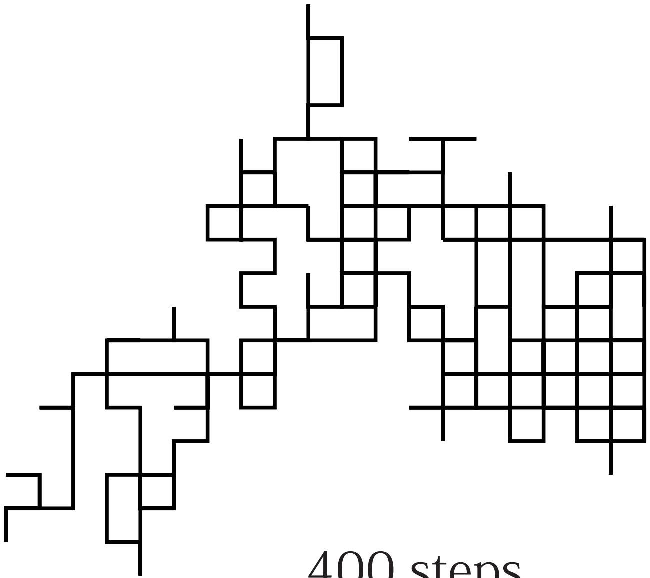
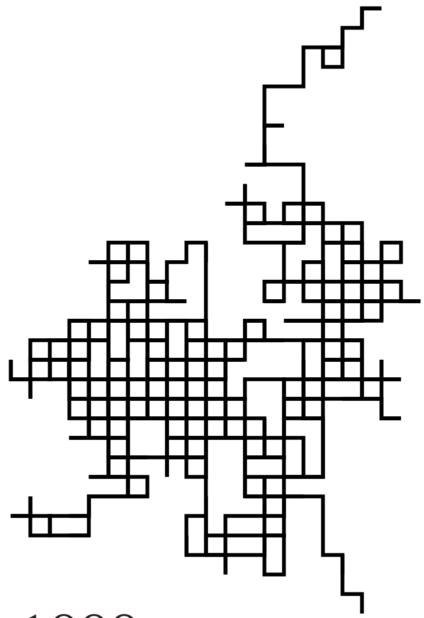
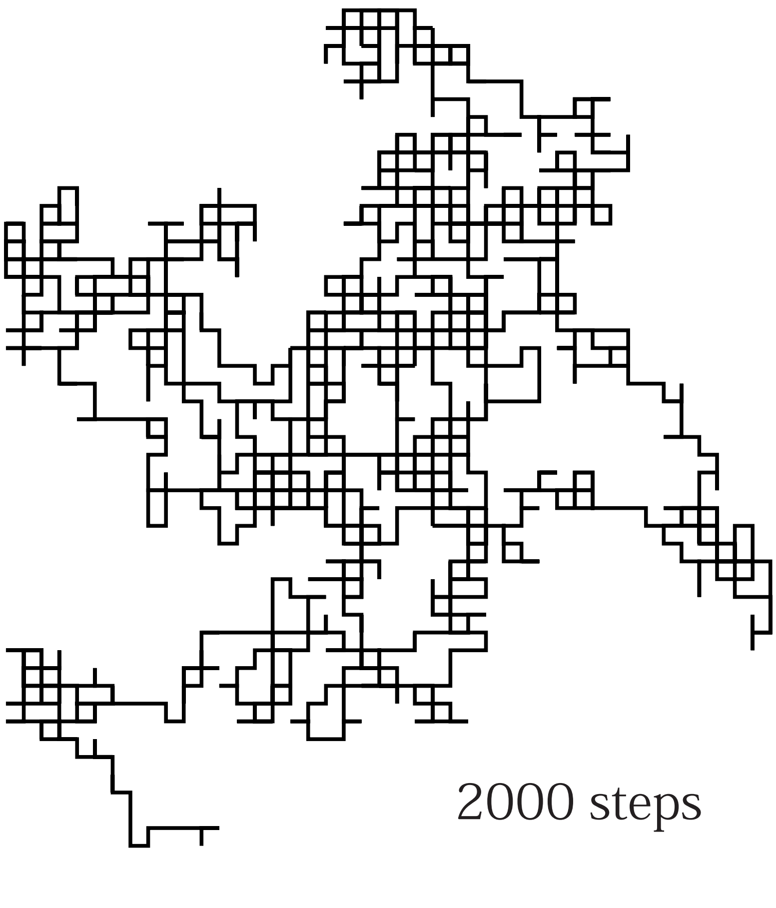
単純ランダムウォーク



400 steps



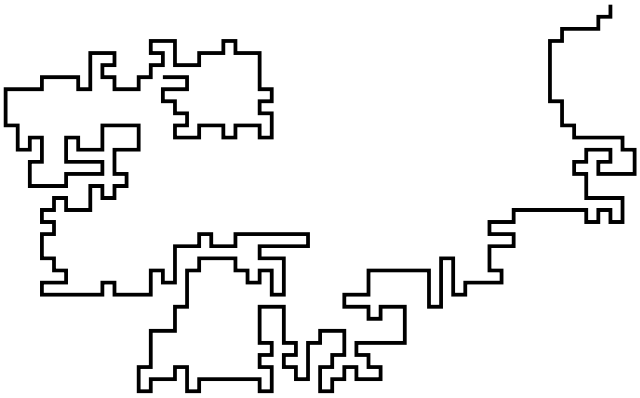
1000 steps



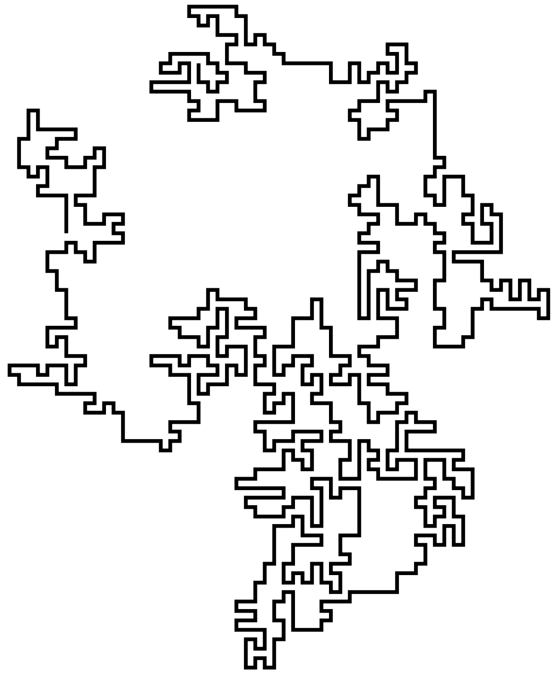
2000 steps

4000 steps

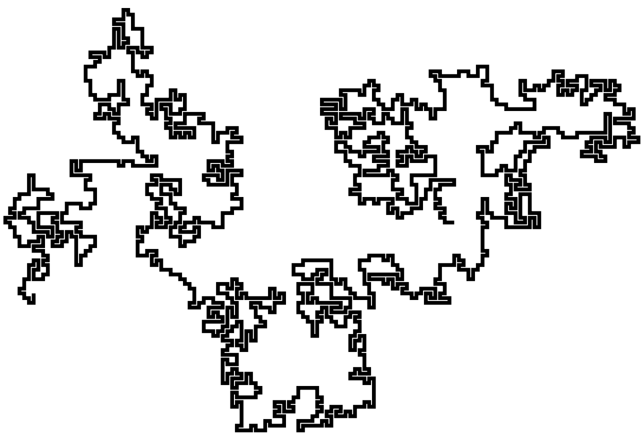
self-avoiding walk



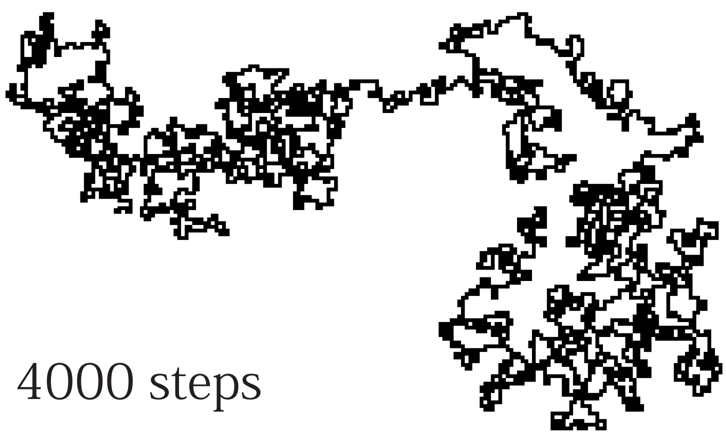
400 steps



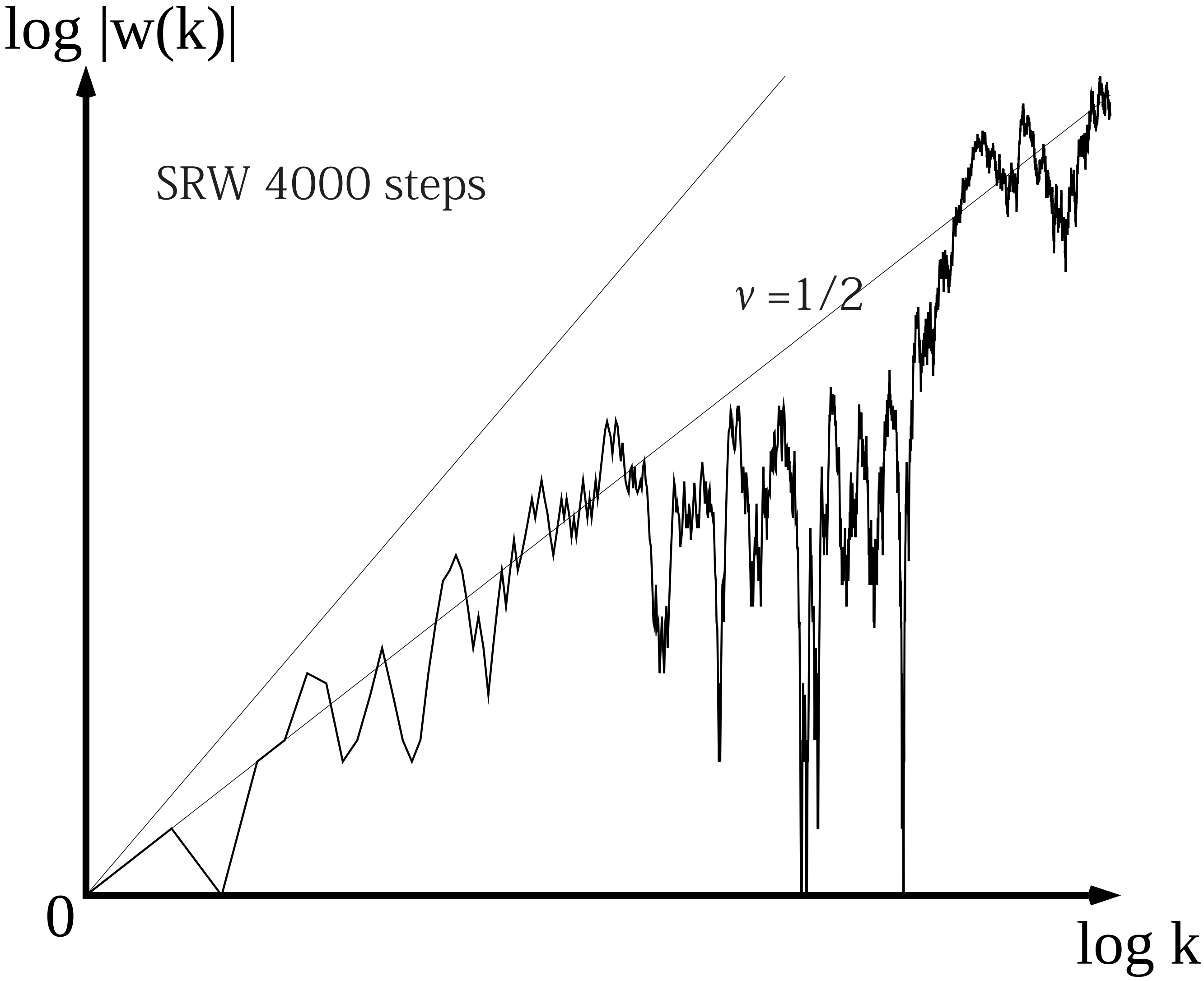
1000 steps



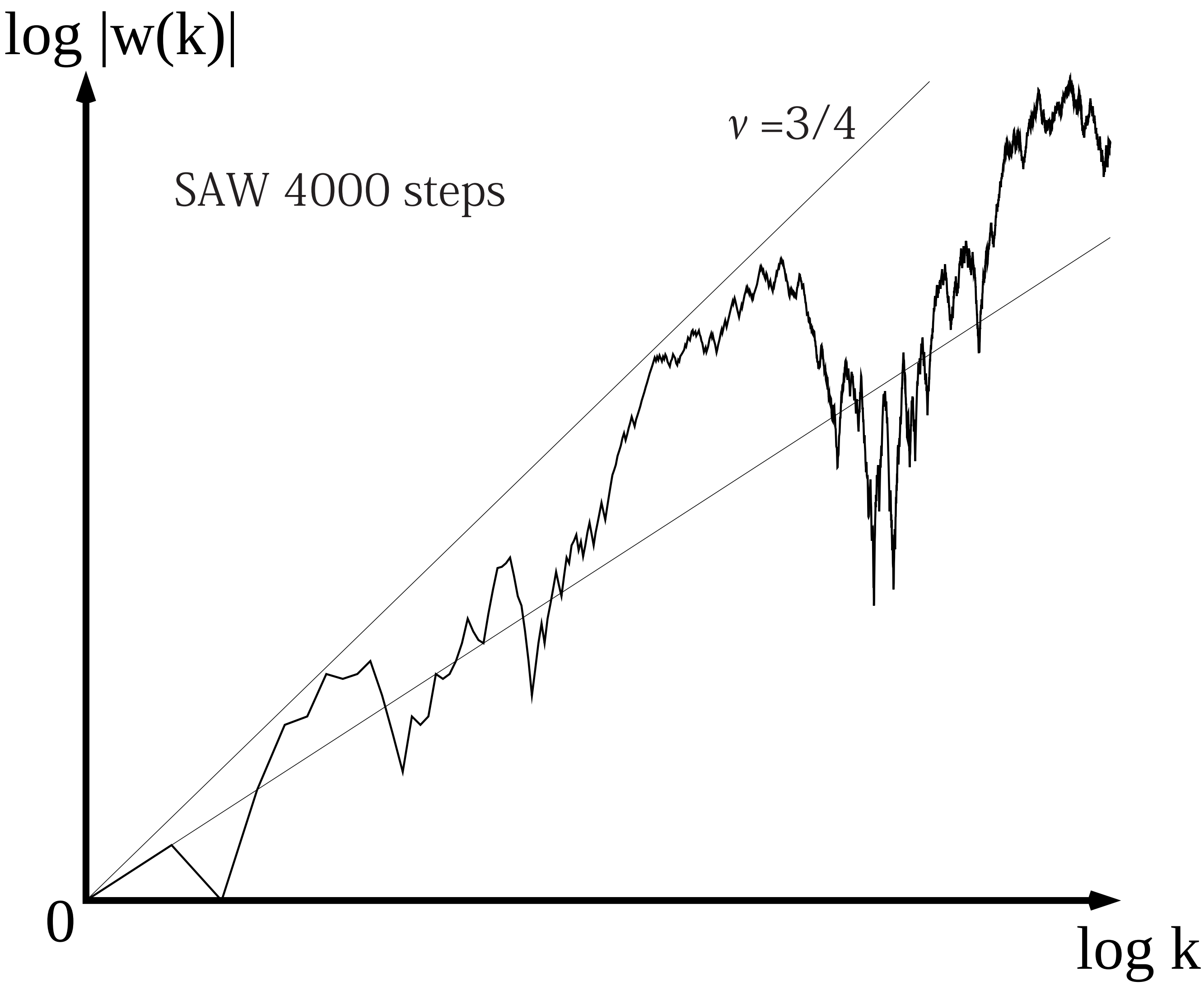
2000 steps



4000 steps



log |w(k)|
SRW 4000 steps
ν =1/2
0
log k



log |w(k)|
ν =3/4
SAW 4000 steps
0
log k

20030525
「ランダムウォークとくりこみ群」v20030520 から
服部哲弥

この記事は [T0] の初期原稿から入門的な部分の，さらに一部分を抜き出したものである．より進んだ内容に興味を持った場合は [T0] を参照して頂きたい．

1 $\mathbb{Z}$ 上の有限長の path の確率論．

1.1 Path の集合．

ランダムウォークは，数学では無限の長さを持つ経路 (path) の集合の上のある確率測度を指す専門用語である．その意味を理解するにはルベーグ測度の概念を必要とするので §2 で取り上げることにして，この節 §1 は直感的に理解しても間違えることの少ない有限長さの path を考える．

以下では，$\mathbb{Z}$ 上の有限長さの path とは，$\mathbb{Z}$ に値をとる有限長さの整数の列，たとえば

$$(0),\ (1,2),\ (-1,0,1,0,1,2)$$

などであって，列の隣り合う 2 つの要素の差が 1 であるものを言う．一般的に書けば，非負整数 k に対して $(w(0),w(1),\cdots,w(k))$ が $\mathbb{Z}$ 上の有限長さの path であるとは，

$$w(i)\in\mathbb{Z},\ i=0,1,2,\cdots,k,\quad |w(i)-w(i+1)|=1,\ i=0,1,2,\cdots,k-1, \tag{1}$$

となっていることを言うことにする．Path の $i+1$ 番目の成分 $w(i)$ は歩幅 1 の人が直線上を歩くときの i 歩目の位置と見ることができる．その意味で path の長さを歩数とも呼ぶことにする．また，1 歩をほぼ等時間で歩くことを念頭に置いて，i を時刻とも呼ぶ．

図示するときは，位置 $w(i)$ を歩数 i の関数と見る．即ち，path とはある非負整数 k に対して関数 $w:\{0,1,2,\cdots,k\}\to\mathbb{Z}$ であって，

$$|w(i)-w(i+1)|=1,\ i=0,1,2,\cdots,k-1, \tag{2}$$

を満たすもの，と見る．数列と見るのも関数と見るのも同等なので，両者を区別せず，

$$w=(w(0),w(1),\cdots,w(k))$$

のようにも書く．

k は列の要素の個数から 1 を引いたものだが，これを path の長さと言い，$L(w)$ と書く：

$$w=(w(0),w(1),\cdots,w(k))\quad のとき\quad L(w)=k.$$

１つの整数からなる列 $(w(0))$ は長さ 0 の path と扱う．

Path を１辺 1 の長さのます目がまっすぐつながったすごろくの上の駒の動きと見ることもできる．あとで確率を導入して単純ランダムウォークを定義するとき，硬貨を投げて表裏に応じて左右のます目に移動するすごろくも念頭に置く．つまり，$\mathbb{Z}$ 上の path というとき，背後に考えている現象は，１回の動きで左右どちらかの隣の場所に移るという規則さえ守れば，1 歩の実際の幅は問題にせず，実際の動きが 1 歩分 50cm であってもます目１つ分 5cm であっても上記の path によって記述する．

$\mathbb{Z}$ 上の path を考えるとき，どの整数点も対等で区別がない．出発点が 1 の path は path 全体を -1 方向にずらせば形を変えずに出発点を 0 とすることができる．そこで，以下では特に理由がなければ原点 0 を出発点とする path を主に考える．$k\in\mathbb{Z}_+$ に対して出発点が原点 0 ($w(0)=0$) で長さが k ($L(w)=k$) の $\mathbb{Z}$ 上の path を全て集めた集合を Ω_k とおく．Ω_k が有限集合で 2^k 個の要素からなることは明らかだろう．

ここまで，有限の長さの path を考えてきたが，後々長さ無限（無限歩）の path も考える．長さが無限の path とは，関数 $w:\ \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}$ （あるいは各項が整数の無限数列 $w = (w(0), w(1), w(2), \ldots)$）であって，(2) と同様の条件（を無限時刻まで考えたもの）

$$|w(i) - w(i+1)| = 1,\ i = 0, 1, 2, \cdots, \tag{3}$$

を満たすものをいう．そのような path に対しては $L(w) = \infty$ と書くことにする．出発点が原点 0 ($w(0) = 0$) で長さが無限 ($L(w) = \infty$) の path を全て集めた集合を Ω とする．$\mathbb{Z}^n$ 上の有限長または無限長の path $w \in \Omega \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega_k$ をまとめて $\mathbb{Z}^n$ 上の path とよび，その長さを $L(w)$ と書く．長さという代わりに歩数と呼ぶときは $L(w)$ 歩目，または，時刻 $L(w)$ で止まった，とも言うことにする．

1.2 Path の集合の上の確率．

$k \in \mathbb{Z}_+$ に対して原点を出発点とする k 歩の path の集合 Ω_k の平均的な振る舞いを調べるのに，もっとも単純な方法として path に関する単純平均を考える．単純平均とはあまりに単純すぎると聞こえるかもしれないが，実は §2 で説明する単純ランダムウォークと（最初の k 歩に限れば）等価である．

k 歩の path についての単純平均に相当する確率測度（Ω_k 上の一様分布）は，各 path $w \in \Omega_k$ に対して

$$\mathrm{P}_k[\ \{w\}\ ] = 2^{-k} \tag{4}$$

を満たす確率測度 P_k である．この式と

$$\mathrm{P}_k[\ A\ ] = \sum_{w \in A} \mathrm{P}_k[\ \{w\}\ ],\quad A \subset \Omega_k\,, \tag{5}$$

によって P_k を定義する．$A \subset \Omega_k$ に対して A の要素の個数を $\sharp A$ と書けば，(4) と (5) から

$$\mathrm{P}_k[\ A\ ] = 2^{-k} \sharp A$$

となるので，出発点と歩数を固定した path の集合上の一様分布に関する計算は本質的にその集合の要素となる path の個数を数えることに他ならない．特に $\sharp\Omega_k = 2^k$ なので $\mathrm{P}_k[\ \Omega_k\ ] = 1$ である（というより，そこから (4) の 2^{-k} を決めた，というのが正しい）し，要素の個数だから有限加法性を満たすのは当然である．よって P_k は Ω_k 上の確率測度である．(無限長の path の集合 Ω 上に確率測度を定義するときは，(5) によって定義することができないので，§2 では少し違う見方で定義する.)

Path $w \in \Omega_k$ にとって基本的な量として i 歩目の位置と i 歩目の動き（左右どちらに動くか）がある．今までは $w = (w(0), w(1), w(2), \cdots, w(k))$ ($w(0) = 0$) と「成分表示」しておいてそれぞれ $w(i)$，$w(i) - w(i-1)$ と書いていたが，いずれも path を決める毎に決まる量なので，path 集合 Ω_k 上の関数，言い換えると確率変数，である．そこで，i 歩目の位置を表す関数を $W_i:\ \Omega_k \to \mathbb{Z}$，$i$ 歩目の動きを表す関数を $X_i:\ \Omega_k \to \{\pm 1\}$，とおく．成分表示との関係ではそれぞれ $W_i(w) = w(i)$，$\ X_i(w) = w(i) - w(i-1)$ である．

Ω_k の path は 1 歩毎に左右いずれかに 1 ずつ動くので X_i は ± 1 いずれかの値しか取らない．また，原点を出発点とするので $W_0 = 0$ である．以上から，$i = 1, 2, \cdots, k$ に対して

$$X_i^2 = 1,\quad \text{および}\quad W_i = \sum_{j=1}^{i} X_j, \tag{6}$$

が Ω_k 上で恒等的に成り立つ．

Path についての単純平均は P_k に関する期待値 E_k のことである．

1.3 変位の指数．

k を自然数とする．出発点が原点の k 歩の $\mathbb{Z}$ 上の path の集合 Ω_k に §1.2 のように一様分布 P_k を考えた確率空間 (Ω_k, P_k) において，歩数を大きくしていく ($k \to \infty$) ときに path の典型的な（あるいは平均的な）挙動を考える．手始めとしてこの節では変位の指数について説明する．

単位時刻あたり単位長さ進むとき，出発点から最も遠ざかれるのは，もちろん，まっすぐ進んだ場合で，歩数 k と位置 $x(k)$ の関係は

$$|x(k)| = k$$

である．京都のように東西南北に碁盤目状に道の通っている町で北東方向に進む（）と，

$$|x(k)| = \frac{1}{\sqrt{2}}k$$

となる．比例定数は変わるが出発点からの path の変位 $|x(k)|$ が歩数 k に比例することは変わらない．従って，特に（状況によって変わりうる比例定数を表に出さないようにすると）

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\log|x(k)|}{\log k} = 1\,. \tag{7}$$

当たり前のことを書いたのは，全ての path を対等に考える確率空間 (Ω_k, P_k) では，(7) の左辺の「典型的な値」は $1/2$ になるからである．(7) の右辺の 1 という数字は，目的地を目指して進む（もう少し精密にいうと「なめらかな」）道という特別な場合の値であって，典型的な道では決して「当たり前」ではない．

$1/2$ という数字を導くために，§1.2 の記号に従って path の i 歩目の位置を表す関数を $W_i\colon\ \Omega_k \to \mathbb{Z}$，$i$ 歩目の動きを表す関数を $X_i\colon\ \Omega_k \to \{\pm 1\}$，とおく．次の事実は，増分 X_j の独立性と呼ばれる著しい性質である．

定理 1 自然数 k に対して，(Ω_k, P_k) 上で

$$\mathrm{E}_k[\,X_i\,] = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, k,$$

および

$$\mathrm{E}_k[\,X_i X_j\,] = \delta_{ij} \quad i, j = 1, 2, \cdots, k,$$

が成り立つ．また， $\mathrm{P}_k[\,X_i = 1\,] = \mathrm{P}_k[\,X_i = -1\,] = \dfrac{1}{2}$ である．

さらに，任意の $1 \leqq j \leqq k$ に対して $\{\pm 1\}$ 上の複素数値関数 $f\colon\ \{\pm 1\} \to \mathbb{C}$ および， $\{\pm 1\}^{k-1}$ 上の複素数値関数（つまり，$\{\pm 1\}$ に値を取る変数 $k-1$ 個を変数とする関数）$g\colon\ \{\pm 1\}^{k-1} \to \mathbb{C}$ に対して，

$$\mathrm{E}_k[\,f(X_j)\,g(X_1, X_2, \cdots, X_{j-1}, X_{j+1}, \cdots, X_k)\,] = \mathrm{E}_k[\,f(X_j)\,]\,\mathrm{E}_k[\,g(X_1, X_2, \cdots, X_{j-1}, X_{j+1}, \cdots, X_k)\,].$$

特に，k 以下の自然数からなる列 $i_1, i_2, \cdots, i_p$ の中に奇数個現れる数字があれば

$$\mathrm{E}_k[\,X_{i_1} X_{i_2} \cdots X_{i_p}\,] = 0$$

となる．

◇

注 1 確率論の教科書にある独立確率変数列の積の期待値に関する性質では $f,\,g$ の可積分性に関する条件が付くが，ここでは X_i たちの取りうる値が有限個（± 1 の 2 種類）なので $f,\,g$ は任意の関数でよい． ◇

証明. i 歩目の 1 歩の動きの平均が 0 であることは当たり前だが，念のため式で書くと次のようになる．

$$\mathrm{E}_k[\,X_i\,] = \sum_{w\in\Omega_k} X_i(w)\,\mathrm{P}_k[\,\{w\}\,]$$

において，path をひっくり返す（原点に関して対称移動する）変数変換 $w' = -w$ を行うと，Ω_k は原点を出発する k 歩の path を全て集めた集合だから，w が Ω_k を動くとき $w' = -w$ も Ω_k を動くことと，単純平均 (4) を考えているので $\mathrm{P}_k[\,\{-w\}\,] = \mathrm{P}_k[\,\{w\}\,]$ となること，および $X_i(-w) = -X_i(w)$ であることから，

$$\mathrm{E}_k[\,X_i\,] = \sum_{w'\in\Omega_k} X_i(-w')\,\mathrm{P}_k[\,\{-w'\}\,] = -\sum_{w'\in\Omega_k} X_i(w')\,\mathrm{P}_k[\,\{w'\}\,] = -\mathrm{E}_k[\,X_i\,]$$

となる．よって $\mathrm{E}_k[\,X_i\,] = 0$ を得る．同じ理由で $\mathrm{P}_k[\,X_i = 1\,] = \mathrm{P}_k[\,X_i = -1\,] = \dfrac{1}{2}$ も分かる．

2 次のモーメントについては，$i = j$ のときは (6) から明らかだから，$i \neq j$ のとき $\mathrm{E}_k[\,X_iX_j\,] = 0$ となることを証明する．期待値の定義から

$$\mathrm{E}_k[\,X_iX_j\,] = \sum_{w\in\Omega_k} X_i(w)X_j(w)\,\mathrm{P}_k[\,\{w\}\,]$$

なので，path w についての和を，w の j 歩目 $X_j(w)$ について分類すると

$$\mathrm{E}_k[\,X_iX_j\,] = \sum_{\substack{w\in\Omega_k;\\ X_j(w)=1}} X_i(w)\,\mathrm{P}_k[\,\{w\}\,] - \sum_{\substack{w\in\Omega_k;\\ X_j(w)=-1}} X_i(w)\,\mathrm{P}_k[\,\{w\}\,].$$

ここで，path $w \in \Omega_k$ に対して，j 歩目の 1 歩のみ反転させた path を対応させる関数を $\rho_j:\ \Omega_k \to \Omega_k$ と書く（）．Ω_k は原点を出発する k 歩の path を全て集めた集合だから，ρ_j は全単射である．もっと強く，$\rho_j^{-1} = \rho_j$，つまり，逆関数が自分自身に一致することもすぐに分かる．当然，

$$X_\ell(\rho_j(w)) = \begin{cases} -X_j(w), & \ell = j, \\ X_\ell(w), & \ell \neq j, \end{cases}$$

である．さらに，(4) から $\mathrm{P}_k[\,\{\rho_j(w)\}\,] = \mathrm{P}_k[\,\{w\}\,]$ となることに注意すると，$i \neq j$ のとき

$$\sum_{\substack{w\in\Omega_k;\\ X_j(w)=-1}} X_i(w)\,\mathrm{P}_k[\,\{w\}\,] = \sum_{\substack{w\in\Omega_k;\\ X_j(\rho_j(w))=1}} X_i(\rho_j(w))\,\mathrm{P}_k[\,\{\rho_j(w)\}\,] = \sum_{\substack{w'\in\Omega_k;\\ X_j(w')=1}} X_i(w')\,\mathrm{P}_k[\,\{w'\}\,]$$

となる．後の等号は ρ_j が Ω_k 上の全単射であることを用いて和の変数変換 $w' = \rho_j(w)$ を行った．よって，

$$\mathrm{E}_k[\,X_iX_j\,] = \sum_{\substack{w\in\Omega_k;\\ X_j(w)=1}} X_i(w)\,\mathrm{P}_k[\,\{w\}\,] - \sum_{\substack{w\in\Omega_k;\\ X_j(w)=1}} X_i(w)\,\mathrm{P}_k[\,\{w\}\,] = 0\,.$$

以上の証明では X_j にかかっているものが X_i でなくても X_j を含んでいなければ全く同様に成り立つし， X_j の代わりに X_j の関数であっても有効な議論である．念のため説明を加えると，

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}_k[\,f(X_j)\,g(X_1, X_2, \cdots, X_{j-1}, X_{j+1}, \cdots, X_k)\,] \\
&= \sum_{w\in\Omega_k} g(X_1(w), X_2(w), \cdots, X_{j-1}(w), X_{j+1}(w), \cdots, X_k(w))\, f(X_j(w))\,\mathrm{P}_k[\,\{w\}\,]
\end{aligned}$$

において，path w についての和を，w の j 歩目 $X_j(w)$ について分類して，上で導入した ρ_j を用いて和の変数変換 $w' = \rho_j(w)$ を行うと，

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}_k[\,f(X_j)\,g(X_1, X_2, \cdots, X_{j-1}, X_{j+1}, \cdots, X_k)\,] \\
&= \sum_{\substack{w\in\Omega_k;\\ X_j(w)=1}} g(X_1(w), X_2(w), \cdots, X_{j-1}(w), X_{j+1}(w), \cdots, X_k(w))\, f(1)\,\mathrm{P}_k[\,\{w\}\,] \\
&+ \sum_{\substack{w\in\Omega_k;\\ X_j(w)=-1}} g(X_1(w), X_2(w), \cdots, X_{j-1}(w), X_{j+1}(w), \cdots, X_k(w))\, f(-1)\,\mathrm{P}_k[\,\{w\}\,] \\
&= \sum_{\substack{w\in\Omega_k;\\ X_j(w)=1}} g(X_1(w), X_2(w), \cdots, X_{j-1}(w), X_{j+1}(w), \cdots, X_k(w))\, f(1)\,\mathrm{P}_k[\,\{w\}\,] \\
&+ \sum_{\substack{w'\in\Omega_k;\\ X_j(w')=1}} g(X_1(w'), X_2(w'), \cdots, X_{j-1}(w'), X_{j+1}(w'), \cdots, X_k(w'))\, f(-1)\,\mathrm{P}_k[\,\{w'\}\,] \\
&= (f(1) + f(-1)) \sum_{\substack{w\in\Omega_k;\\ X_j(w)=1}} g(X_1(w), X_2(w), \cdots, X_{j-1}(w), X_{j+1}(w), \cdots, X_k(w))\,\mathrm{P}_k[\,\{w\}\,]
\end{aligned}$$

となるが，同じ変形で

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}_k[\,g(X_1, X_2, \cdots, X_{j-1}, X_{j+1}, \cdots, X_k)\,] \\
&= 2 \sum_{\substack{w\in\Omega_k;\\ X_j(w)=1}} g(X_1(w), X_2(w), \cdots, X_{j-1}(w), X_{j+1}(w), \cdots, X_k(w))\,\mathrm{P}_k[\,\{w\}\,]
\end{aligned}$$

および，既に証明したことを用いて

$$\mathrm{E}_k[\,f(X_j)\,] = f(1)\mathrm{P}_k[\,X_j = 1\,] + f(-1)\mathrm{P}_k[\,X_j = -1\,] = \frac{1}{2}(f(1)+f(-1))$$

となることから，主張のとおり，

$$\mathrm{E}_k[\,f(X_j)\,g(X_1,X_2,\cdots,X_{j-1},X_{j+1},\cdots,X_k)\,] = \mathrm{E}_k[\,f(X_j)\,]\,\mathrm{E}_k[\,g(X_1,X_2,\cdots,X_{j-1},X_{j+1},\cdots,X_k)\,]$$

となる．

最後に，$i_1,i_2,\cdots,i_p$ の中に j が 1 つしかなければ上の結果で $f(x)=x$ とおくことで，

$$\mathrm{E}_k[\,X_{i_1}X_{i_2}\cdots X_{i_p}\,] = 0$$

を得る．j が奇数個現れるときも (6) の $X_j^2=1$ から X_j が 1 つの場合と同じ値になる． □

系 2 $\mathrm{E}_k[\,W_k\,]=0$ および $\mathrm{E}_k[\,W_k^2\,]=k$ が成り立つ． ◇

証明. いずれも，(6) と 定理 1 から直ちに得られる．たとえば，

$$\mathrm{E}_k[\,W_k^2\,] = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\mathrm{E}_k[\,X_iX_j\,] = \sum_{i\neq j}\mathrm{E}_k[\,X_iX_j\,] + \sum_{i=1}^{k}\mathrm{E}_k[\,X_i^2\,] = k$$

である． □

変位の指標（k 歩でどの程度出発点から遠くまで離れるか）として最初に試したくなるのは k 歩目の平均の位置 $\mathrm{E}_k[\,W_k\,]$ かもしれないが，系 2 でみたようにこれは 0 になる（直感的にいえば，右に行く path と同じだけ左に行く path がある，ということである）．そこで，最も簡単な量は 2 次のモーメント $\mathrm{E}_k[\,W_k^2\,]$ である．系 2 から，特に歩数と変位の関係について，２乗平均の意味では，$W_k^2 \fallingdotseq k$，すなわち，$W_k \fallingdotseq k^{1/2}$ が言えたことになる．W_k の 2 乗の期待値（平均）という意味で，$\mathrm{E}_k[\,W_k^2\,]$ を 2 乗平均変位 (mean square displacement) と呼び，その意味での $W_k \fallingdotseq k^{1/2}$ の指数 1/2 を 2 乗平均変位の指数 (exponent) と呼ぶ．

ところで，２次のモーメント $\mathrm{E}_k[\,W_k^2\,]$ が k に等しいだけでは，出発点から遠ざかる path と出発点にとどまる path があって平均して k になる極端な可能性も排除できない．何らかの意味で典型的な path は全て $W_k \fallingdotseq k^{1/2}$ のように振る舞うならば，任意次のモーメントについて対応する結果を期待するだろう．控えめに見積もって，

$$\mathrm{E}_k[\,|W_k|^{2s}\,] \approx k^s \tag{8}$$

が全ての $s>0$ で成り立つことを期待する．$s=1$ のときは 系 2 で証明したが，s が自然数のときも同じ証明方法で証明できる．

命題 3 $\ell = 1,2,\cdots$ に対して

$$\mathrm{E}_k[\,W_k^{2\ell}\,] = (2\ell-1)!!\,k^{\ell}\,(1+O(k^{-1})),\quad k\to\infty. \tag{9}$$

ここで，$(2\ell-1)!!$ は 2 つずつ減らした数の積

$$(2\ell-1)\cdot(2\ell-3)\cdot(2\ell-5)\cdot\cdots\cdot 5\cdot 3\cdot 1\ \left(=\frac{(2\ell-1)!}{2^{\ell-1}(\ell-1)!}\right)$$

を表す.（例えば，$1!!=1$, $3!!=3$, $5!!=15$.） ◇

証明. 例えば $\ell = 2$ のとき

$$\mathrm{E}_k[\,W_k^4\,] = \sum_{i_1=1}^{k}\sum_{i_2=1}^{k}\sum_{i_3=1}^{k}\sum_{i_4=1}^{k}\mathrm{E}_k[\,X_{i_1}X_{i_2}X_{i_3}X_{i_4}\,]$$

において，定理 1 から，添字 $i_1\cdots i_4$ は 4 つとも等しいか 2 つずつ等しい場合のみ期待値が 0 でないので，(i) $i_1 = i_2 \neq i_3 = i_4$，(ii) $i_1 = i_3 \neq i_2 = i_4$，(iii) $i_1 = i_4 \neq i_2 = i_3$，(iv) $i_1 = i_2 = i_3 = i_4$，の 4 通りに和を分解すると，(i), (ii), (iii) は等しくなる．(6) から $X_i^2 = 1$ であることも使うと，

$$\mathrm{E}_k[\,W_k^4\,] = 3\sum_{i=1}^{k}\sum_{\substack{1\leqq j\leqq k;\\ j\neq i}}\mathrm{E}_k[\,X_i^2X_j^2\,] + \sum_{i=1}^{k}\mathrm{E}_k[\,X_i^4\,] = 3\sharp\{(i,j)\mid 1\leqq i,j\leqq k, j\neq i\} + k = 3k^2-2k,$$

となるので，$\ell = 2$ の場合の (9) が証明できた．

一般の ℓ については，$\ell = 2$ の場合に k^2 がどのように出てきたかを見るのが分かりやすいだろう．W_k^4 の期待値を X_i たちの積の期待値の和に直したとき，2 つずつ添字が等しい (i)—(iii) の場合に添字についての和が二重になっていて，１つの和毎に k が現れるので k^2 となっている．4 つの添字が等しい場合は添字についての和が減るために k についての次数が低い寄与しかない．k^2 の項の係数 3 は 4 つの添字を 2 つずつペアに組み合わせる組み合わせ方の場合の数に等しい．以上の議論を一般の ℓ に拡張することは容易だろう．k について最大次数は

$$\mathrm{E}_k[\,W_k^{2\ell}\,] = \sum_{i_1=1}^{k}\sum_{i_2=1}^{k}\cdots\sum_{i_{2\ell}=1}^{k}\mathrm{E}_k[\,X_{i_1}X_{i_2}\cdots X_{i_{2\ell}}\,]$$

において，添字を 2 つずつ等しくおいたときの添字の総数 ℓ であり，その k^ℓ の係数は（k が ℓ に比べて十分大きいとき）添字 $i_1, i_2, \cdots, i_{2\ell}$ を 2 つずつ組み合わせる組み合わせ方は,

$$(2\ell-1)\cdot(2\ell-3)\cdot(2\ell-5)\cdot\cdots\cdot 3\cdot 1 = (2\ell-1)!!$$

であり，これ以外の項は k の次数が少なくとも 1 小さい． □

1.4 到達点を固定したときの path の本数．

k 歩の path が典型的に，あるいは，平均的にどこにいるかを調べるためのもっとも基本的な量は点 $x\in\mathbb{Z}$ を固定するごとに k 歩で x に達する path の総本数 $N_{k,x}$ である．

$$N_{k,x} = \sharp\{(w(0), w(1), \cdots, w(k)) \in \Omega_k \mid w(k) = x\},\quad k\in\mathbb{N},\ x\in\mathbb{Z}.$$

$a = \dfrac{k+x}{2}$ および $b = \dfrac{k-x}{2}$ とおけば，$k = a+b,\ x = a-b$ だから，a と b が数直線（あるいはすごろくの盤）をそれぞれ右と左に進んだ回数（コマの動いた目の数）になるので，k 歩のうちどの a 歩で右に進むかを決めることと path を決めることが一対一に対応する．よって

$$N_{k,x} = \begin{cases} \begin{pmatrix} k \\ (k+x)/2 \end{pmatrix}, & k-x \text{ が偶数のとき,} \\ 0, & k-x \text{ が奇数のとき.} \end{cases} \tag{10}$$

ここで $\begin{pmatrix} k \\ a \end{pmatrix}$ は k 個のものから a 個を選ぶ場合の数（2 項係数）．

前節までの結果は (10) を使えば直接得られる.（しかも，そのほうが，局所中心極限定理のような，より精密な結果も得られる.）しかし，(10) のように path の本数が簡単な（漸近形の得やすい）形で計算できることは，極めて特別な場合に限られるので，より一般性のある方法の紹介を優先した．この節 §1.4 では，少し脇道にそれて，(10) という精密な情報を用いて $\mathbb{Z}$ 上の「典型的な path」のよく知られた詳細な振る舞いをいくつか紹介する．

1.4.1 反射原理と選挙の定理．

ここまで原点 0 を出発点 $w(0)$ とする path を考えてきたが，この節 §1.4.1 では，出発点 $w(0)$ が原点以外の path （(2) を満たす関数 $w:\ \{0,1,2,\cdots,k\} \to \mathbb{Z}$）も考える．日常の言葉遣いに合わせて，$w(0)$ を出発点， k 歩の path に対して $w(k)$ を到達点と言い，また，出発点が x，到達点が y の path を x から y への path と言う．

命題 4 (反射原理) $k,x,y \in \mathbb{N}$ とする． $-x$ から y への k 歩の *path* の本数は x から y への k 歩の *path* のうち，0 を通るものの本数に等しい *()*. ◇

証明. $-x$ から y への k 歩の path を $(w(0)=-x, w(1), w(2), \cdots, w(k)=y)$ とする．$-x<0,\ y>0$ なので必ず 0 を通る．はじめて 0 を通る時刻（歩数）を τ とする： $\tau = \inf\{i \in \mathbb{N} \mid w(i)=0\}$ ($<k$)．時刻 τ までの path を 0 （出発点）に関して折り返せば x から y への path で 0 をとおるものを得る ()．明らかにこの変換は一対一で全射だから，主張を得る． □

系 5 x を 0 以外の整数とするとき， 0 から x への k 歩の *path* のうち 0 に戻らない（出発点以外では 0 を通らない）もの（つまり，$x>0$ のときは常に正の側にあるもの，$x<0$ のときは常に負の側にあるもの）の本数は $N_{k-1,x-1} - N_{k-1,x+1} = \dfrac{|x|}{k} N_{k,|x|}$ である． ◇

証明. $x<0$ も同様なので $x>0$ とする．元の path $w=(w(0)=0, w(1), \cdots, w(k))$ の 0 歩目（出発点）を除いて，1 歩目から k 歩目までの $k-1$ 歩に注目すると $w(1)$ を出発点とする $k-1$ 歩の path

$$w' = (w'(0), w'(1), \cdots, w'(k-1));\quad w'(i) = w(i+1),\ i=0,1,\cdots,k,$$

を得る． $x>0$ で w が 0 にならないから $w'(0)=w(1)=1$ である．即ち，条件を満たす path w と 1 から x への $k-1$ 歩の path w' のうち 0 を通らないもの全てが一対一に対応する．よって後者の本数を数えればよい．1 から x への $k-1$ 歩の path w' のうち 0 を通るものは命題 4 より -1 から x への $k-1$ 歩の path の本数に等しいので，これを 1 から x への $k-1$ 歩の path の本数から引けばよい．

§1.1 で原点を出発点とする $\mathbb{Z}$ 上の k 歩の path の集合 Ω_k を導入したときに注意したとおり，$\mathbb{Z}$ 上のどの整数点も対等で区別がないので，たとえば出発点が 1 の path は path 全体を -1 方向にずらせば形を変えずに原点を出発点とする path にできる．即ち，出発点を固定した k 歩の path の集合は Ω_k と自然な一対一対応がある．従って，特に，1 から x への $k-1$ 歩の path の本数は 0 から $x-1$ への $k-1$ 歩の path の本数 $N_{k-1,x-1}$ に等しく，また， -1 から x への $k-1$ 歩の path の本数は 0 から $x+1$ への $k-1$ 歩の path の本数 $N_{k-1,x+1}$ に等しい．よって，求める本数は $N_{k-1,x-1} - N_{k-1,x+1}$ に等しい．

$a = \dfrac{1}{2}(x+k),\ b = \dfrac{1}{2}(k-x)$ $(x=a-b,\ k=a+b)$ とおくと，$N_{k,x}$ の具体形 (10) と 2 項係数の性質から，これは

$$N_{k-1,x-1} - N_{k-1,x+1} = \left(\begin{array}{c} k-1 \\ a-1 \end{array}\right) - \left(\begin{array}{c} k-1 \\ a \end{array}\right) = \frac{a-b}{a+b} N_{k,x} = \frac{x}{k} N_{k,x}$$

と変形できる． □

反射原理の有名な例題として，選挙のとき常にリードを保ったまま勝つ確率についての定理（the ballot theorem，ballot は (無記名) 投票 (用紙) のこと）がある．

定理 6 2 人の候補者 *A, B* について一票ずつ開票して最後にそれぞれ a, b 票ずつ得票して A が勝つ $(a>b)$ とする．A が常にリードしながら勝つ票の出方の総数と,（経過は問わずに）最後が a 票対 b 票となる出方の総数の比は $\dfrac{a-b}{a+b}$ である． ◇

証明. $x=a-b,\ k=a+b$ とおくと，票の出方の総数は $N_{k,x}$ である．常にリードしながら勝つ票の出方は 0 から x への k 歩の path のうち出発点以外では 0 を通らないものの本数と等しい．よって，定理は 系 5 から直ちに得られる． □

1.4.2 出発点に戻る確率．

原点を出発点とする k 歩の path の単純平均に関する確率空間 (Ω_k, P_k) と i 歩目の位置を表す確率変数 W_i に戻って， $2k$ 歩で出発点 0 に戻る確率

$$u_{2k} = \mathrm{P}_{2k}[\, W_{2k} = 0\,], \tag{11}$$

および，$2k$ 歩で出発点 0 へ初めて戻る確率

$$f_{2k} = \mathrm{P}_{2k}[\, W_2 \neq 0, \cdots, W_{2k-2} \neq 0, W_{2k} = 0\,], \tag{12}$$

について調べる.（奇数歩で出発点に戻ることがないことに注意.）

どの k 歩の path w も出現する確率は $\mathrm{P}_k[\,\{w\}\,] = 2^{-k}$ なので，path に関する事象（集合）の確率はその集合に属する path の本数を 2^{-k} 倍すればよい．従って (10) から

$$\mathrm{P}_k[\, W_k = i\,] = 2^{-k} N_{k,i} = \begin{pmatrix} k \\ (k+i)/2 \end{pmatrix} 2^{-k}, \quad i = -k, -k+2, -k+4, \cdots, k-2, k. \tag{13}$$

特に，(11) は

$$u_{2k} = \mathrm{P}_{2k}[\, W_{2k} = 0\,] = 2^{-2k} N_{2k,0} = \begin{pmatrix} 2k \\ k \end{pmatrix} 2^{-2k}. \tag{14}$$

補題 7 *(i)* $1 - \sum_{i=1}^{k} f_{2i} = \mathrm{P}_{2k}[\, W_2 \neq 0, W_4 \neq 0, \cdots, W_{2k} \neq 0\,] = \mathrm{P}_{2k}[\, W_{2k} = 0\,] = u_{2k}$.
(ii) $f_{2k} = u_{2k-2} - u_{2k} = \dfrac{1}{2k-1} u_{2k} = \dfrac{1}{2k} u_{2k-2}$.

◇

証明. (i) 最初の等号は f_{2i} の定義と，奇数歩目で 0 に戻らないことから明らか．途中で原点に戻らないから，常に正にいるか常に負にいるかどちらかで，対称性から両者の確率は等しい．従って，

$$\begin{aligned} \mathrm{P}_{2k}[\, W_1 \neq 0, \cdots, W_{2k} \neq 0\,] &= 2\mathrm{P}_{2k}[\, W_1 > 0, \cdots, W_{2k} > 0\,] \\ &= 2\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{P}_{2k}[\, W_1 > 0, \cdots, W_{2k-1} > 0, W_{2k} = 2i\,]. \end{aligned}$$

（和は $i > k$ では確率が 0 になるので実際は有限和だが，以下，和の上端の処理を書くのをさぼる.）$i < k$ のとき 0 から $2i$ への $2k$ 歩の path で，途中で 0 に戻らないものの本数は系 5 から $N_{2k-1,2i-1} - N_{2k-1,2i+1}$ に等しいから，(13) より，

$$2\mathrm{P}_{2k}[\, W_1 > 0, \cdots, W_{2k-1} > 0, W_{2k} = 2i\,] = \mathrm{P}_{2k-1}[\, W_{2k-1} = 2i-1\,] - \mathrm{P}_{2k-1}[\, W_{2k-1} = 2i+1\,]$$

（左辺の 2 は P_{2k} は path の本数を 2^{-2k} 倍するのに対して P_{2k-1} は本数を 2^{-2k+1} 倍するから）となる．以上から

$$\mathrm{P}_{2k}[\, W_1 \neq 0, \cdots, W_{2k} \neq 0\,] = \mathrm{P}_{2k}[\, W_{2k-1} = 1\,] = 2^{-2k+1} N_{2k-1,1}$$

となる．(13) から $2N_{2k-1,1} = N_{2k,0}$ なので，(14) と合わせると主張が成り立つ．
(ii) 最初の等号は上の結果から明らか．これに具体形 (14) を適用すれば残りも明らか．

□

Stirling の公式

$$k! \sim \sqrt{2\pi k}\, e^{-k} k^k$$

を (14) に用いると，簡単な計算で $k \to \infty$ における漸近形

$$u_{2k} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi k}}, \tag{15}$$

を得る.（Stirling の公式の証明は例えば [T9, vol. 1 §II.9]，[T8, §5.1] などを参照.）

1.4.3 到達時刻と再生方程式と滞在時間の arcsine 法則.

$x \in \mathbb{Z}$ に対して正値確率変数 $\tau_x:\ \Omega_k \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ を

$$\tau_x(w) = \min\{0 < i \leqq k \mid W_i(w) = x\},\quad w \in \Omega_k\,,$$

で定義する．ただし， $W_i(w) = x$ となる i が k 以下にないときは便宜上 $\tau_x(w) = \infty$ とおくことにする．τ_x は path w が初めて点 x を通る時刻を与える確率変数であり，点 x の到達時刻 (hitting time) と呼ばれる.（普通は $i = 0$ も許すが，出発点に戻る確率を議論しているので，この節 §1.4.3 では $i = 0$ を除外する.）定義から，

$$f_{2k} = \mathrm{P}_{2k}[\,\tau_0 = 2k\,]. \tag{16}$$

補題 7 によって，u_{2k} も τ_0 を用いて書くことができる．

命題 8 *(i)* $u_{2k} = \mathrm{P}_{2k}[\,\tau_0 > 2k\,]$.
(ii) $f_{2k} = \mathrm{P}_{2k}[\,\tau_1 = 2k-1\,] = \mathrm{P}_{2k}[\,\tau_{-1} = 2k-1\,] = \mathrm{P}_{2k}[\,W_i \geqq 0,\ i = 0,1,\cdots,2k-2,\ W_{2k-1} = -1\,]$.
(iii) $u_{2k} = \mathrm{P}_{2k}[\,\tau_{-1} > 2k\,] = \mathrm{P}_{2k}[\,\tau_1 > 2k\,] = \mathrm{P}_{2k}[\,W_i \geqq 0,\ i = 0,1,\cdots,2k\,]$.

◇

証明. (i) 補題 7(i) と (16) と τ_0 が正の偶数値しかとらないことから，

$$u_{2k} = 1 - \sum_{i=1}^{k} f_{2i} = 1 - \sum_{i=1}^{k} \mathrm{P}_k[\,\tau_0 = 2i\,] = \mathrm{P}_k[\,\tau_0 > 2k\,].$$

(ii) 最右辺の等号は τ_{-1} の定義と $W_0 = 0$ から明らか．$\mathrm{P}_{2k}[\,\tau_1 = 2k-1\,] = \mathrm{P}_{2k}[\,\tau_{-1} = 2k-1\,]$ は対称性から明らか．以下，$f_{2k} = \mathrm{P}_{2k}[\,\tau_1 = 2k-1\,]$ を証明する．
反射原理（命題 4）において，0 で折り返す代わりに 1 で折り返すことを考えると，0 から 2 への $2k-2$ 歩の path の本数は 0 から 0 への $2k-2$ 歩の path のうち 1 を通るものの本数に等しいことが分かる．従って

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}_{2k-2}[\,W_{2k-2} = 0\,] - \mathrm{P}_{2k-2}[\,W_{2k-2} = 2\,] = \mathrm{P}_{2k-2}[\,W_i \leqq 0,\ i = 1,2,\cdots,2k-3,\ W_{2k-2} = 0\,]\\ &= \mathrm{P}_{2k}[\,W_i \leqq 0,\ i = 1,2,\cdots,2k-3,\ W_{2k-2} = 0\,].\end{aligned}$$

一方，

$$\mathrm{P}_{2k}[\,\tau_1 = 2k-1\,] = \mathrm{P}_{2k}[\,W_i \leqq 0,\ i = 1,2,\cdots,2k-2,\ W_{2k-1} = 1\,]$$

であるが，右辺について，$W_{2k-2} \leqq 0$ かつ $W_{2k-1} = 1$ であるためには $W_{2k-2} = 0$ でないといけないから

$$\mathrm{P}_{2k}[\,\tau_1 = 2k-1\,] = \mathrm{P}_{2k}[\,W_i \leqq 0,\ i = 0,1,\cdots,2k-3,\ W_{2k-2} = 0,\ X_{2k-1} = 1\,].$$

ここで 定理 1 を使うとさらに

$$\begin{aligned}&= \mathrm{P}_{2k}[\,W_i \leqq 0,\ i = 0,1,\cdots,2k-3,\ W_{2k-2} = 0\,]\mathrm{P}_{2k}[\,X_{2k-1} = 1\,]\\ &= \frac{1}{2}\mathrm{P}_{2k}[\,W_i \leqq 0,\ i = 0,1,\cdots,2k-3,\ W_{2k-2} = 0\,].\end{aligned}$$

以上から，

$$\mathrm{P}_{2k}[\,\tau_1 = 2k-1\,] = \frac{1}{2}\mathrm{P}_{2k-2}[\,W_{2k-2} = 0\,] - \mathrm{P}_{2k-2}[\,W_{2k-2} = 2\,]$$

を得る．具体形 (13) を用いて左辺を計算すれば

$$\mathrm{P}_{2k}[\,\tau_1 = 2k-1\,] = \frac{1}{2^{2k-1}}\left(\begin{pmatrix} 2k-2 \\ k-1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2k-2 \\ k \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2k}u_{2k-2}\,.$$

補題 7(ii) から右辺はさらに f_{2k} に等しい．

(iii) 補題 7(i) と上の結果より

$$u_{2k} = 1 - \sum_{i=1}^{k} f_{2i} = 1 - \sum_{i=1}^{k} \mathrm{P}_{2k}[\, \tau_1 = 2i-1 \,] = \mathrm{P}_{2k}[\, \tau_1 > 2k \,].$$

□

補題 9 (再生方程式) $u_{2k} = \sum_{\ell=1}^{k} f_{2\ell} u_{2k-2\ell}$. ◇

証明. 定義と，path が奇数歩で出発点に戻らないことから，

$$u_{2k} = \mathrm{P}_{2k}[\, W_{2k} = 0 \,] = \sum_{\ell=1}^{k} \mathrm{P}_{2k}[\, \tau_0 = 2\ell, W_{2k} = 0 \,]. \tag{17}$$

さて，$\tau_0(w) = 2\ell$ かつ $W_{2k}(w) = 0$ を満たす path $w \in \Omega_{2k}$ に対して， 0 から 0 への 2ℓ 歩の path $w_1 \in \Omega_{2\ell}$ で出発点と到達点以外の途中で 0 を通らないものと，0 から 0 への（途中で 0 を通ってもかまわない）$2(k-\ell)$ 歩の path $w_2 \in \Omega_{2(k-\ell)}$ を，w の最初の 2ℓ 歩が w_1 と一致し， w の残り $2(k-\ell)$ 歩が（歩数を -2ℓ だけずらして数えたときに） w_2 と一致するように選べる．この対応

$$w \mapsto (w_1, w_2) \in \Omega_{2\ell} \times \Omega_{2(k-\ell)}$$

は一対一全射（そのような w_1, w_2 を持ってきてつなげば $\tau_0(w) = 2\ell$ かつ $W_{2k}(w) = 0$ を満たす $2k$ 歩の path になる）である． $2k$ 歩の path $w \in \Omega_{2k}$ 1 本あたりの確率は 2^{-2k} だが，2ℓ 歩と $2(k-\ell)$ 歩の path 1 本あたりの確率はそれぞれ $2^{-2\ell}$ および $2^{-2(k-\ell)}$ だから，

$$\mathrm{P}_{2k}[\, \tau_0 = 2\ell, W_{2k} = 0 \,] = \mathrm{P}_{2\ell}[\, \tau_0 = 2\ell \,] \mathrm{P}_{2(k-\ell)}[\, W_{2(k-\ell)} = 0 \,]. \tag{18}$$

(17), (18), (16), (11) から

$$u_{2k} = \sum_{\ell=1}^{k} f_{2\ell} u_{2k-2\ell}$$

を得る． □

定理 10 (滞在時間の arcsine 法則) $\eta_{2k}:\ \Omega_{2k} \to \mathbb{Z}_+$ を，*path* $w \in \Omega_{2k}$ が「$W_t(w) > 0$ となる時間幅」を表す確率変数とする．正確に言うと，W_i または W_{i+1} の少なくとも一方が正である i の個数，即ち，

$$\eta_{2k}(w) = \sharp\{ i \in [0, 2k) \mid W_i(w) \vee W_{i+1}(w) > 0 \}$$

とする．このとき $\mathrm{P}_k[\, \eta_{2k} = 2i \,] = u_{2i} u_{2k-2i}$, $i = 0, 1, \cdots, k$.

◇

証明. $i = 0$ のとき，即ち，$\eta_{2k} = 0$ となるのは，path が $2k$ 歩目まで一度も正の値を取らない場合だから，$\tau_1 > 2k$ と同値である．よって，命題 8(iii) から

$$\mathrm{P}_{2k}[\, \eta_{2k} = 0 \,] = \mathrm{P}_{2k}[\, \tau_1 > 2k \,] = u_{2k} = u_0 u_{2k}\,.$$

即ち， $i = 0$ のとき主張は成り立つ．対称性から $i = k$ についても主張は成り立つ．特に $k = 1$ のときは全ての i について主張が成り立つ．

$i-1$ まで主張が成り立つとする．$\eta_{2k} = 2i$ であるためには， $W_1 = 1$ ならば遅くとも $2i+1$ 歩目には path は負の部分に入る必要があり，$W_1 = -1$ ならば遅くとも $2k-2i$ 歩目には path は正の部分に入る必要がある．従って，

$$\mathrm{P}_{2k}[\, \eta_{2k} = 2i \,] = \sum_{\ell=1}^{i} \mathrm{P}_{2k}[\, W_1 = 1, \tau_0 = 2\ell, \eta_{2k} = 2i \,] + \sum_{\ell=1}^{k-i} \mathrm{P}_{2k}[\, W_1 = -1, \tau_0 = 2\ell, \eta_{2k} = 2i \,]. \tag{19}$$

さて，再生方程式 補題 9 の証明で (18) の導出に用いた議論を繰り返す．$W_1(w)=1$ かつ $\tau_0(w)=2\ell$ かつ $\eta_{2k}(w)=2i$ なる path w に対して， w の 2ℓ 歩目までを $w_1\in\Omega_{2\ell}$ とし，$2\ell+1$ 歩目以降の $2k-2\ell$ 歩分だけを取り出した path を $w_2\in\Omega_{2k-2\ell}$（τ_0 の定義から w_2 も 0 を出発点としていることに注意）とする対応

$$w\mapsto(w_1,w_2)\in\Omega_{2\ell}\times\Omega_{2k-2\ell}$$

を考えると，この対応は

$$\{w\in\Omega_{2k}\mid W_1(w)=1,\ \tau_0(w)=2\ell,\ \eta_{2k}(w)=2i\}$$

から

$$\{w_1\in\Omega_{2\ell}\mid W_1(w_1)=1,\ \tau_0(w_1)=2\ell\}\times\{w_2\in\Omega_{2k-2\ell}\mid \eta_{2k-2\ell}(w_2)=2i-2\ell\}$$

への一対一全射対応を与えていることが分かる．w_2 が $\eta_{2k-2\ell}(w_2)=2i-2\ell$ となるのは， w_1 が正のところを 2ℓ 歩の間たどっており， w 全体では η_{2k} の定義から $2i$ 歩の間正のところをたどるので，差し引き $2i-2\ell$ 歩が w_2 が正のところにいる時間だからである．このことから，

$$\mathrm{P}_{2k}[\,W_1=1,\tau_0=2\ell,\eta_{2k}=2i\,]=\mathrm{P}_{2\ell}[\,W_1=1,\tau_0=2\ell\,]\mathrm{P}_{2i-2\ell}[\,\eta_{2k-2\ell}=2i-2\ell\,]. \tag{20}$$

2 項目についても同様に考えれば

$$\mathrm{P}_{2k}[\,W_1=-1,\tau_0=2\ell,\eta_{2k}=2i\,]=\mathrm{P}_{2\ell}[\,W_1=-1,\tau_0=2\ell\,]\mathrm{P}_{2i}[\,\eta_{2k-2\ell}=2i\,]. \tag{21}$$

(20), (21) を (19) に代入し，対称性と (16) から

$$\mathrm{P}_{2\ell}[\,W_1=1,\tau_0=2\ell\,]=\mathrm{P}_{2\ell}[\,W_1=-1,\tau_0=2\ell\,]=\frac{1}{2}f_{2\ell}$$

となることに注意して，帰納法の仮定と 補題 9 を順に用いると

$$\mathrm{P}_{2k}[\,\eta_{2k}=2i\,]=\frac{1}{2}u_{2k-2i}\sum_{\ell=1}^{i}f_{2\ell}u_{2i-2\ell}+\frac{1}{2}u_{2i}\sum_{\ell=1}^{k-i}f_{2\ell}u_{2k-2i-2\ell}=u_{2i}u_{2k-2i}$$

となって， i のときも主張が成り立つ． □

Arcsine 法則という命名は漸近形の分布の密度関数の形に由来する．

定理 11 $0<a<b<1$ ならば

$$\lim_{k\to\infty}\mathrm{P}_k[\,a\leqq\frac{\eta_{2k}}{2k}\leqq b\,]=\frac{2}{\pi}\arcsin y\Big|_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}}.$$

即ち， $\eta_{2k}/(2k)$ は分布関数 $\mu([0,x])=\dfrac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{x}$ なる $[0,1]$ 上の分布に法則収束する． ◇

証明. 定理 10 に (15) を用いて左辺で変数変換 $x=y^2$ も行うと，

$$\lim_{k\to\infty}\mathrm{P}_k[\,a\leqq\frac{\eta_{2k}}{2k}\leqq b\,]=\frac{1}{\pi}\int_a^b\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}=\frac{2}{\pi}\int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}}\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}.$$

これより主張を得る． □

Path は 1 歩ごとに右に行くのも左に行くのも自由であり，実際 k 歩目の位置の期待値 $\mathrm{E}_k[\,W_k\,]=0$ であるが，定理 11 の分布密度は $x=0$ と $x=1$ で発散する．即ち，原点をはさんで正の側にばかりいる path や負の側にばかりいる path が（均等に行ったり来たりする path に比べて）多いことを表している．（Sample path の実例に基づく詳しい説明が [T9, vol. 1 §III.6] にある．）このように「平均的には原点が中心」ということと「分布が正または負に偏る」ということが共存しているのが「典型的な path」の一つの奇妙な姿である．

2　$\mathbb{Z}$ 上の単純ランダムウォーク.

ランダムウォークは独立同分布確率変数列の和と定義されるのが標準的である．その中で単純ランダムウォークと呼ばれるもっとも単純なもの（§2.1.2）は，§1 で議論した有限歩数の path 集合上の確率測度の（歩数についての）列と整合する無限長さの path の集合上の確率測度という見方もできる．そこで，§2.1.1 では $\mathbb{Z}$ 上の単純ランダムウォークを §1 とのつながりを意識しながら定義する．この対応は測度の拡張定理と呼ばれるルベーグ積分論の基礎事項を必要とする．無限長さの path 集合の上の確率測度を扱うためには測度論（ルベーグ積分論）は不可避である．

§2.2 と §2.3 は大数の法則と重複対数の法則という，1 本の path 毎の漸近的性質でもっとも有名なものについて紹介する．

2.1　単純ランダムウォーク.

§1 では有限長さの path 上の確率測度だけを考えた．Path の種々の性質について歩数無限の極限 $k\to\infty$ を調べているが，全て各 k 毎に期待値をとったあとで極限をとっている．(Ω_k,P_k) という，有限長さの path の集合とその上の確率測度たちしか用意していないので，先に歩数を決めて，その歩数までの path の形状について議論しするしかない．極限を議論できるのはいろんな path について平均したあとになる．裏返して言うと，§1 では 1 本の path の行く先をずっと眺めたときに，極限でどうなるかについては何も言えない．

他方，例えば，目的地めがけて最短で進む path に対して成り立つ (7) は，1 本の path が $k\to\infty$ でどうなるかを論じている．この類推で,「典型的な path」w に対して k 歩目の位置 $W_k(w)$ が $k^{1/2}$ という k 依存性を持つことをたとえば $\displaystyle\lim_{k\to\infty}\frac{W_k(w)}{\sqrt{k}}$ が各 w ごとにどうなるかという問として論じたいが，どんなに大きな k' を持ってきても，それより大きい k を見なければ極限は分からないので，§1 で用意した有限長さの path の確率空間 $(\Omega_{k'},\mathrm{P}_{k'})$ では $\displaystyle\lim_{k\to\infty}\frac{W_k(w)}{\sqrt{k}}$ に関する確率を議論することができない．結論を先取りすると,「典型的な path」に対しては $\displaystyle\lim_{k\to\infty}\frac{W_k(w)}{\sqrt{k}}$ なる極限は存在しない．定理 18 でみるように $\displaystyle\varlimsup_{k\to\infty}$ を考える必要があり，また，分母も $\sqrt{k}$ からずれる．そういうことを議論するためには無限長さの path の集合上の確率空間を用意する必要がある．この節 §2.1 はそのような確率空間を，§1 の有限長さの path の確率空間との関係に注意しながら用意する．

2.1.1　無限長の path の集合上の分布としての単純ランダムウォーク.

§1 で用意した k 歩の path の確率空間 (Ω_k,P_k) に関して，異なる k の間の次の関係に注意する．$k\in\mathbb{N}$ とする．原点を出発する $k+1$ 歩の path $w'=(w'(0),w'(1),\cdots,w'(k+1))\in\Omega_{k+1}$ に対して，その最初の k 歩だけをとれば，当然，原点を出発する k 歩の path を得る．この対応を $\pi_{k+1,k}:\ \Omega_{k+1}\to\Omega_k$ と書く：

$$\pi_{k+1,k}(w')=(w'(0),w'(1),\cdots,w'(k))\in\Omega_k\,.$$

（この対応は 2 : 1 写像なので，逆関数はないが,）逆像 $\pi_{k+1,k}^{-1}$ を $A\subset\Omega_k$ に対して

$$\pi_{k+1,k}^{-1}(A)=\{w'\in\Omega_{k+1}\mid \pi_{k+1,k}(w')\in A\}\subset\Omega_{k+1}\,,$$

によって定義する．

命題 12 $\mathrm{P}_{k+1}[\,\pi_{k+1,k}^{-1}(A)\,]=\mathrm{P}_k[\,A\,]$, $A\subset\Omega_k$, が全ての $k=0,1,2,\cdots$ に対して成り立つ． ◇

証明. P_k は全ての k で有限加法性を持つので，A が長さ k の 1 本の path w からなるときに証明すれば十分である．$\pi_{k+1,k}^{-1}(\{w\})$ は最初の k 歩が w に一致するような $k+1$ 歩の path なので $k+1$ 歩目が右か左への 1 歩の 2 通りしかない．よってその確率は（1 本あたり 2^{-k-1} なので）

$$\mathrm{P}_{k+1}[\,\pi_{k+1,k}^{-1}(\{w\})\,]=2^{-k-1}\times 2=2^{-k}.$$

これは 1 本の k 歩の path の確率 $\mathrm{P}_k[\,\{w\}\,]$ に一致する． □

確率空間の列 (Ω_k, P_k) に対する命題 12 のような関係式（整合条件と呼ばれる）があるとき,「親玉」となる確率空間，今の場合で言えば無限長さの path の集合 Ω （§1.1 で定義した，(3) と $w(0) = 0$ を満たす $w:\ \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}$ の集合），の上の確率測度 P_∞ が存在することが，測度論の一般論から分かっている.「親玉」と書いたのは， $\pi_{k+1,k}$ の類推で，無限長さの path の最初の k 歩までを見ることで長さ k の path を対応させる写像を

$$\pi_{\infty,k}:\ \Omega \ni w = (w(0), w(1), \cdots) \mapsto (w(0), \cdots, w(k)) \in \Omega_k \tag{22}$$

とおくとき， 命題 12 の類推，つまり，

$$\mathrm{P}_\infty[\,\pi_{\infty,k}^{-1}(A)\,] = \mathrm{P}_k[\,A\,],\ \ A \subset \Omega_k\,,\ k = 0, 1, 2, \cdots, \tag{23}$$

が成り立つ，という意味である．右辺の A は k 歩の path をいくつか集めた集合，左辺の $\pi_{\infty,k}^{-1}(A)$ は最初の k 歩部分が A に入っているような無限長さの path を集めた集合だから，最初の k 歩を決めた無限長さの path の集合の P_∞ による確率がその k 歩部分についての P_k による確率に等しい確率測度という意味である．

測度論からの結論を要約する．まず，(23) を満たす P_∞ は全ての集合 $A \subset \Omega$ に対して値が定まる保証はない．(23) を満たすことを優先させるので，測度を定義できない集合，すなわちどう値を決めても矛盾を起こす集合，があると覚悟する方がすなおである．そこで，確率測度 P_∞ の定義域，すなわち，$\mathrm{P}_\infty[\,A\,]$ という値が存在することが保証されている集合 $A \subset \Omega$ たちを集めた集合（集合の集合という意味で集合族と呼ぶ）を $\mathcal{F}$ と書いて，$(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}_\infty)$ の 3 つ組を明記して確率空間と呼ぶ．§1 の有限長さの path の集合上の確率測度 P_k は Ω_k の任意の部分集合 A に対して $\mathrm{P}_k[\,A\,]$ が存在したため，$\mathcal{F}$ をわざわざ明記する必要がなかった.（Ω_k の全ての部分集合を集めた集合族を 2^{Ω_k} と書くことにすれば，§1 で用意した確率空間 (Ω_k, P_k) は，$(\Omega_k, 2^{\Omega_k}, \mathrm{P}_k)$ と書くことになる.）

$\mathcal{F}$ は，$\pi_{\infty,k}^{-1}(A)$ の形の集合を全て集めた集合族

$$\mathcal{A} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \{\pi_{\infty,k}^{-1}(A) \mid A \subset \Omega_k\} \tag{24}$$

を含む最小の σ 加法族に選ぶのが適当であることが分かっている．((23) を満たすためには，$\mathrm{P}_\infty[\,A\,]$ は $\pi_{\infty,k}^{-1}(A)$, $A \subset \Omega_k$, という形の集合に対して定義されている必要があるが，そのような確率測度は自動的に $\mathcal{F}$ の上で定義されている必要があるので，$\mathcal{F}$ より小さな定義域から始めることはできない.）

次のことが知られている．

定理 13 原点を出発する無限長さの *path* の集合 Ω 上の確率測度 P_∞ で，*(23)* を満たすものが存在する．そのような P_∞ は *(24)* を含む最小の σ 加法族 $\mathcal{F}$ の上で一意的に定まる.（即ち， *(23)* を満たす別の確率測度 P' があるならば全ての $A \in \mathcal{F}$ に対して $\mathrm{P}'[\,A\,] = \mathrm{P}_\infty[\,A\,]$ となる． ◇

無限長 path の上の確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}_\infty)$ においても確率変数 X_i（i 歩目の path の動き）および W_i （i 歩目の path の位置）の定義は §1.2 と同様である．

一般に，無限長 path の集合上の確率測度であって有限歩で決まる集合を全て定義域に含んでいるものを確率連鎖と呼ぶ．確率連鎖があれば，$i \in \mathbb{Z}_+$ に対して i 歩目の位置を表す確率変数 $W_i:\ \Omega \to \mathbb{Z}$ が存在するが，$(W_0(w), W_1(w), W_2(w), \cdots) = w$ だから，確率変数列 $W_0, W_1, W_2, \cdots$ は確率連鎖を定める.（一般的には確率連鎖と言うときは無限長であること，すなわち，確率変数列 $W_0, W_1, W_2, \cdots$ ということ以上の制約はないが，ここでは確率連鎖というとき，sample がここで言う path，即ち，各時刻で隣の点に移るもののみを考える.）

定理 13 が与える確率連鎖 P_∞ は (23) と (4) から，最初の k 歩が $(w(0), w(1), w(2), \cdots, w(k)) \in \Omega_k$ に等しい無限長 path の集合 $\pi_{\infty,k}^{-1}(\{(w(0), w(1), w(2), \cdots, w(k))\})$ の確率は最初の k 歩の path の形に無関係に

$$\mathrm{P}_\infty[\,\pi_{\infty,k}^{-1}(\{(w(0), w(1), w(2), \cdots, w(k))\})\,] = 2^{-k}$$

となる．つまり， P_∞ は有限歩を見る限り一様分布である．この確率連鎖を $\mathbb{Z}$ 上の単純ランダムウォークと呼ぶ．次節 §2.1.2 でこの言葉の語感に沿った書き方を導入する．

小さな注意だが，任意の path $w=(w(0),w(1),w(2),\cdots)\in\Omega$ に対して

$$\mathrm{P}_\infty[\,\{w\}\,]=0 \tag{25}$$

となる．これは，各 $k\in\mathbb{Z}_+$ に対して (23) において $A=\{\pi_{\infty,k}(w)\}=\{(w(0),w(1),w(2),\cdots,w(k))\}\subset\Omega_k$ とおくことで，(4) とあわせると

$$\mathrm{P}_\infty[\,\{w\}\,]\leqq \mathrm{P}_k[\,\{(w(0),w(1),w(2),\cdots,w(k))\}\,]=2^{-k}$$

が任意の $k\in\mathbb{Z}_+$ に対して成り立つことが分かる．こうして一本の無限長 path を見ても P_∞ の性質は分からないが，有限歩に限れば一様分布であることが分かる．

この節では k 歩の path の集合上の確率測度の k に関する列から整合条件（命題 12）に基づいて確率連鎖を構成した（存在を証明した）が，逆に確率連鎖があるとその k 歩目まで $(W_0,W_1,W_2,\cdots,W_k)$ を考えることで（言い換えると，$W_0,W_1,W_2,\cdots,W_k$ の結合分布 $\mathrm{P}_\infty\circ(W_0,W_1,W_2,\cdots,W_k)^{-1}$ を考えることで）k 歩の path の集合上の確率測度が定まり，整合条件（命題 12）を満たす．ここで，$\mathrm{P}_\infty\circ(W_0,W_1,W_2,\cdots,W_k)^{-1}$ は，Ω_k 上の確率測度で，

$$\mathrm{P}_\infty\circ(W_0,W_1,W_2,\cdots,W_k)^{-1}[\{w\}]=\mathrm{P}_\infty[\,\{w'\in\Omega\mid(W_0(w'),W_1(w'),W_2(w'),\cdots,W_k(w'))\}\,],\quad w\in\Omega_k,$$

によって定義される．

単純ランダムウォークでは，整合条件 (23) と (4) から

$$\mathrm{P}_\infty\circ(W_0,W_1,W_2,\cdots,W_k)^{-1}[\{w\}]=2^{-k},\quad w\in\Omega_k,$$

となる．

一般に各 $k\in\mathbb{Z}_+$ に対して Ω_k 上の確率空間が与えられているとき，ここだけの用語として path 上の確率が定義されている，ということにする．path 上の確率が整合条件を満たしていなければ，対応する確率連鎖は存在しないが，§1 で見たように，変位の指数を含む期待値や分布の意味での長い path の漸近的な性質を議論できる.（たとえば self-avoiding path 上の一様分布は整合条件を満たさない.）従って，self-avoiding path と単純ランダムウォークを統一的に眺めるときは path 上の確率が適当である．他方，単純ランダムウォークの特徴的な性質は確率連鎖としての見方のほうが把握しやすい．通常は単純ランダムウォークは確率連鎖として導入する．

2.1.2 独立同分布確率変数列の和としての単純ランダムウォーク.

$\mathbb{Z}$ 上の単純ランダムウォーク $(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P}_\infty)$ の i 歩目の動きを表す確率変数 $X_i=W_i-W_{i-1}$ $(i\in\mathbb{N})$ について，確率変数の独立性を調べる．

Path の定義（1 歩につき左右どちらかにしか動かないこと）から X_i は ±1 のどちらかの値しか取らないので，確率変数の独立性の条件はきわめて簡単になる．すなわち，$X_1,X_2,X_3,\cdots$ が独立であることと任意の有限個の添字 $i_1<i_2<\cdots<i_k$ に対して

$$\mathrm{P}_\infty[\,X_{i_1}=1,X_{i_2}=1,\cdots,X_{i_k}=1\,]=\prod_{j=1}^{k}\mathrm{P}_\infty[\,X_{i_j}=1\,] \tag{26}$$

が成り立つことは同値である（その証明は簡単な練習問題である）．左辺は事象

$$C=\{w\in\Omega\mid X_{i_1}(w)=1,X_{i_2}(w)=1,\cdots,X_{i_k}(w)=1\}$$

の P_∞ に関する確率を表す約束であった．

定理 14 *$\mathbb{Z}$ 上の単純ランダムウォーク，すなわち，定理 13 で与えられた無限長 path 集合上の確率測度 $(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P}_\infty)$ の上の i 歩目の動きを表す確率変数 $X_i:\ \Omega\to\{\pm1\}$ $(i\in\mathbb{N})$ に対して，(26) および*

$$\mathrm{P}_\infty[\,X_i=1\,]=\mathrm{P}_\infty[\,X_i=-1\,]=\frac{1}{2},\quad i=1,2,\cdots, \tag{27}$$

が成り立つ.

◇

注 2 *(27)* は単純ランダムウォークが 1 歩毎に等確率で左右に動くことを意味する．上に注意したように定理の主張は単純ランダムウォークに対して $X_i,\ i\in\mathbb{N},$ の独立性を意味する． ◇

証明. (26) でいちばん大きい添字は i_k なので，i_k 歩の path の集合 Ω_{i_k} の部分集合

$$A=\{w'\in\Omega_{i_k}\mid X_{i_1}(w')=1, X_{i_2}(w')=1,\cdots,X_{i_k}(w')=1\}$$

を用いて $C=\pi^{-1}_{\infty,i_k}(A)$ と書くことができる．よって，整合条件 (23) から

$$\mathrm{P}_\infty[\,C\,]=\mathrm{P}_{i_k}[\,A\,]$$

を得る.（細かいことだが，たとえば (26) の中の X_i は Ω 上の関数なのに対して上の X_i は Ω_{i_k} 上の関数である．ただし，どちらもそれぞれの path の i 歩目の動きを表すので，整合条件 (23) から，上の式が成り立つ．元々そのことを見越して異なる関数に同じ記号を用いた．以下，この種の細かい注意を省略する.）
ここで，有限長さの path の結果（定理 1）を（k を i_k におきかえ， $j=i_k$, を初め，適宜添字をつけなおた上で $f_{i_k}(x)=\delta_{x,1}$ および $g_{i_k}(x_{i_1},\cdots,x_{i_{k-1}})=\delta_{x_{i_1},1}\,\delta_{x_{i_2},1}\,\cdots\,\delta_{x_{i_{k-1}},1}$ として）使うと，

$$\begin{aligned}\mathrm{P}_{i_k}[\,A\,]&=\mathrm{P}_{i_k}[\,X_{i_1}=X_{i_2}=\cdots=X_{i_k}=1\,]=\mathrm{E}_{i_k}[\,\delta_{X_{i_1},1}\,\delta_{X_{i_2},1}\,\cdots\,\delta_{X_{i_k},1}\,]\\&=\mathrm{E}_{i_k}[\,\delta_{X_{i_1},1}\,\delta_{X_{i_2},1}\,\cdots\,\delta_{X_{i_{k-1}},1}\,]\,\mathrm{E}_{i_k}[\,\delta_{X_{i_k},1}\,]=\mathrm{E}_{i_k}[\,\delta_{X_{i_1},1}\,\delta_{X_{i_2},1}\,\cdots\,\delta_{X_{i_{k-1}},1}\,]\,\mathrm{P}_k[\,X_{i_k}=1\,]\end{aligned}$$

となって，以下帰納的に

$$\mathrm{P}_{i_k}[\,A\,]=\prod_{j=1}^{k}\mathrm{P}_{i_k}[\,X_{i_j}=1\,]$$

に至るが， $\mathrm{P}_\infty[\,C\,]=\mathrm{P}_k[\,A\,]$ と同様の理由で

$$\mathrm{P}_{i_k}[\,X_{i_j}=1\,]=\mathrm{P}_\infty[\,X_{i_j}=1\,]$$

であることから (26) が成り立つ．
(27) も 定理 1 から同様の議論で得られる． □

単純ランダムウォークを，有限歩の path 上の一様分布を無限長に拡張した確率測度として導入したが，i 歩目を表す確率変数 X_i たちが独立で (27) という同一の分布に従うことが分かった．このことを，通常，確率変数列 $X_i,\ i\in\mathbb{N},$ が独立同分布である (independent, identically distributed) と言い，i.i.d. と略記する．
ところで，path の集合とは限らないある確率空間 $(\Omega',\mathcal{G},\mathrm{P})$ と，その上の確率変数の列で ±1 に値をとるもの $X_i:\ \Omega'\to\{\pm1\},\ i\in\mathbb{N},$ があって，(26) と (27) が成り立っているとする．すなわち， $X_i,\ i\in\mathbb{N},$ は独立同分布確率変数列で，取りうる 2 つの値 ±1 を等確率 $\dfrac{1}{2}$ ずつでとるとする．X_i たちの和

$$W_k=\sum_{i=1}^{k}X_i\,,\ k=1,2,3,\cdots,\quad W_0=0, \tag{28}$$

によって $W_i:\ \Omega'\to\mathbb{Z},\ i\in\mathbb{Z}_+,$ を定義し，その結合分布 $\mathrm{P}\circ(W_1,W_2,\cdots)^{-1}$ を考える．

定理 15 $\mathrm{P}\circ(W_1,W_2,\cdots)^{-1}$ は原点を出発する $\mathbb{Z}$ 上の無限長 *path* の集合 Ω の上の確率測度で，その定義域は 定理 *13* の $\mathcal{F}$ を含み，かつその上で $\mathrm{P}\circ(W_1,W_2,\cdots)^{-1}=\mathrm{P}_\infty$ を満たす． ◇

証明. 確率測度と確率変数の定義から像測度は確率測度になり，特にその定義域は σ 加法族になる．また，最初の有限歩で定まる無限長の path の集合（ある $A\subset\Omega_k$ によって $\pi^{-1}_{\infty,k}(A)$ と書ける集合）は定義域に含まれる．よってその定義域は 定理 13 の $\mathcal{F}$ を含む．定理 13 の一意性から，最初の有限歩で定まる無限長の path の集合の上で $\mathrm{P}\circ(W_1,W_2,\cdots)^{-1}$ と P_∞ が等しいことを言えば十分であるが，それは， 定理 1 や 定理 14 の証明の議論と同様に定義に戻ればよい． □

定理 14 と 定理 15 によって，§2.1.1 で無限長 path 上の確率測度として定義した単純ランダムウォークは，本質的に，± 1 を等確率でとる独立同分布確率変数列の和の列 $W_k,\ k \in \mathbb{Z}_+$, と同値であることが分かった．単純ランダムウォークというときは後者を定義とするのが普通である．後者の定義は，直感的には，公平な硬貨を投げて表が出れば $+1$，裏が出れば -1，それぞれコマを進める，という規則のすごろくで， k 回目の動きの後のコマの位置を W_k で表す，ということを意味する．それが k 歩目までの path の一様分布と同じ確率を与えるというのが定理 14 と 定理 15 の結論である．

後者の定義では確率変数列 $W_k,\ k \in \mathbb{Z}_+$ がどのような確率空間 $(\Omega', \mathcal{G}, \mathrm{P})$ の上にあるかは全く関係ない．指定された性質（増分が独立同分布で ± 1 を等確率でとる）を持つ確率変数列がとれるほど大きければ何でもよい（そのような確率空間が存在することは単純ランダムウォークの前者の定義から明らか）．こうして，確率空間を指定してその中の事象の確率を論じることと，確率空間を指定せず確率変数を指定してそれで書かれた事象の確率を論じることは同じ能力を持っていることが（少なくとも path 上の確率や確率連鎖の問題に関しては）分かる．このような 2 種類の書き方の行き来は確率論では（確率連鎖の問題に限らず）ごく普通に行われることである．

§2.1.1 で path 上の確率測度（であって，有限歩で決まる集合を全て定義域に含むもの）として確率連鎖を定義したが，以上の議論から，可算無限個（無限個だが非負自然数で番号づけることができるとき可算無限と言う．実数の集合は番号づけられないので非可算無限集合である）の確率変数列 $W_k,\ k \in \mathbb{Z}_+$, を確率連鎖と呼んでもよい．（以後両者を区別しない．）k を時刻あるいは歩数，W_k たちの値域を状態空間と言う．$\mathbb{Z}$ 上の単純ランダムウォークは $\mathbb{Z}$ を状態空間とする確率連鎖である．$\mathbb{Z}$ 上の確率連鎖には単純ランダムウォーク以外にも非常にたくさんのものがある．

2.2 大数の法則．

中心極限定理が確率変数の弱収束についてのもっとも有名な基本定理だとすると，確率変数の概収束についてのおそらくもっとも有名な基本定理が大数の法則だろう．

$\mathbb{Z}$ 上の原点から出発する単純ランダムウォーク $W_k,\ k \in \mathbb{Z}$,（または，無限長 path 空間 Ω 上の確率測度 P_∞）に対しては，X_1 が ± 1 の値しか取らないので $\mathrm{E}[\,X_1^4\,] = 1 < \infty$ だから，次が成り立つ．

命題 16 $\mathbb{Z}$ 上の原点から出発する単純ランダムウォーク $W_k,\ k \in \mathbb{N}$ に対して，$\displaystyle\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} W_k = 0$, *a.e.,* が成り立つ． $\diamond$

ここで「a.e.」は，ほとんど全ての $w \in \Omega$ に対して，と読み，たとえば $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} W_k = 0$, a.e., とは，

$$\mathrm{P}[\,\{w \in \Omega \mid \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} W_k(w) = 0\}\,] = 1,$$

を意味する．すなわち，問題になっている事象が成り立つ確率が 1 である（成り立たない確率が 0 である）ことを表す．

$\dfrac{1}{\sqrt{k}} W_k$ の P_∞ の下での分布は $k \to \infty$ のとき平均 0，分散 1 の正規分布 $N(0,1)$ に弱収束する（中心極限定理）．$\dfrac{1}{k} W_k$ はさらに $\sqrt{k}$ で割っているので，0 に集中した単位分布に弱収束することは既に分かっている．もちろん弱収束は，1 歩ごとに全ての path を見渡してその分布を取りながら極限を取るのに対して，大数の法則は概収束，すなわち 1 本の path ごとに極限を見ているので，中心極限定理のほうが $\sqrt{k}$ という（k に比べて）精密な情報（指数）を与えているからといって，中心極限定理から大数の法則が得られるのではない．別途証明すべきものである．

単純ランダムウォークにおける大数の法則の精密化，すなわち，概収束に関して「正しい指数」$k^{1/2}$ を持つ定理は次節 §2.3 で紹介する重複対数の法則である．

2.3 重複対数の法則.

重複対数の法則も古くから知られている単純ランダムウォークの漸近的性質である [T9, vol. 1 §VIII.5], [T4, §7.9]. 中心極限定理から期待される path の漸近的振る舞いは

$$W_k \fallingdotseq k^{1/2} \quad (?)$$

なので，大数の法則（命題 16）が保証する

$$W_k = o(k),\ a.e.,$$

とは指数に $\dfrac{1}{2}$ の開きがある.

次のことが知られている.

命題 17 $\epsilon > 0$ ならば

$$\lim_{k\to\infty} \frac{W_k}{k^{1/2+\epsilon}} = 0,\ a.e..$$

◇

([T1, §1.3] を参照. 以下の議論に用いないのでここでは証明は略す. なお，定理 18 から 命題 17 が得られることは明らか.)

単純ランダムウォークの k 歩目の位置 W_k の概収束についての評価（命題 17）において,「$\epsilon \to 0$」に相当するぎりぎりの精密な評価は，重複対数の法則として知られる.

定理 18 (重複対数の法則) $\mathbb{Z}$ 上の単純ランダムウォーク W_k, $k \in \mathbb{Z}_+$, に対して次が成り立つ.

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{W_k}{\sqrt{k \log\log k}} = 1, \quad a.e..$$

◇

注 3 *(i)* 大数の法則 命題 *16* などでは極限が存在するので主張が lim を用いて書かれていたが，重複対数の法則では $\overline{\lim}$ に関する主張である. これは，符号に関する対称性から

$$\underline{\lim_{k\to\infty}} \frac{W_k}{\sqrt{k \log\log k}} = -\overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{W_k}{\sqrt{k \log\log k}}$$

となる（しかも 0 でない）ので，極限 lim が存在しないからである.

(ii)（大数の法則からも想像できるし，すごろくや賭事の直感からはなおさら明らかだろうが） W_k は正の値も負の値も無限回とる（*path* の言葉で言えば出発点 0 に無限回戻る）ので，W_k の絶対値の下極限は $\underline{\lim_{k\to\infty}} |W_k| = 0$ となる. 特に，極限 $\lim_{k\to\infty} \dfrac{|W_k|}{\sqrt{k \log\log k}}$ も存在しない.

(iii) 中心極限定理から示唆される指数 $k^{1/2}$ に比べて，重複対数の法則は名前通り $(\log\log k)^{1/2}$ のずれがある. これは指数がずれていると理解するべきではなく，指数 1/2 で正規分布に収束する原因となる *path* のぎざぎざな動きそのものが $k^{1/2}$ の回りの揺らぎを生むためと理解するのが妥当である.

(iv) 今日ではまずブラウン運動について重複対数の法則を証明し，また，単純ランダムウォークはブラウン運動に近いこと *(almost sure invariance principle)* を言うことで単純ランダムウォークの重複対数の法則を証明するのが常道のようである *[T4, §7.9]*. これは連続極限では自己相似性が正確に成り立つことから必要な評価が弱くてすむからだろう（これに対して確率連鎖では 1 歩より細かい構造はないので厳密な自己相似性はあり得ない）.

◇

定理 18 は，上からの評価

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{W_k}{\sqrt{k \log\log k}} \leqq C_+\,,\ a.e., \tag{29}$$

と下からの評価

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{W_k}{\sqrt{k \log\log k}} \geqq C_-\,,\ a.e., \tag{30}$$

が $C_+ = C_- = 1$ で成り立つことと同値である．$\mathbb{Z}$ 上の単純ランダムウォークに対する 定理 18 の証明は，たとえば [T9, §VIII.5] を参照していただきたい．また，マルコフ性を持たない確率連鎖に対しても通用する新しい証明方法は [T0] を参照して頂きたい．ここではそれぞれの評価の直感的意味を以下に要約するにとどめる．

下からの評価． 重複対数の法則は広くマルコフ過程全体に対して成り立つことが古くから知られていたが，伝統的な証明は全て下からの評価 (30) の証明においてマルコフ性を本質的に利用している．たとえば [T9, §VIII.5] の証明では，ボレル・カンテリの第 2 定理を用いて，単純ランダムウォークではドモアブルーラプラスの中心極限定理から得られる評価と組み合わせる．

しかし，下からの評価は「平均的な path の動き」から無限回はみ出すこと（全ての時刻を監視する必要はない），平たく言えば path がぎざぎざしていること，が本質である．逆に言えばマルコフ性は本質ではないはずである．実際，くりこみ群の視点，即ち，細かい構造の繰り返し（大小あらゆるスケールのぎざぎざが存在すること）に基づく証明が可能であり，この証明はマルコフ性を持たない確率連鎖にも適用可能である [T0].

上からの評価． 上からの評価 (29) の意味は，path が平均的な動きに比べて遠くに飛びすぎないことを表す（ただし，下からの評価と対照的に有限個の時刻を除いて全ての時刻で監視する必要がある）．ここで考える確率連鎖は sample が本書で言う path，すなわち 1 歩毎に隣の点に移るので 1 歩で遠くへ飛ばない．マルコフ性は本質ではないし，既存の証明も，無条件に成り立つボレル・カンテリの第 1 定理を用いる．これをマルコフ連鎖以外に拡張することも可能である [T0].

3 $\mathbb{Z}^n$ 上の単純ランダムウォークの変位の指数．

$n = 1$ の場合に §1.3 で調べた変位の指数を一般の $\mathbb{Z}^n$ 上の単純ランダムウォークについて調べよう．(§1.3 では有限長さの path の集合上の一様分布しか用意してなかったので P_k で計算したが，単純ランダムウォーク P_∞ で計算しても同じことである.）結論は，(8) が成り立つ，すなわち，変位の指数は n に無関係に 1/2 である．ここでは 命題 3 に相当する内容，つまり，ℓ が自然数のときの $\mathrm{E}[\,(W_k^2)^\ell\,]$ を導く．

定理 19 $\mathbb{Z}^n$ 上の単純ランダムウォーク $W_k: \Omega \to \mathbb{Z}^n,\ k \in \mathbb{Z}_+,$ について，任意の自然数 ℓ に対して n と ℓ だけで決まる定数 $C_{n,\ell} > 0$ が存在して，

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\mathrm{E}[\,|W_k|^{2\ell}\,]}{k^\ell} = C_{n,\ell}\,.$$

（ここで $W_k = (W_{k1}, \cdots, W_{kd}) \in \mathbb{Z}^n$ のノルムを $|W_k|^2 = \sum_{i=1}^n W_{ki}^2$ と書いた.） ◇

証明． $\ell = 1$ のとき，整合性条件に従って有限歩の期待値 E_k に直してからマルコフ性を用いる [T0, §3]．点 x の隣の $2n$ 個のいずれかの点 y に移る確率が $\mathrm{P}_{k+1}[\,W_{k+1} = y \mid W_k = x\,] = (2n)^{-1}$ であるが，$\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ の中で各 $i = 1, \cdots, n$ に対する i 軸方向の単位ベクトルを e_i とする ($|e_i|^2 = 1$) と，x の隣の点は $x \pm e_i$ と書ける．W_k は $\mathbb{Z}^n$ のいずれかの点にあること，すなわち，

$$\bigcup_{x\in\mathbb{Z}^n} \{w \in \Omega \mid W_k(w) = x\} = \Omega$$

という単純な事実にも注意すると,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[\,|W_{k+1}|^2\,] &= \sum_{y\in\mathbb{Z}^n} |y|^2 \mathrm{P}_{k+1}[\,W_{k+1}=y\,] \\
&= \sum_{y\in\mathbb{Z}^n} |y|^2 \sum_{x\in\mathbb{Z}^n} \mathrm{P}_{k+1}[\,W_{k+1}=y \mid W_k=x\,]\mathrm{P}_k[\,W_k=x\,] \\
&= \frac{1}{2n}\sum_{\pm}\sum_{i=1}^{n}\sum_{x\in\mathbb{Z}^n} |x\pm e_i|^2 \mathrm{P}_k[\,W_k=x\,] \\
&= \sum_{x\in\mathbb{Z}^n} (|x|^2+1)\mathrm{P}_k[\,W_k=x\,] = \mathrm{E}[\,|W_k|^2\,]+1, \quad k\in\mathbb{Z}_+.
\end{aligned}
$$

$W_0=0$ だから, k についての漸化式を解いて $\mathrm{E}[\,|W_k|^2\,]=k$ を得る.

$\ell \geqq 2$ のときも同様の計算で漸化式を得る.たとえば $\ell=2$ のとき,

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}[\,|W_{k+1}|^4\,] = \frac{1}{2n}\sum_{\pm}\sum_{i=1}^{n}\sum_{x\in\mathbb{Z}^n} |x\pm e_i|^4 \mathrm{P}_k[\,W_k=x\,] \\
&= \sum_{x\in\mathbb{Z}^n} (|x|^4+(2+\frac{4}{n})|x|^2+1)\mathrm{P}_k[\,W_k=x\,] = \mathrm{E}[\,|W_k|^4\,]+(2+\frac{4}{n})\mathrm{E}[\,|W_k|^2\,]+1, \quad k\in\mathbb{Z}_+.
\end{aligned}
$$

($\ell=1$ のときの計算に比べて新たに加わった変形は $x\in\mathbb{Z}^n$ に対して

$$
\sum_{i=1}^{n}(x\cdot e_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = |x|^2
$$

となることだけである.) $\ell=1$ のときに得られた $\mathrm{E}[\,|W_k|^2\,]=k$ を代入して $\mathrm{E}[\,|W_k|^4\,]$ に関する漸化式を解けば,

$$
\mathrm{E}[\,|W_k|^4\,] = (1+\frac{2}{n})\,k^2 - \frac{2}{n}\,k, \quad k\in\mathbb{Z}_+,
$$

を得る.

以下,帰納的に,自然数 ℓ に対しては (9) の n 次元版

$$
\mathrm{E}[\,|W_k|^{2\ell}\,] \sim C_{n,\ell}k^{\ell}
$$

を得る. □

参考文献.

教科書.

[T0] 服部 哲弥,ランダムウォークとくりこみ群,共立出版(新しい解析学の流れ), 2004.3,刊行予定.

[T1] 熊谷 隆,確率論,共立出版(新しい解析学の流れ), 2003.

[T4] R. Durrett, *Probability: Theory and examples,* 2nd ed., Wadsworth, 1996.

[T8] 小針あき(Unicode 774D 「目」偏に「見」)宏,確率・統計入門,岩波書店,1973.

[T9] W. Feller, *An introduction to probability theory and its applications,* vol. 1, 2, 3rd ed., John Wiley & Sons, 1968.

W. Feller, 確率論とその応用,1 上・下,2 上・下,卜部舜一訳,紀伊国屋書店.

[T10] F. Spitzer, *Principles of random walk,* 2nd ed., Springer, Graduate texts in mathematics 34, 1976.

[T11] G. F. Lawler, *Intersections of random walks,* Birkhäuser, 1996.