構成論的場の量子論
— ヒルベルトの第 6 問題への 1 つの回答 —

20 世紀に生まれ，世紀にまたがる未解決大問題となろうとしている予想「3+1 次元時空における場の量子論の (不) 存在」の背景について，なるべく分かりやすくお話しましょう [1)].

1 数理物理学

数学というのは複雑な記号や公式をいっぱい覚えることによって難しそうな問題を次々と解く頭の体操，と見えるかも知れません．でもそれは，すでに完成した数学を **勉強する** ときの話です．数学を **研究する** 場合には，まず，少数の先鋭的な研究者の頭の中に新しい問題意識や動機が生まれます．そして研究を進める中で新しい方法や技術が得られ，知られていなかった事実が明らかになり，新しい分野が始まります．さらに大勢の研究者によって成果が積み重ねられ記号や公式が整理されると，多くの人々が，場合によっては高校や大学で，学べるようになります．同時に実用的な応用の範囲も拡大しますが，この間何十年もかかるのが普通です．

「住みたい町は自由が丘，ちょっと遠出のデートは横浜」といった知識は，東京でおしゃれに生活するのに役に立ちますが，そういう知識がある日天から降りてきて，その知識を設計図にして一気に東京という都会ができたのではありません．高校や大学で学ぶ数学は，大勢の人の夢と努力の積み重ねでできあがった都市のようなものです．数学の予想の話は，荒れ野が切り開かれてやがて巨大な都会になっていく，そういうお話です．

さて，新しい数学を作るのは新しい問題意識です．それでは，新しい数学を作りたいと思った人は，その問題意識をどこから探してくればいいでしょうか．この問に答えるためのヒントの一つがヒルベルトの第 6 問題にあります．ヒルベルトの第 6 問題の題は「物理学の諸公理の数学的扱い」です [2)]．ここで **物理学** とは「実験や観測によってきわめて精密に実証された自然現象の規則性を記述する数学的理論」ですが，物理学に現れる理論的概念は論理的に十分明確に定義されているとは言えない場合があります．第 6 問題は「物理的概念を明確に定式化せよ」と言います．

物理学を数学的に明確にすることによって何が得られるのでしょう．ヒルベルトの意図と若干違うかも知れませんが，ひとつ分かりやすい例をあげましょう．高校の物理で学ぶ **力学** (いわゆる「ニュートンの 3 法則」) は，天体の運動を説明するための物理理論として発見されました．すなわち，惑星の運動に関して知られていた精密な法則 (ケプラーの法則) をより基本的な **公理** から数学的に導くことができる理論です．ところで，高校の数学で習う **微積分学** の成立期は力学の成立期とほぼ同時期ですが，力学を最も自然に記述する数学はまさに微積分学ですから，力学と微積分学の確率の歴史は独立ではなく一体不可分のものだったと考えるのが自然でしょう．第 6 問題には，物理学は数学の新しい問題意識の豊かな源であるという前提が感じられます．

力学という物理理論と微積分学という数学理論の一体不可分の発展の歴史において，その相互のやりとりは多くの研究者の研究の積み重ねによるものです [3)]．21 世紀間近の現在では物理学も数学もそれぞれ複雑になったため，相互のやりとりはなおいっそう難しくなっています．物理学の膨大な実験事実や理論的試みの中から純粋数学の問題意識を引き出す作業は，一つの学問分野をなすと考えるのがよいようです．それを **数理物理学** と呼びます．ヒルベルトの第 6 問題を現在の立場から見ると，「実験的に精密に検証された自然現象に関する法則を正確に記述する数学は必ず存在して数学的にも深い意味がある，という信念に基づいて，20 世紀の数学ではその本質を明示しきれないような 21 世紀の数学を，20 世紀の物理学的知見から作りなさい」という「数理物理学宣言」とみなすこともできるでしょう．

2 場の量子論

20 世紀には重要な理論物理学の発展がいくつもありましたが，その一つ， **場の量子論** についてお話しましょう．場の量子論は，ヒルベルトの時代に既に知られていた特殊相対性理論と量子力学を矛盾なく統一することを指導原理として理論物理学者たちが見いだした物理理論で，素粒子の間に働く力や素粒子の生成消滅のしかたを説明します．

乾燥した日にセーターの上にコートを着て金属のドアノブに触れると，ぱちぱちして痛い目にあいます．これは手にたまっていた電荷によるクーロン力によってドアノブと手の間に電子が飛んだからだ，と習います．静電気による力がクーロン力に従うというのは (古典) 電磁気学の法則の一部です．

この古典電磁気学によれば，電荷がたまっていない2つの金属を接触しないように置くと電磁気的な力は働かないはずですが，きわめて精密な実験をおこなうと，日常生活では経験できないほどの小さな力ながら，金属は引き合っていることが分かります．これはカシミール効果と呼ばれていて，場の量子論の一つである**量子電磁気学** によって計算でき，その結果は実験で得られた数値と極めて近いことが確認されています[4)]．

日常生活では，多くの場合，電磁気的な力と (この記事ではお話ししない) 重力しか見ることができませんが，ミクロの世界ではこのほか素粒子が別の素粒子に変化する現象が観測されます．これらの現象は，量子電磁気学的現象と弱い相互作用が引き起こす現象を統一的に記述する**ワインバーグ–サラム理論** や強い相互作用が引き起こす現象を記述する**量子色力学** と呼ばれる場の量子論によって説明されると考えられています．

私達は 20 世紀の物理学的知見として，量子電磁気学，ワインバーグ–サラム理論，量子色力学，を持っています．この三者を総称して「標準理論」と呼びます．(もちろん 20 世紀末現在における標準という意味です．なお，ワインバーグ–サラム理論は量子電磁気学を含んでいますが，この記事ではなじみやすい電磁気という言葉を残しておきます．) これらは力学における「ニュートンの 3 法則」に対応し，数学で言えば公理に相当します．したがって，この公理から惑星の運動を説明する定理を導くように，「標準理論」の公理から素粒子の振る舞いを説明する定理を証明しなければなりません．

ところがここで問題が生じます．現状では場の量子論は **摂動的な近似計算** しかできません．「摂動的」とは，テイラー展開のような方法と思えばいいのですが，しかし，「真の理論値」が存在するかどうか分かっていません．従って，場の量子論の摂動的な計算は真の理論値 (が存在するとしても，それ) との間にどれほどの誤差があるか分からない「近似」計算です．たとえて言うなら，無限級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \tag{1}$$

が収束するかどうか知らないが 4 項目まで足してみました，という段階です．こう書くと場の量子論を信頼する根拠は極めて薄弱のように聞こえますが，場の量子論によって得られた近似値が実験結果を大変良く説明してきたことは確かですし，場の量子論に代わってあまたの素粒子現象を同程度以上の精度で説明する理論はきわめて考えにくく思われます．

ここでもう一度，微積分学の歴史を振り返って見ましょう．ニュートン以後，微分できない関数にまつわる奇妙な反例など，数学者を悩ませた困難が次々に発見されていきました．これは便利な計算公式を蓄積するのとは別の問題であり，微積分学が数学の一分野として完成するには，これらの困難を解決して，もはや論理的な矛盾を含まないということを保証する必要がありました．この保証なしには微積分学は砂上の楼閣です．

このような科学史的な目で場の量子論を見ると，その鍵となる諸概念を論理的に正しくそしてたやすく扱う知恵を獲得する以前の段階にあります．それゆえ，場の量子論を数学の一分野と見なすのは時期尚早です．

それでは誰が猫の首に鈴をつけるのでしょうか．ここで，数学的に正しく定義されたものを信じる純粋数学者が活躍する前に，物理的な実在を記述する数学的理論の存在を信じる数理物理学者の出番となります．彼等は数理物理学の信念に従って，物理学者が「場の量子論」と呼んでいるものが何らかの深い数学的実体を反映していると信じています．

3　構成的場の量子論

未解決の問題

「標準理論」を数学的に定義できるか

を解決することが数理物理学者のミッションです．この問題に対する 20 世紀のアプローチについてお話しする前に，物理学者たちの関心について触れておきましょう．

「標準理論」が物理理論として正しいと認められているということは，量子電磁気学，ワインバーグ–サラム理論，量子色力学のいずれも摂動的な近似計算が数多くの実験とよく合うということを意味します．しかし，よい近似で計算できない現象も数多くあり，それらの現象と理論は精密には比較できないでいます．この点に関しては量子色力学と他の 2 つでは様子が違います．

量子色力学は高いエネルギーで摂動的な近似計算が良い近似値を与えるので，巨大な加速器を使った素粒子の衝突実験などで理論の正しさが実験的に検証されています．逆に低いエネルギーでは実験結果を正確に説明するような良い計算方法が知られていません．実

験事実と比較しうる理論的な計算方法があれば物理学者も大いに関心を持つでしょう．これは計算公式を蓄積する仕事に対する期待です．

これに対して，量子電磁気学とワインバーグ–サラム理論は低いエネルギーで摂動的な近似計算が有効で，実験的検証が進んでいます．加速器があまりに大きくなって，国家予算規模を越え，地球上で一度に1個しか作れなくなってしまった今日，高いエネルギーの実験はなかなか進まない兆しが見えています．だから低いエネルギーで合っていればそれでよいか，というとそうでもありません．

量子力学では，高エネルギーの物理現象は短距離における理論的性質と関係が深いのですが，この極限領域における解析は，理論の数学的な整合性を検証するのに必要になります．このような仕事の一環として，量子電磁気学における (1) のような展開が本当に収束しているかどうか調べてみると，これが大変怪しいことが分かりました．もっと驚くべきことに，

> 摂動論的量子電磁気学を形式的展開に持つ場の量子論は存在しない

という，過激にみえる予想が優勢のようです．つまり，量子電磁気学を数学的に定義することはできないと予想されています．

そんなことがあるのでしょうか．もしも本当に量子電磁気学が存在しないとすれば，その摂動的近似計算は一体何だったのか，そして正しい数学的理論はどこにあるのか，ということを問わないではいられません．しかしこの問題は未解決のまま 21 世紀に積み残された数学上の問題の一つになりつつあります．

他方，高エネルギー領域に重大な数学的問題がない量子色力学は，数学的にも正しく定義可能であると物理学者は信じていますが，これを厳密に正当化するには低エネルギー領域での解析も必要になるため，まだ完成されていません．

このように,「標準理論」を数学的に定義せよというミッションの背景には，計算技術の貧困という問題のほかに，量子電磁気学に対する深刻な疑念があります．この疑念は場の量子論というパラダイム自体に向けられたものとも言えるので，そもそも「場の量子論」と呼べるものが数学的に実在し得るかどうか考えてみようということになるのは当然の成り行きです．

しかし,「数学的に実在するか否か」という問題は，単にそれだけでは意味をなしません．$x^2 = 2$ を満たす数 x は有理数の中に存在しませんが，実数の中には存在しますから，あらかじめ探索範囲を指定してから存在を問わなければ意味がありません．

そこで，どのような数学的対象が場の量子論らしいか (場の量子論の数学的定義) を規定するものとして，**ワイトマンの公理系** と呼ばれるものが提唱されました．この公理系について手短かに説明しましょう．相対性理論は，ローレンツ変換と呼ばれる時間と空間座標の変換に対して自然法則は不変でなければならないという要請なので，特殊相対性理論と整合的であるべき場の量子論もこの要請を満たしていなければなりません．また場の量子論は量子力学とも整合していなければなりませんが，量子力学において物理系の状態は確率振幅と呼ばれる量で書かれます．特に場の量子論のモデルは **ワイトマン関数** と呼ばれる一連の確率振幅

$$W_n(x_1, x_2, \cdots, x_n),\ n = 1, 2, \cdots, \tag{2}$$

によって特徴づけられます．ここに x_j はすべて時間と空間を表す4次元(ミンコフスキー)空間の点の座標です．そして,「ワイトマン関数はローレンツ不変である」という要請を一つの軸としてまとめられたのがワイトマンの公理系です．

さて，ヒルベルトの問題意識からすれば,「ワイトマンの公理系は無矛盾か」という問いにまず答えなければなりませんが，**自由場** と呼ばれる具体的なモデルがワイトマンの公理系を満たすことが分かっているので，この点は安心です．

物理学的には自由場の量子論とは相互作用のない場の量子論，すなわち粒子がお互いに力を及ぼさず，生成消滅もせず，各々が等速直線運動を続けるだけという理論です．力を及ぼさないということを「車にぶつかっても通り抜けるから，怪我しない」と例えると，ついユートピアを連想しがちですが，粒子間に力が及ばないということは，車やヒトを形作るはずの原子同士もくっつかずにバラバラということなので，そもそも車もヒトも森羅万象何もない世界となります．これでは現実の物理現象をまったく説明できません．この意味で場の量子論では自由場の量子論を **トリビアル** と呼びます．そして,「トリビアルでない場の量子論を数学的に作れ」という数理物理学の課題を研究する分野を **構成的場の量子論** と呼びます．(脱線ですが，数学者が使うトリビアルという言葉はつまらない研究という意味なので，研究を誤って評価されることがあるそうです．) 自然現象の理解へのフィードバックを考える

図1

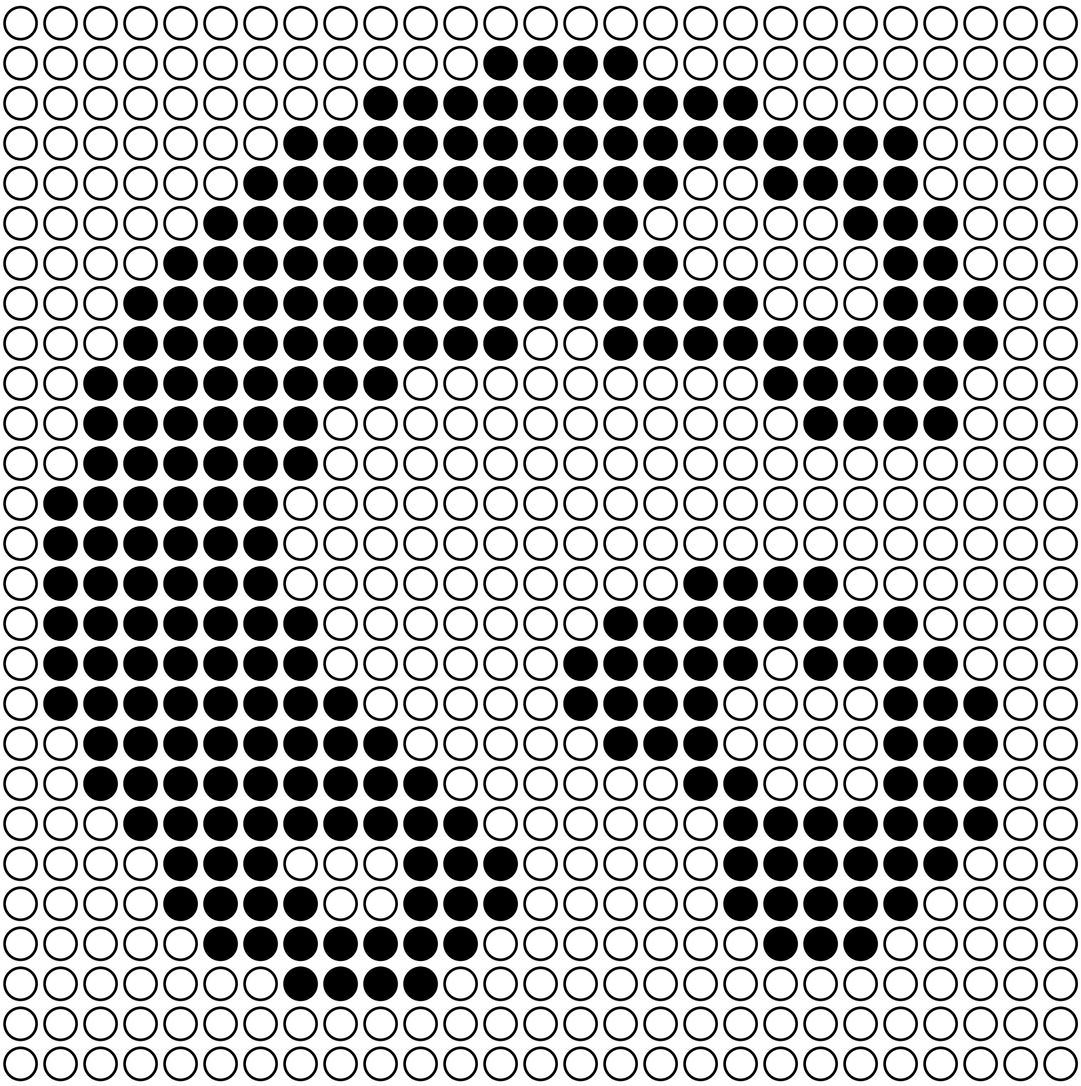


図2

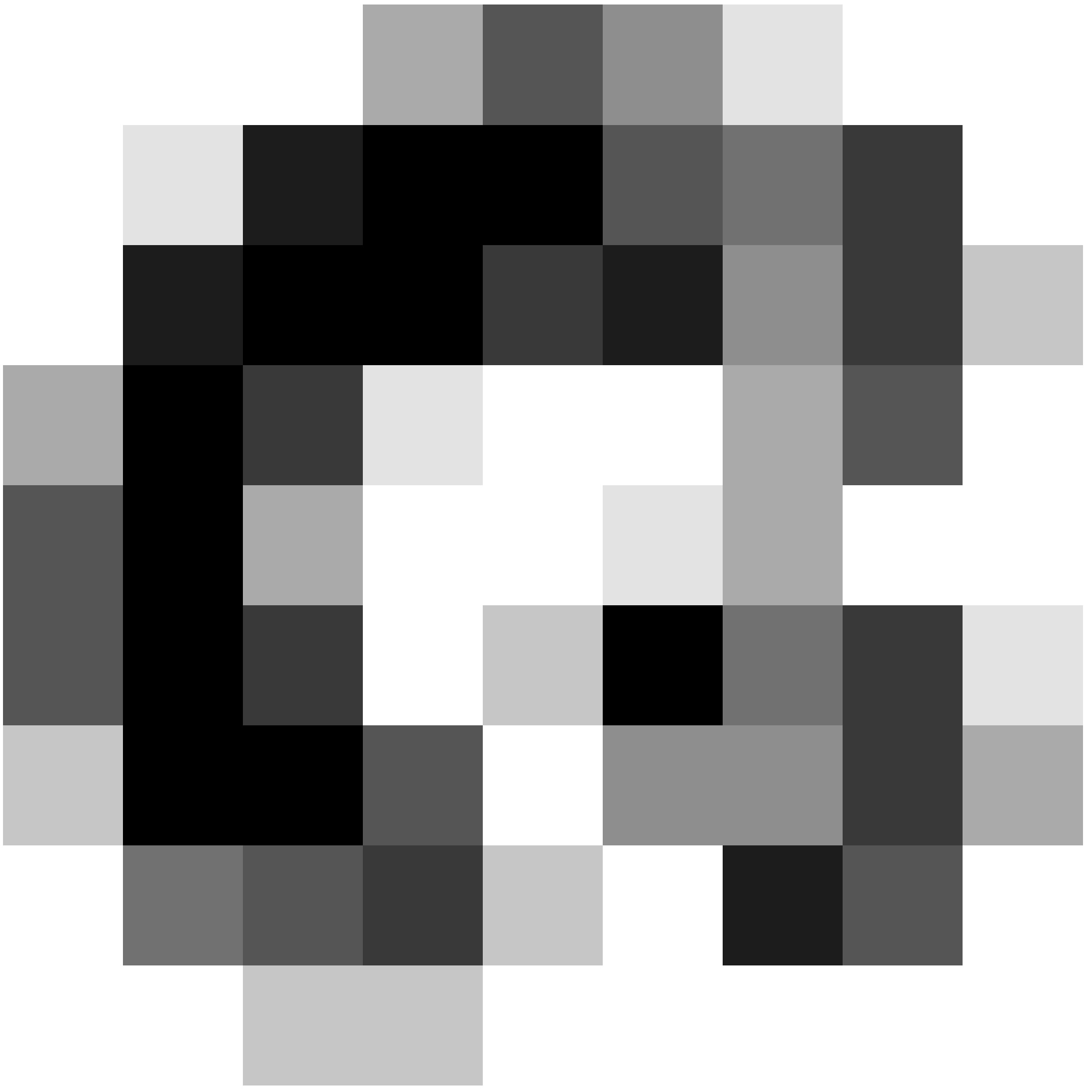


図3

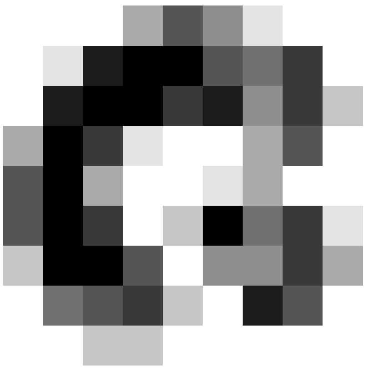
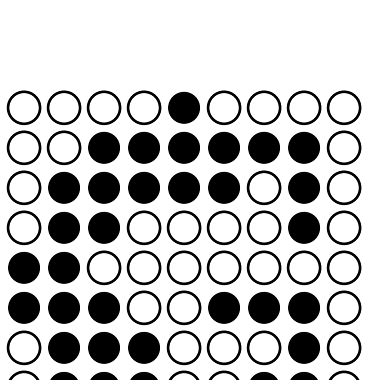


図4



と，最終的にはより具体的な「標準理論を数学的に作れ」という課題が頭の片隅にあることになります．

4　くりこみ群

最後に，構成的場の量子論の 20 世紀における一つのアプローチについてお話ししましょう．このアプローチは，問題を確率論的にとらえ直すところにその特徴があります．

まず第一に，これは大変奇妙に聞こえるかも知れませんが，ワイトマン関数 (2) における各座標 $x_j = (t_j, x_j^1, x_j^2, x_j^3)$ の時間座標 t_j を純虚数 $\sqrt{-1}x_j^0$ で置き換えることから始まります．この置き換えによって $W_n(x_1, \cdots, x_n)$ から作られた関数 $S_n(x_1, \cdots, x_n)$ は，ある条件のもとで確率論のモデルの期待値となることが知られています．(S_n を **シュヴィンガー関数** と呼びます．) すなわち，場の量子論のモデルは確率論のモデルと対応します．そして，確率論の問題としてシュヴィンガー関数 S_n の存在を示す際に,「摂動的な議論が破綻する確率は極めて小さい」ことを示すという証明上の指導原理を採用できます．この分かりやすい指導原理が確率論的アプローチの利点です．

ところで上に述べた確率論というのは，実は「心をもった確率論」[5)] すなわち **統計力学** です．統計力学とは，例えば「なぜ永久磁石は磁力 (自発磁化) を持つのか」といった疑問に答えることができる理論で，無限に多くの粒子が相互作用する物理系を扱います．

磁石も他の物質同様原子から構成されていますが，各々の原子にはスピンと呼ばれる性質があります．スピン自体も大変小さな磁石ですが，各々のスピンの影響を日常生活で直接経験することはできません．しかし，スピンの向きが全体として揃うことによって，言わば「数の力」で磁石の磁力を生みます．

ところで，各スピンは隣かせいぜい「むこう三軒」くらいまでしか影響を及ぼしませんから，全体が揃って永久磁石になるためには，伝言ゲームの要領でスピンの向きを遠くまで正しく伝えなければなりません．ところが，スピンは熱運動のためランダムに向きを変えるので，熱運動が邪魔をして「伝え間違い」が生じます．一列に人が並ぶ伝言ゲームでは，誰か一人が間違えただけでも全体に伝わらなくなりますが，磁石の場合スピンが空間的に，すなわち 3 次元的に広がっているので，一人が間違えたくらいならばその人を迂回して伝わる情報で修正が可能です．

さて，伝言ゲームの伝え間違いは個々の参加者の個性でかなり決まってしまいそうですが，磁石の熱運動の激しさ (間違いの起きやすさ) は **温度** によって変わります．十分高温の磁石は，伝え間違いばかりなので各スピンがてんでばらばら，上向きスピンと下向きスピンが「ごま塩」のように混ざった状態にあります．ですから，全体のスピンはまったく揃わず，磁力はありません．それに対し十分低温の磁石は，たとえば上向きスピンの海の中に下向きスピンの島が点在する状態にあり，ロケットにでも乗って，海は見えるけど島は見えないほど遠方から眺めると，全体が上向きに揃ったように見えます．これが自発磁化をもつ永久磁石の状態です．高温状態から低温状態に少しづつ温度を下げたとき，自発磁化を失った状態から永久磁石の状態に劇的に変化する現象を **相転移** と呼びます．

ここで，ちょうど相転移を起こす温度にある磁石を想像して見ましょう．上向きスピンが作る大小さまざまの湖の中に，下向きスピンが作る大小さまざまの島が浮かび，その島の中に大小さまざまの池があり，その池の中に $\cdots$ という具合に複雑な地形が展開しています．ちょうど相転移を起こす温度にあるとき，この地形は **スケール不変性**，すなわち拡大しても縮小しても地形がほぼ同じように見えるという性質，を持っています．ですから，相転移を解析するには，拡大縮小によって物理系の様子がどう変わるか，を調べることが大切です．

さて，規則的にスピンが並んだ結晶状の磁石を考えてそれを顕微鏡で見たとします (図 1)．ここで隣同士のスピンの間隔を ϵ とします．これにテレビの報道番組でよく使われるモザイクをかけてみましょう (図 2)．すると一つ一つのスピンが見えなくなって，小さなタイルを敷き詰めたような景色になります．このタイルの 1 辺の長さを 3ϵ としましょう．次に，顕微鏡の倍率を下げて像を 1/3 に縮小します (図 3)．するとタイルの 1 辺の長さは ϵ になったように見えますから，もとの結晶と同じ間隔でスピンが並んだ磁石のように見えるでしょう (図 4)．このようにスピン間隔が共通になると，縮小された磁石の物理的な性質を縮小前の磁石の性質と比較しやすいので，統計力学ではモザイクをかけてから縮小する手続きを **くりこみ群変換** と呼んで重用してきました．この用語を使って言いなおすと，相転移を解析するには，くりこみ群変換によって物理系がどう変わるか，を調べればよいことになります．

いつの間にか話は場の量子論の確率モデルから磁石

に移っていました．しかし両者には重大な違いがあります．場の量子論の確率モデルにはスピン間隔 ϵ に相当するものがありません．あえて言えば $\epsilon = 0$ でしょう．ですから，磁石のような統計力学のモデルにおいて ϵ を 0 に近づけた極限を考えれば，場の量子論の確率モデルの候補になると期待できます．この極限を **連続極限** と言います．すなわち，場の量子論を数学的に構成するということは，統計力学系の連続極限を求めることであると考えていいのです．ただし，ϵ を 0 に近づけると同時に，統計力学系の温度を上手に相転移点に近づけなければなりません．そうしないと，ϵ を 0 に近づけた (すなわち縮小した) 極限では，さきほど説明したように，のっぺりしたごま塩や大海原になってしまって，素粒子達が相互作用する現象を記述するモデルではあり得ないからです．このように，

> くりこみ群を用いて連続極限を取ることによって場の量子論を構成する

というのが 20 世紀の構成的場の量子論のアプローチです．これは言うはやすく行うは難い作業ですが，くりこみ群の立場から見ると，量子電磁気学の論理的な困難も量子色力学の計算上の困難も，数学的には共通の問題に根ざしていることが分かります．この共通の問題を一言で言えば **強結合領域におけるくりこみ群解析** となります．

相互作用のある 4 次元構成的場の量子論の構成問題が解決すれば，そこで用いられたくりこみ群解析は，無限次元解析学の一つの数学的手段として 21 世紀の解析学の一翼を担うに違いありません．それはまた一方で，素粒子の強結合領域の振る舞いや統計力学における相転移現象の研究に応用でき，その影響はかつての微積分学のように計り知れないものがあることでしょう．

註 1) この記事では具体的な数学的定義を何も言いません．興味のあるかたは，たとえば筆者の一人による講義録 (渡辺浩「場の量子論の数学的構成」日本医科大学基礎科学紀要 22 (1997)) を参照して下さい．なお，この講義録は `http://150.93.96.124/math/hattori/hattori.htm` の「雑記帳」のページからダウンロードすることもできます．
2) 数学セミナー 1994 年 2 月号の新井朝雄氏の記事，または日本評論社「ヒルベルト 23 の問題」を参照して下さい．
3) ニュートンが微積分学による力学の創始者であるという説は，現在では否定されています．実は，「ニュートンの 3 法則」の発見はニュートンより早く，微分方程式を積分してケプラーの法則を導く仕事はニュートンより後のことだそうです．特に，ニュートンの議論は，3 法則の下での軌道の一意性に関する問題意識を欠いています．一意性を意識することは微積分による力学に目覚めることを意味していました．物理学が数学の問題意識を啓発した好例でしょう．山本義隆「古典力学の形成」(日本評論社) を参照してください．
4) たとえば筆者の一人による解説 (服部哲弥「真空−限りなく騒々しい静寂」 数理科学 **358** (1993) 26–31) を参照してください．
5) “Statistical Physics is a Probability Theory — with a Heart” 筆者たちの友人 H.T. 氏によるこの魅惑的な語句は，M. カッツのものとされる名言 “Probability Theory is a Measure Theory — with a Soul” を本歌に取っています．

はっとり てつや／立教大学
わたなべ　ひろし／日本医科大学

Figure captions:

図 1 上向きスピン ● と下向きのスピン ○ が並んだ像に
図 2 モザイクをかけ
図 3 縮小すると
図 4 ハーフトーンを ● か ○ で置き換えると