微分できない関数の「微分積分」学．

1　不確実性の時代

不確実性の時代と呼ばれたこともある 20 世紀の末にこの記事を書いている．確率という，不確実性の代表のように誤解されることもある概念は，実は微積分という確かな世界を広げる．そのような話の一つ，伊藤の公式が本題である．

確実と不確実の接点をかいま見るべく，話は突然宇宙に飛ぶ．スペースシャトルに日本人が搭乗するのがあたりまえになって，宇宙の話題も多くなった．

月と地球：楕円周期軌道．キャプション例（必要なら）「楕円軌道の解明は古典力学と微分積分学の勝利」

20 世紀中頃には既に人類は月に降り立っていた．アポロ計画の成功である．大宇宙の中では砂浜の中の砂粒より小さなロケットが，行程の大半を燃料を使わずに惰性だけで飛びながら月を逃さなかったのは，月が地球をまわる運行がきわめて規則的だからである．

月の運行は，古典力学と呼ばれる自然法則で極めて正確に予測できる．古典力学による予測とは，数学的には微分方程式を解くことである．例えば，月が地球をまわる軌道が楕円軌道であることが導かれ，実際の観測と合う．

燃料なし，を地球上でたとえるならば，沈みゆく船から救命ボートで脱出して漂流するようなものだ．月の運行が正確に予測できなければ，月に到達することなどおぼつかない．瞬時に軌道予測をするための電子計算機という 20 世紀の発明も忘れてはならないが，人類の月面到達という歴史は，古典力学と微分積分学の勝利の一つである．

しかし，20 世紀は古典力学的な予測可能性への信念が揺らぐ世紀でもあった．(20 世紀にはいろいろなことが起こったが，ここでは衛星の運動に話を限る.）月は，いつも一方の面を地球に向けたまま運動する．つまり，地球の周りの軌道だけでなく，月の自転も極めて規則的である．ところが，土星の第 7 衛星ハイペリオンの自転運動は周期的な規則性からほど遠いことが観測によって明らかになった．

ハイペリオン（岩の写真／グラフ）．キャプション例「土星の衛星ハイペリオン．このいびつな形の小さな衛星は不規則な自転運動をする．([1, p.201, p.209] より抜粋．)

ハイペリオンは，殻付きピーナツと形容できそうな，いびつな形をしているため，地球から見える明るさが向きによって微妙に変わる．その変化を数ヶ月間ていねいに観測したところ，規則的な関数では表せないことが分かった [1, §9]．この不規則な運動は，ハイペリオンの形が球から大きくずれていることと，タイタンという土星の大きな衛星の影響による，とされている．

古典力学で運動が時間と共に急速に予測不可能になる場合があることが，カオスという名の研究対象として 20 世紀に認識された．もし月が地球に向ける面も不規則に変化していたならば，アポロ計画は 20 世紀には決心できなかったかもしれない．

カオスの可能性は，規則性の象徴のように思われてきた天体の運行においてすらいろいろ見られることが分かってきた．まして，複雑きわまりない地上の現象は言うまでもない．しかし，これを自然科学的知性の限界だ，などと一般化してはならない．古典力学的な

意味での完全な予測だけが精密な予測ではない．20 世紀の自然科学はさらに高度な数学的方法を用いて，自然現象の一層深い理解を追求するようになった．

2　ギザギザした関数

本題に入るべく，株価という，これまたありふれた話題に飛ぶ．

株価の図．キャプション例（必要なら）「00 年 0 月 0 日 oo 株価の時間変化の様子.」

株価は時々刻々不規則に変動する，ギザギザした関数である．正確な予測は無理と思われる．しかし，不規則さの規則を読みとれればそれが役に立つことがある．

まず，ギザギザな関数を用意しよう．n を自然数として，次のように x の関数 $b_n(x)$ $(0 \le x \le 1)$ を定義する．$[0,1]$ 区間を n 等分する．$b_n(0)=0$ から初めて $b_n(1/n)$ は $+1/\sqrt{n}$ または $-1/\sqrt{n}$ とする．一般に $b_n(i/n)$ を決めたとき，$b_n((i+1)/n)$ は $b_n(i/n)+1/\sqrt{n}$ または $b_n(i/n)-1/\sqrt{n}$ とする．$b_n(1)$ まで決まったら終わる．途中は直線で結ぶのでも階段状にグラフを書くのでもかまわない．数セミ読者ならば想像しているだろうとおり，n が大きくなった極限を考えるので，結果は同じである．n 個の分点毎に選択の余地があるから，2^n 個の関数が用意できる．これら 2^n 個の関数を集めた集合 Ω_n を考える．

$n=2$ だと Ω_2 は 4 個しかない．その要素はどれもギザギザな関数とは言えない．

しかし，n を増やすと，Ω_n に属するたいがいの関数のグラフはギザギザの度合いを増し，どことなく株価の図に似てくる．

$n=2$．キャプション例（必要なら）「Ω_2 に含まれる関数.」

random walk sample figure．キャプション例（必要なら）「$\Omega_{2\,億}$ に含まれる関数の一つ.」

そこで，$n \to \infty$ で連続関数 b に収束するように各 n 毎に $b_n \in \Omega_n$ を選ぶ．すると，極限 b はいたるところギザギザな関数になる期待が持てる．実際，ある意味でこの期待は正しい．種は，$\Delta b_n(i/n) = b_n((i+1)/n) - b_n(i/n)$ と書くとき，

$$\Delta b_n(i/n)^2 = 1/n,\ i=0,1,\cdots,n-1, \tag{1}$$

となることにある．しかし，前置きを長くしないために，この大事な話を後回しにする．

3　積分変数の変換とギザギザした関数の「微分」

月の運行の予測可能性は微分積分学の勝利だと書いた．では，微分できないギザギザな関数は，手の出ない，知性の限界の向こう側の関数だろうか？株価の変動について数学者は何も語れないだろうか？そんなことはない．よく知られているように 20 世紀に新しい数学の分野が発見された．その糸口の一つは積分変数の変換公式にあった [2].

連続関数 f の積分 $\displaystyle\int_0^x f(y)\,dy$ を考える．まず，高校で習う積分変数変換の公式を復習しよう．もし b が微分可能で導関数 b' も連続ならば

$$\int_0^x f(y)\,dy = \int_0^t f(b(s))\,b'(s)\,ds \tag{2}$$

となる．ここで $b(t) = x$, $b(0) = 0$ とおいた．

本題に進む前に，(2) を少し書き換える．区分求積法によれば，$\Delta = \max_{i=0,1,\cdots,n-1} |y_{i+1} - y_i|$ とおくとき，

$$\int_0^x f(y)\,dy = \lim_{\Delta\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(y_i)(y_{i+1} - y_i)$$

である．分点 y_i を $y_i = b(s_i)$ で決めることにする．$\Delta \to 0$ と $\Delta' = \max_{i=0,\cdots,n-1} |s_{i+1} - s_i| \to 0$ が同値ならば,

$$\int_0^x f(y)\,dy = \lim_{\Delta'\to 0} f(b(s_i))(b(s_{i+1}) - b(s_i)) \tag{3}$$

となる．右辺を Riemann–Stieltjes 積分と呼んで,

$$\int_0^t f(b(s))\,db(s) = \lim_{\Delta'\to 0} f(b(s_i))(b(s_{i+1}) - b(s_i)) \tag{4}$$

と書く．(3) と (4) から

$$\int_0^x f(y)\,dy = \int_0^t f(b(s))\,db(s) \tag{5}$$

となる．

(2) と (5) を比べると $db(s) \Leftrightarrow b'(s)\,ds$ という対応がある．Riemann–Stieltjes 積分の「$db(s)$」という記号には，関数 b の微分 b' が暗黙のうちに入っている．

では，一歩飛躍して，普通の微分積分学を越えよう．$b_n \in \Omega_n$ の極限としてギザギザな関数 b を得られる可能性を既に書いた．そのような関数に対して (5) のような積分変数変換の公式は成り立つだろうか？答えは二度驚くものである．まず，そのようないたるところギザギザな関数に対しても，ちゃんと公式があることで驚く．さらに，その公式が (5) と相容れない形をしていることにもう一度驚く：

$$\int_0^x f(y)\,dy = \int_0^t f(b(s))\,db(s) + \frac{1}{2}\int_0^t f'(b(s))\,ds. \tag{6}$$

ここで，変数変換の関数 b はギザギザだが，f は微分可能な関数とした．右辺の第 1 項は (4) のように区分求積法と類似のやり方で定義する．この公式には発見者の伊藤清先生にちなんで，伊藤の公式という名前がついている．

伊藤先生は内閣統計局に勤務していた時期にこの公式を発見したそうだ．伊藤の公式を含む一連の研究は確率解析と呼ばれる分野の基礎となった．その功績によって 1987 年に数学のノーベル賞ともいわれるウルフ賞を受賞されている．

20 世紀終盤に金融工学とも呼ばれる経済学の分野が発展した．数学者が株価のギザギザした関数形について研究し，その成果が金融派生商品の値段を決める根拠となった．その走りとなった公式を導いたブラックとショールズとともに 1997 年にノーベル経済学賞を受賞したマートンは，伊藤の公式を用いてその公式を証明した．

伊藤の公式 (6) に話を戻そう．「$db(s)$」という，ギザギザな関数 b の微分を内包する記号が意味を持つ，と，伊藤の公式は主張する．その一方，右辺第 2 項は (5) にはないので，(6) は b が微分可能な関数のときには成り立たない公式である．二度驚く公式と書いたとおりである．

例えば $f(y) = y$ の場合， $f'(y) = 1$ なので，(6) は， $b(t) = x$ と $b(0) = 0$ を思い出すと,

$$\frac{1}{2}b(t)^2 = \int_0^t b(s)\,db(s) + \frac{t}{2} \tag{7}$$

となることを主張している．右辺第 2 項の t に比例する項が通常の微積分学と異なるから，この導出の説明を試みる.（あとで書くように，以下の説明はちょっと悪い説明である.）

自然数 k に対して $t = k/n$ とおく．t は横軸上の k 番目の分点の位置である．$b_n \in \Omega_n$ ならば (1) から,

$$\sum_{0\le i/n<t} \Delta b_n(i/n)^2 = t \tag{8}$$

となる．$b_n((i+1)/n) = b_n(i/n) + \Delta b_n(i/n)$ を思い

出すと，

$$
\begin{aligned}
&b_n(t)^2 - b_n(0)^2 = (b_n(k/n)^2 - b_n((k-1)/n)^2) \\
&+ (b_n((k-1)/n)^2 - b_n((k-2)/n)^2) + \cdots \\
&+(b_n(2/n)^2 - b_n(1/n)^2) + (b_n(1/n)^2 - b_n(0)^2) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} (b_n((i+1)/n)^2 - b_n(i/n)^2) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} (2b_n(i/n)\Delta b_n(i/n) + \Delta b_n(i/n)^2) \\
&= 2\sum_{i=0}^{n-1} b_n(i/n)\Delta b_n(i/n) + t
\end{aligned} \tag{9}
$$

を得る．最後の変形で (8) を使った．

b_n がギザギザな関数 b に収束する場合を考える．即ち，$\lim_{n\to\infty} b_n(s) = b(s)$ $(0 \le s \le 1)$．このとき，

$$
\int_0^t b(s)\, db(s) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} b_n(i/n)\Delta b_n(i/n) \tag{10}
$$

ならば，(9) の両辺で $n \to \infty$ として，目標だった (7) を得る．

最初に断ったように，以上はちょっと悪い説明である．(10) を (4) と比べると，分点数 n を大きくすると同時に被積分関数 b_n も変えている点が違う．だから (4) の類推から直ちに (10) は言えない．b_n の極限 b に対して (8) に相当する性質を先に導いておくのがより適切な説明だが，それには準備を要する．

4　ほとんど全てギザギザ

いちおう話はすんだが，歯切れの悪いところがあった．$b_n \in \Omega_n$ の極限として得られる連続関数 b はいたるところギザギザな関数であると期待する，と書いたが，本当だろうか？また，b_n の極限 b に対して (8) に対応する式が成り立つだろうか？ここでは前者に即して説明を試みる．

事情は微妙である．というのは Ω_n の中には 1 歩毎に上がったり下りたりするジグザグな関数 b_n がある．n を大きくすると，ジグザグの幅も 0 になるので，極限は恒等的に 0 という関数である．これは微分可能だから，(5) が成り立ち，従って (6) は成り立つはずがない．

事態を打開すべく，再び話を大転換して，「はかる (量る・測る)」という話をしよう．世の中には，リンゴ 3 個，ロケット 2 機，というように，一つ一つ数え

ジグザグな関数 $n = 16, 32, 64, \infty$．キャプション例（必要なら）「完全にジグザグな関数の列 $b_1, b_2, \cdots$, は恒等的にゼロというなめらかな関数に収束する．」

る方法と，100cc の水，4 光年の彼方，というように，量をはかるという考え方がある．水は分子からできているので，分子の個数を数えれば「水 3×10^{24} 個」という言い方もできそうだが，日常生活ではそれは悪い言い方で，100cc の水と言うほうが良いだろう．

量の概念は数学的には測度として定義される．20 世紀の初めにルベーグが完成した測度論である．長さや面積は測度の例である．そしてもう一つ，確率も，起こりやすさをはかるという意味で，測度としてとらえることができる．

起こるかもしれないこと，あるいは文学的 (?) に言い換えれば，実際には起こらなかったことの量を，目に見える量である長さや面積と同等に，測度ととらえたのは，測度論に基づく確率論を創始したコルモゴロフの卓見であった．

長さや面積のような目に見える量にこだわる限り，関数の集合のような抽象的な集合の量は考えにくいが，確率も測度であると見破ったときから関数の集合に確率という名の測度を定義して，その量を数学的にはかれるようになった．

伊藤の公式 (6) が成り立つ関数を探すのにふさわしい測度はウィーナー測度と呼ばれる確率測度である．ウィーナー測度の説明をするために，今度はすごろくの話をする．集合 Ω_n の定義を思い出してほしい．そこで，$b_n(i/n)$ が決まったときに $b_n((i+1)/n)$ の値は $b_n(i/n) \pm 1/\sqrt{n}$ の 2 つの値から選ぶ，と書いた．これを硬貨の表裏で駒を $1/\sqrt{n}$ 進めるか戻すかを決めるすごろくに見立てよう．すると，硬貨を n 回投げる

文学的な絵？はかる or 起こらなかったこと

ことで Ω_n の関数を一つ選ぶことができる． Ω_n の中の 2^n 個の関数は全てが等しい確率 2^{-n} で現れうる．

このように定義された Ω_n 上の確率について $n \to \infty$ の極限をとると，連続関数の集合上の確率を得ることができる．これがウィーナー測度である．その作り方から想像されるとおり，この確率で測れば，事実上全ての関数がギザギザした関数に見える．$b_n \in \Omega_n$ の極限として得られる関数の中には恒等的に 0 という関数もあると書いたが，ウィーナー測度で測ると，このような関数が現れる確率は 0 になる．この事情を，数学用語では，ウィーナー測度で測ればほとんど全ての関数がいたるところ微分不可能である，などという．

確率 1，あるいはほとんど全て，ということは賭事でいえば，はずれがない，ということである．考えている集合の中になめらかな関数という例外があっても，硬貨を投げて (?) 選んだとき，それに行き当たる可能性はないという意味で，事実上全ての関数がギザギザしている．

(8) の極限について説明する余裕はなくなったが，以上の説明と同様に，確率論の枠組みの中で数学的に正当化できる．（詳しいことは教科書 [3] に譲る．）一つ一つの関数について公式が成り立つかどうかを判断してより分けるのではなく，関数の集合の中で求める性質を持つものの割合（確率）を論じることで，ギザギザな関数の「微分積分」が定義できるところがおもしろい．

5　不確実の中の確実

天気予報は 20 世紀のかなり長い期間，当たらないものの代名詞であった．交通事故に遭わないために「気象庁，気象庁」と呪文を唱える，という冗談すらあったらしい．（20 世紀には天気予報に責任を持っていたのは気象庁という役所だった．）

しかし，20 世紀は電子計算機の発明と急速な進歩の時代でもあった．20 世紀半ばに既に，電子計算機開発の中心人物の一人フォンノイマンが，空気の運動を記述するナビエストークス方程式と呼ばれる微分方程式を数値的に解く可能性を検討している．

天体の運動ですら複雑なので，天気予報がどこまで正確になるかは簡単なことではない．しかし，現在の精度は原理的な問題より遙かに手前にいる．観測精度の向上と計算機の性能向上によって予報の精度が上がる余地が十分ある．（情報の伝達技術や計算機の発達を刺激するという実利もついてくるだろう．）

数学は，自然科学は，曲折はあっても進歩する．そうやって確実という言葉が使える状況が，遅速はあっても，増えていく．月にうさぎがいると思うほうが夢がある，という意見もあるが，だまされてはいけない．広がった確実な理解の土台の上に，より多くの夢や可能性が新たに開ける．進歩によって夢は増える．

20 世紀終盤に不確実性の時代という言葉がはやったときもあった．世紀末の日本では，阪神大震災で神戸の高速道路の高架が根本から折れ，打ち上げたロケットが失敗し，とどめを刺すように東海村で臨界事故が起きた．21 世紀は日本の自然科学にとっては真冬から始まるかもしれない．

それは，いいことだ．冬来たりなば春遠からじ，という言葉があるからだ．日本の自然科学の春を連れてくるのは 21 世紀の若い諸君の力である．21 世紀の若い諸君に，心から声援を贈りたい．

この記事を書くにあたって励ましと有益な助言を下さった渡辺信三先生に感謝します．また，有益な提案と良い図を探して下さった数セミ編集部にも感謝します．

参考文献

[1] 惑星の複雑な運動に焦点を当てた天体力学の啓蒙的入門書として，I. Peterson, *Newton's clock — Chaos in the solar system*, Freeman, New York, 1993，がある．本記事の最初の話はこの本に基づく．

[2] 伊藤積分の発見の回顧記事は，伊藤清，確率微分方程式 — 生い立ちと展開，別冊・数理科学 1990.10（特集 数理物理学の展開），サイエンス社，1990 年．本記事の主題はこれに基づく．なお，ギザギザな関数の微積分という視点に関しては，ウルフ賞の受賞説明の中で，微積分学の創始者ニュートンの成果にたとえられている，と渡辺信三先生から教えて頂いた：‘ He has given us a full understanding of the infinitesimal development of Markovian sample paths. This may be viewed as Newton's law in the stochastic realm, . . . ’

[3] 本記事のようなお話と確率過程論の専門書や本格的教科書との間を埋める入門的教科書として，楠岡成雄，確率と確率過程，岩波講座応用数学 (第 11 巻または [基礎 13] 分冊)，岩波書店，1998，および，舟木直久，確率微分方程式，岩波講座現代数学の基礎 (第 5 巻または第 9 分冊)，岩波書店，1997，G. Lawler, *Introduction to stochastic processes*, Chapman & Hall, 1995，をあげておく.