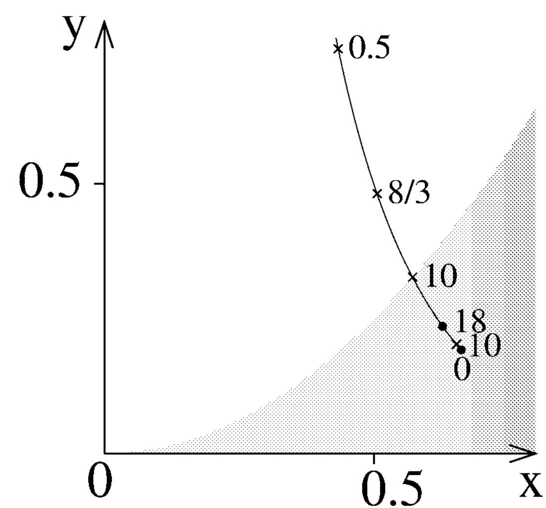
$$\frac{3}{128}\epsilon = \frac{x^8}{(1-x)^5}(1-x-4x^6)$$



$0 < \epsilon < 18.3\cdots$ →第１象限に

∃解

あとは $y < x^2$ のチェック



$0 < \epsilon < 9.79\cdots \rightarrow \Xi$ 内に　∃! 解

定理１，２は定量的に悪くない (x の値)

3. 主結果.

問題： $(X,Y) : {\mathbb{R}_+}^2 \to {\mathbb{R}_+}^2$，正係数多項式，の固定点の唯一存在？

・ 1本の式で書けるケース：ポテンシャル W を持つ場合

☆ 「正係数」だけでは「$x+y$ 方向」の不安定性しかない

・ 「準1次元的」不変部分集合 $\Xi = \{(x,y){\mathbb{R}_+}^2 \mid y < x^2\}$

・ y は $(0,0)$ 近くで「高次」，もう少し強く，$y = x^2$ に「近い」と仮定

★ 結論は $(x,y) = O(1)$ での主張 → 「小さく」も「近く」もない！(非摂動論)

★**仮定１．** $W(x,y)$ は 3 次以上の正係数多項式で $\ni x^3$.

☆ $(X,Y) = \mathrm{grad}W$ の固定点（$(x^2+y^2)/2 - W$ の臨界点）.

★**仮定２．** $\Xi = \{(x,y) \in {\mathbb{R}_+}^2 \mid 0 < y \le x^2\}$ は (X,Y) の不変部分集合で，$R(x,z) = X^2(x,x^2z) - Y(x,x^2z)$ は $x, z, 1-z$ の正係数多項式で $R(x,z)/Y(x,x^2z) = O(x)$, $x \to 0$ (z 一様).

☆固定点は $O(1)$ だから $y = O(x^2)$ は小さくないが，1 変数に近いという定性的性質が $x \sim 0$ から伝搬することを期待.

★**仮定３．** $y = x^2 > 0$ 上に固定点はなく，$x^n y$ なる形の項がある（すなわち x 軸上にも固定点はない）.

☆ Ξ の境界に固定点があると扱いが変わる.

★**定理１．** 仮定１－３の下で $(X,Y)=\mathrm{grad}W$ は Ξ の内部に固定点を持つ.

☆　注：　Ξ の外では何も言えない.

既出の例 $W(x,y)=W_\epsilon(x,y)=\frac{1}{3}x^3+x^4y+\epsilon y^6$ は $0\leqq\epsilon\leqq 8/3$ で仮定を満たす.

・　$(0,0)$ 以外の固定点：Ξ の内部は１個　（唯一存在 OK）.

・　${\mathbb{R}_+}^2\setminus\Xi$ では $\epsilon>0$ のとき 2 個，$\epsilon=0$ のとき 0 個.

☆　ϵ に $O(1)$ の上限がある　（既出）.

★　仮定の真の意義：

逆関数定理（固定点の局所唯一性）→固定点定理（後述）

★唯一性：　**予想**．仮定１－３の下で Ξ の内部の固定点は ∃!

★**定理２**．仮定１－３に加えて,

仮定４．W の最高次数は６以下,

仮定５．y を因子に含む項は５次以上,

仮定６．xy^4 と x^2y^3 は含まない,

の下で $(X,Y)=\mathrm{grad}W$ の Ξ 内部における固定点はただ一つ.

☆仮定１－６を満たす例

・ $W_\epsilon(x,y)=\frac{1}{3}x^3+x^4y+\epsilon y^6,\ 0\leqq\epsilon\leqq 8/3$：　既出

・ $W_3(x,y)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^4+\frac{2}{5}x^5+x^4y+2x^3y^2+\frac{22}{5}y^5$

・ $W_4(x,y)=\frac{\sqrt{3}}{9}x^3+\frac{1}{4}x^4+\frac{2\sqrt{3}}{15}x^5+\frac{1}{9}x^6+\frac{1}{3}x^4y+\frac{2\sqrt{3}}{9}x^5y+\frac{2\sqrt{3}}{9}x^3y^2+\frac{13}{18}x^4y^2+\frac{32\sqrt{3}}{81}x^3y^3+\frac{22}{27}x^2y^4+\frac{22}{135}y^5+\frac{44\sqrt{3}}{81}xy^5+\frac{31}{81}y^6$

(3,4 次元 gasket 上の restricted self-avoiding paths のくりこみ群)

4. 数学や物理との関係？

・rstr-SAP on $d=3,4$pre-gasket の path 長の母関数→ (X,Y) = Path 長を「エネルギー」とする Gibbs 測度の規格化.

・Pre-gasket を細かくする iteration： くりこみ群.
固定点直上では軌道の収束が自明→連続極限構成や漸近的性質 (確率測度の母関数も convolution → path 長が分枝過程)

・SAP は path 数を数える簡単な方法は無い (non-Markov).

★定理１，２の仮定を満たすことはすぐわかる
→固定点理論の構成が path counting によらずに可能になった.

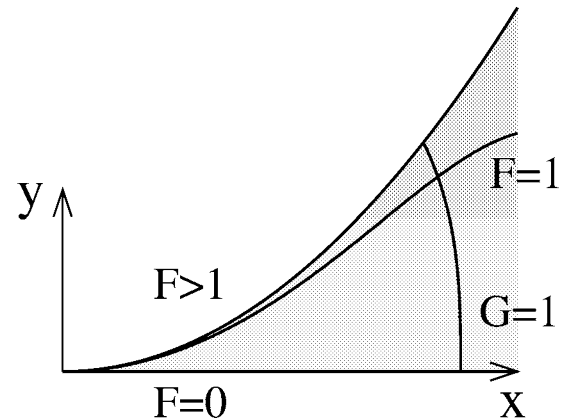
☆　服部哲弥,「ランダムウォークとくりこみ群」，共立出版

5．証明.

・定理１の証明はやさしい.

$(x, y) = (X, Y) \Leftrightarrow F = G = 1;\ G = X/x,\ F = \frac{y/x^2}{Y/X^2}$

仮定１－３　→　$y = x^2 > 0$ では $F > 1$, $y = 0 < x$ では $F = 0 < 1$, $G = 1$ は両者をつなぐ (QED)



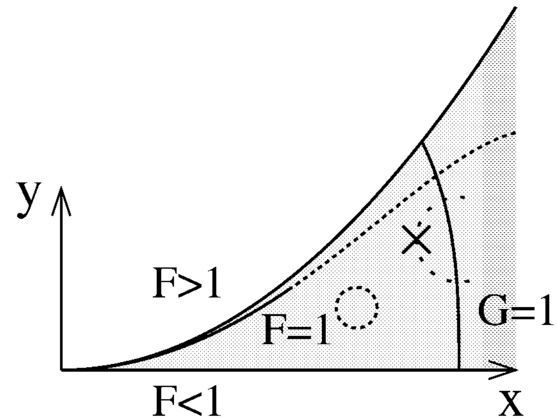
☆　仮定１－３はもっと強いメッセージがある.

$z = y/x^2$ で $(x,y) \in \bar{\Xi}$ を $(x,z) \in \Xi' = [0,\infty) \times [0,1]$ に写す $(G = X/x,\ F = z/Z)$.

$J_{GF} = \dfrac{\partial G}{\partial x}\dfrac{\partial F}{\partial z} - \dfrac{\partial F}{\partial x}\dfrac{\partial G}{\partial z}$:　$(x,z) \mapsto (G(x,z), F(x,z))$ のヤコビアン（F, G は Ξ' の近くで解析的）

★定理１’. 仮定１－３に加えて，$\{(x,z) \in \Xi'^{o} \mid F(x,z) = 1,\ G \leqq 1\}$ 上で $J_{GF} \neq 0$ が成り立つならば，Ξ の固定点（すなわち，$F = G = 1$）はただ１つ存在する.

証明．陰関数定理から，$\Xi' \cap \{F = 1,\ G \leqq 1\}$ は閉曲線または境界に端点を持つ曲線の有限個の集まり．しかも，1 本の曲線の両端が $G = 1$ にあることはない．仮定１－３から，$\{G = 1\}$ 以外の境界ではただ１本曲線が出る．(QED)



☆逆関数定理（固定点の局所唯一性）→固定点定理

仮定１－３があると $x \sim 0$ での振舞いが大局的に伝搬する．

「$J_{GF} \neq 0$ on $F = 1$」を証明すれば固定点の唯一存在に十分．

☆　定理１’は高次元へ一般化可能

★定理１’’.　$\Xi \subset {\mathbb{R}_+}^n$：単連結開集合.

$\bar{\Xi}$ 上の C^1 関数 $F_i,\ i=1,\cdots,n-1,\quad G$；$\bar{\Xi} \cap \{G \leqq 1\}$ は単連結有界閉集合.

$\Xi \cap \{G \leqq 1,\ F_i = 1,\ i=1,\cdots,n-1\}$ 上で $(F_1,\cdots,F_{n-1},G)$ のヤコビアン $J \neq 0$.

$\{G=1\}$ 以外の境界から出る等高線 $\{F_i = 1,\ i=1,\cdots,n-1\}$ の連結成分はただ１本の曲線.

→　Ξ で $G = F_1 = \cdots = F_{n-1} = 1$ の解がただ１つ存在する.

☆　くりこみ群の問題としては，Ξ の境界の条件は（物理的にも数学的にも）自然で一般性がある：

$x, y > 0$: 確率測度の正値性 (weight)

$y < x^2$: 「斥力」（エントロピーも斥力に寄与する）

$\boxed{\text{★　不等式が生む自然な不変部分集合の概念}}$

2 次元の問題に戻って…

・　固定点の唯一性（定理２の証明）は仮定１－６の下での $J_{GF} \neq 0$ on $F = 1$ の証明に帰着した.

仮定を満たす W：

$W(x,y) = a\,x^3 + b\,x^4 + f_5\,x^5 + f_6\,x^6 + (3\,a\,x^2)^2 y + g_5\,x^5 y + h_3\,x^3 y^2 + h_4\,x^4 y^2 + n_3\,x^3 y^3 + a_{24}\,x^2 y^4 + a_{05}\,y^5 + a_{15}\,x y^5 + a_{06}\,y^6,$

で，係数は非負，$a > 0$，かつ以下の $R_n \geqq 0$：

$R_5 = 24\,a\,b - g_5 - 2\,h_3 \qquad R_6 = 16\,b^2 + 30\,a\,f_5 - 2\,h_4$

$R_7 = 216\,a^3 + 40\,b\,f_5 + 36\,a\,f_6 - 3\,n_3$

$R_8 = 288\,a^2\,b + 25\,f_5^2 + 48\,b\,f_6 + 30\,a\,g_5 + 18\,a\,h_3 - 5\,a_{05} - 4\,a_{24}$

$R_9 = 360\,a^2\,f_5 + 60\,f_5\,f_6 + 40\,b\,g_5 + 24\,b\,h_3 + 24\,a\,h_4 - 5\,a_{15}$

$R_{10} = 648\,a^4 + 216\,a^2\,f_6 + 18\,f_6^2 + 25\,f_5\,g_5 + 15\,f_5\,h_3 + 16\,b\,h_4 + 9\,a\,n_3 - 3\,a_{06}$

★**補題.**　「正の項からなる多項式は正」

$$Rem_0 := (1-z)x^2\frac{Y^2}{X^2}(x,x^2z)\left(J_{GF}-\tfrac{F(1-F)}{z(1-z)}\frac{\partial G}{\partial x}\right)(x,z)$$

は x, z, $1-z$ の正係数多項式.

証明. $Rem_0 = f(x,z,1-z)$; $f(x,z,s) = ct[x,z,s] + res$

$ct[x,z,s]$: R_n たちを含む項. 手と目で見つけた.

Ξ^c では $J_{GF} < 0$ が起こりうるので証明は自明ではない….

```
ct[x_, z_, s_] :=
  Collect[Expand[
    3 a R5  z x^7  + 3 a R6  z x^8  + 8 b R5  z x^8  + 3 a R7  z^2 (1 + s) x^9  + 8 b R6 z x^9  + 15 f5 R5 z x^9
     15 f5 R6  z x^10  + R5  (a^2 (144 z^3 + 36 z^3 s) + f6 24 z ) x^10  + 8 b R8  z^3 (1 + 2 s ) x^11  + 15 f!
     R5  (g5 (3 z^2 + 45 z^2 s + 6 z^4 + 16 z^5) + h3 (4 z^2 + 12 z^2 s^2 + 11 z^5) + a b 24  s^2 z^2 (8 +
     R9  b 8  (1 + 3 s )  z^4 x^12  + R7  f6 24  (1 + s)  z^2 x^12  + R8  f5 (1 + 2 s) z^3 15  x^12   + R7  a^2 1
     R6  g5 5 z^2 (9 s + z^2 + 5 z^2 s + 4 z^4) x^12  + R5  h4 4 z^3 (1 + 8 s + z^2 + 4 z^3) x^12  + R9  f5 15
     R8  f6 24 z^3 (1 + 2 s ) x^13  + R8  a^2 9 z^4 (16 + 4 (1 + z) s) x^13  + R7  g5  (25 z^3 s + 25 z^3 (1 +
     R7  h3 (5 z^5  + 10 z^6) x^13  +  R5  a f6 108 z^3  s^3 x^13  +  R6  h4 (16 z^4 + 8 z^4 (1 + z) s + 8 z^7)
     R9  a^2 18 / 5 (39 + 46 s) z^5 x^14  + R6 n3 (21 z^5 + 3 z^6) x^14  + R7 h4  22 z^5 x^14  + R8  g5 (25 z
     R5  a24 (10 z^5 + 6 z^6) x^14  + R10  f6 48 z^5 (1 + 4 s) x^15  + R10  a^2 288 (1 + 2 s) z^6 x^15  + R9
     R6  a24 24 z^5 x^15  + R8  h4 z^5 (4 + 20 z + 20 z s) x^15  + R7  n3  21 z^6 x^15   + R8  n3 z^7 (21 + 9 s
     R10  h3 (30 z^7 + 24 z^7 s ) x^16  + R9 h4 (23 z^6 + 8 z^6 s  ) x^16   + R7  a24 26 z^6 x^16  + R6  a15 :
     R9  n3 (17 z^7 + z^8  + 7 z^8 s) x^17  + R8  a24 16 z^8 x^17  + R7  a15 (2 z^8 + 12 z^9 )  x^17  + R10
     R8 a15 (10 z^8 + 5 z^9 ) x^18  + R10  a24 32 z^9 x^19  + R9  a15 (z^9 + 8 z^10) x^19  +  R10  a15 (10
   ], x, Factor];
```

res: $Rem_0 - ct[x, z, 1 - z]$ を z と $1 - z$ で分解

[illegible]

打ち間違いがないことの確認．証明の完了．

```
Simplify[Rem0 - ct[x, z, 1 - z] - (res /. s → (1 - z))]
```

```
0
```