連続の方程式

服部哲弥／はっとりてつや／数学・物理学

1　いないいないばあ

「パーキンソンの法則」という数十年前の本がある．社会学の本なのか冗談とみなされているのか知らないが，その続編の第２法則というのに「金は入っただけ出る」というのがある．この法則を一般化すると「金は出た金額と入った金額の差だけ蓄えが減る」となる．これがこの記事で扱う「連続の方程式」の基本である．

連続の方程式という用語には流体力学固有の意味があるが，一般化された意味でも用いられる．例えば岩波理化学辞典第４版を引用すると「物理量が空間に連続的に分布して流れているとき，その局所的保存を表す方程式」とある（なお，辞典の記事に「存在確立」とあるのは「存在確率」の誤植かも知れない）．連続の方程式は，流体力学，電磁気学，量子力学など多くの分野で種々の量に関して用いられる普遍的な概念である．ここでは辞典の説明から「保存則」「局所化」「連

続性」をキーワードに選んで解説を試みる.

物理学あるいは一般に自然科学で保存則というと,時間的に変化しない量の存在を指すことが多い.高校の化学で習う質量保存則は物質を構成する原子が化学反応の取り扱う範囲の現象では時間とともに変化しないことを表す.物理学ではエネルギー保存則が重要な保存則の例である.

大学時代に受講した教育心理の担当の方はすてきな先生だった.その記憶によると「いないいないばあ」は保存則に対する挑戦なのだそうだ.「いないいないばあ」をやってよろこぶのはある年齢までだという.子供といえども少し成長すると保存則を理解するので,顔を隠したその手の向こうに顔が保存していることを知っていて面白味がなくなる,という理屈だったと記憶している.保存則という切り口はヒトにとって理解しやすいということらしい.物理学では基本的な自然法則を習うとすぐに法則から導かれる保存則を勉強するし,理論物理学の研究では仮説となる方程式をたてるとそこから導かれる保存則が実験事実と一致するかどうかが最初の試金石となることが多い.

2　符号の問題

一般化されたパーキンソンの第 2 法則は,「全地球上のお金の総額は時間的に不変である」という保存則に対応する各個人毎の保存則と見ることができる．今，地球上に，あるいは適当な閉じた経済圏の中に，人が N人いるとし，これらの人々を $1, 2, \cdots, N$と番号づける．また，経済活動が始まった記念すべき最初の日を第一日として，i 番目の人の第 t 日の所有金額残高を $q_i(t)$ と書くことにする．

簡単のため，お金は全て常に誰かの所有であるとし，例えば，埋めたまま忘れてそのまま誰の目にも触れずに埋もれた，というのは考えないことにする．そうすると，ある人がお金を使うとそれは必ず誰か取引相手の手に渡る．第 t 日に人 i が人 jに合計 $I_{ij}(t)$ だけ払ったとする（図１）．例えば最初の日の取引が 1 から 2 に 1 万円の支払と計算された場合，$I_{1,2}(1) = 10000$ となる．これは 2 からみると 1 万円受け取ったことになるが，このとき $I_{2,1}(1) = -10000$ と書くことにする．

一般に，

$$I_{ij}(t) = -I_{ji}(t)\,,\ i, j = 1, 2, \cdots, N, \tag{1}$$

である．このとき一般化されたパーキンソンの第２法則は

$$q_i(t) - q_i(t-1) + \sum_{j=1}^{N} I_{ij}(t) = 0\,, \tag{2}$$
$$i = 1, 2, \cdots, N,\ t = 1, 2, \cdots,$$

と書ける．$q_i(t) - q_i(t-1)$ が第 t 日の i 氏の蓄えの増加，$\sum_{j=1}^{N} I_{ij}(t)$ が出た金額と入った金額の差である．出た額をプラス，入った額はマイナス，と符号で出入りの違いを表すことにしたので $I_{i,j}(t)$ は出入りを考えずに和を取れば自動的に出た額と入った額の差になる．数式では「蓄えの増加」でなく「蓄えの減少」と書くような言葉の心理的な綾が消えてしまうが，やむを得ない．

さて，

$$Q(t) = \sum_{i=1}^{N} q_i(t) \tag{3}$$

とおくと，これは全地球上のお金の総額を表す．(2) を辺々jについて 1 から Nまで足して (1), (3) を用いると

$$Q(t) = Q(t-1)\,,\ t = 1, 2, \cdots . \tag{4}$$

を得る．これは「全地球上のお金の総額は時間的に不変である」という保存則に他ならない．

保存則 (4) とは，問題にしている量（ここでの例えではお金）の空間全体についての総和 (3) が時間的に変化しない，という主張である．他方，(2) は空間の各点（ここでは各個人）毎に成り立つ式である．そして，各点で成り立つ式 (2) を点（人）について加えると保存則 (4) を得る．以上の関係が成り立つときの各点毎の式をここだけの言葉で各点毎の保存則と呼ぼう．

$Q(t)$ のような総和と $q_i(t)$ のような各点毎の量の対比を指す言葉が大局と局所である．各点毎の保存則 (2) は $Q(t)$ を局所化して $q_i(t)$ についての関係式を与えた．しかし，その際必要となるお金の流れ $I_{ij}(t)$ は一点 i での値だけでは書けず，取引相手 jが式の中に必ず入っている．「流れ」までこめて各点毎の保存則が局所化できる，即ち，時空の一点だけの量で書ける，のは空間の連続性及び物理法則の局所性に基づく．

3　ゼノンの宿題

「飛んでいる矢は止まっている」や「アキレスは亀に追いつけない」といったゼノンのパラドックスがあることから察するに，空間の連続性はヒトにとって理解しにくいらしい．第2節のように個人単位（離散系あるいはネットワーク）で考える方がやさしい.「歯科医院？ああ，渡辺さんとこ．角の松本さんってタバコ屋さんあるでしょ，右に曲がって赤い屋根目印に行ったら，看板出てるから」とは言うかもしれないが,「東経 135 度 8 分 9 秒 6 北緯 40 度 7 分 2 秒ちょうどの地点は，道幅を許容誤差として折れ線近似で説明すると,北 19 度 35 分 7 秒西に 135m 直進後東 20 度 46 分 8 秒北に 79m 直進して…」とは言わないと思う．ところがヒトにとって「自然」なことが自然界にとって「自然」とは限らない．自然界は空間３次元時間１次元とも連続である.（慎重に言えば，連続であるという見方が「自然」である.）連続性というヒトにとって難しい概念は微積分という解析学の助けによって「自然」に表現される．

物理で取り扱う概念は時空の連続性を尊重している．

物質は方円の器ならぬ時空の連続性に随って移動し，時空の連続性を超越したワープやテレポーション（時空を不連続に移動する想像上の運動を指す用語）は起きない．クーロン力や万有引力は空間的に離れた物体に直接力が作用する（遠隔作用）が，これらは物体が運動している場合は複雑な相対論的補正を受けることが分かっていて，局所的な形即ち近接作用で書く方が簡単な形に書ける．電荷（質量）があると近接作用でその周りに電磁場 (重力場) が発生し，それが近接作用で逐次伝幡して離れた電荷（質量）に到達したとき力を及ぼす，というふうに近接作用の累積で考える．特殊相対性理論成立以後は，少なくとも基本物理法則（第一原理）は全て近接作用即ち局所的な方程式で書かれる，と考えられている．

　ワープや遠隔作用がないという事実を抽象化すると，領域内の物理量は領域の境界面を通して出入りする量（流れ）によってのみ変化し，境界面を通らない運動や作用は存在しない，となる．この事実を用いて各点毎の保存則を一点の量だけで書いたのが連続の方程式である．連続性，ワープが存在しないこと，が必要で

あることから連続の方程式と呼ばれるのかもしれないが，次節で見るように微分可能性も必要である．

4 連続の方程式

前節の説明を数式で表現する．現実の世界は３次元空間であるが，簡単のため１次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}$ を考える（図２）．

$Q(t)$ という量が保存則であるとは

$$\frac{dQ(t)}{dt} = 0 \tag{5}$$

ということである．(4) は t の差分だがここでは時間 t が連続なので微分が登場する．第 2節にならって $Q(t)$ が各点 $x \in \mathbf{R}$ で定義された量$\rho(x,t)$（密度）の総和として表される場合を考る．即ち

$$Q(t) = \int \rho(x,t)dx$$

を仮定する．空間が連続でそこに連続的に分布する場合を考えるので総和は積分で書かれる．密度があると

き，Q への区間 $A=[a,b]$ からの寄与 Q_Aを定義できる：

$$Q_A(t)=\int_a^b \rho(x,t)dx\,.$$

A は時間的に動かさないことにすると

$$\frac{dQ_A}{dt}=\int_a^b \frac{\partial\rho}{\partial t}(x,t)dx$$

Q_Aが $[a,b]$ の境界（両端点）$\{a,b\}$ を通る量 $\mathcal{J}(x,t)$（流れ）によってのみ変化することを仮定すると

$$=-(\mathcal{J}(b,t)-\mathcal{J}(a,t))$$

習慣通り流れ $\mathcal{J}(x,t)$ は右向きの流れを正にとると符号は上式のようになる．$\mathcal{J}(x,t)$ が x について微分可能なことを仮定すると，

$$=-\int_a^b \frac{\partial\mathcal{J}}{\partial x}(x,t)dx\,.$$

まとめると，

$$\int_a^b \left(\frac{\partial\rho}{\partial t}(x,t)+\frac{\partial\mathcal{J}}{\partial x}(x,t)\right)dx=0$$

となる．これが任意の $A=[a,b]$ について成り立つためには

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(x,t)+\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial x}(x,t)=0\,. \tag{6}$$

１次元空間の場合を扱ったが，この話は何次元でも良いので，一般に d を自然数として d 次元空間において上記と同様の仮定の下で

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(\vec{x},t)+\sum_{i=1}^{d}\frac{\partial \mathcal{J}_i}{\partial x_i}(\vec{x},t)=0 \tag{7}$$

が成り立つ．一般の d では，ガウスの定理を使うことと境界からの出入りを記述する項について幾何的な考察を必要とする分複雑になる．(7) が連続の方程式の数式による表現である．このように，保存則と密度の存在および時間変化が領域の境界を通る流れによってのみ起こるという仮定から連続の方程式が導かれる．(7) は一点$\vec{x}$における量だけを含む式である．これを全宇宙にわたって積分すると，宇宙の果てから「漏れ出る」流れがない（宇宙の果てで$\vec{\mathcal{J}}(\vec{x},t)=\vec{0}$）とき，保存則 (5) を再現する．即ち第 2節の意味で各点毎の保存則である．しかも，離散系の場合と違って取引相手

の点は登場せず一点$\vec{x}$の量だけで書けている．連続性（正確には微分可能性）のおかげで流れの微分が定義できてそれが (2) の I_{ij}の代わりを果たす.

具体例として圧縮可能な流体（音速程度以上の速さにともなう現象）の連続の方程式がある．$\rho(\vec{x},t)$ を流体の密度，$\vec{v}(\vec{x},t)$ を流体の速度，$\mathcal{J}(\vec{x},t)=\rho(\vec{x},t)\vec{v}(\vec{x},t)$，とおくと，この節の議論がそのまま成立して (7) が成立する．この狭義の連続の方程式は今までに述べたことだけで導かれるが，一般に今まで述べた 3 つの要素，保存則，局所化，連続性，を備えていれば（広い意味で）連続の方程式と呼ばれる．一般の連続の方程式は運動方程式などの物理法則から導かれる.

5　その先の物理

（広い意味での）連続の方程式が成り立つかどうかは保存則，密度，流れの存在によるが，特定の物理量に対してこれらが存在するか否かは一般には物理法則から決まる．従って，物理法則の具体例を挙げずに諸量の存在を仮定した前節の議論は，物理学から見れば

「絵のない額縁」である（この語句に興味を持った方のために，日本物理学会誌 48 巻 1993 年 9 月号に宮沢弘成氏の警句に満ちた回顧録があることを書いておきたい）．具体的に物理法則が与えられたときに連続の方程式の成立を知るための十分条件が必要になる．

有名な十分条件がネーターの定理である．これはラグランジアン密度を持つ系が対称性を持つときそれに対応する連続の方程式が存在することを保証する．密度や流れの表式も陽に得られる強力な十分条件である．これは数学セミナー 1993 年 6 月号の中島日出雄氏の記事の局所化に他ならない．

コンピュータの進歩を背景に cellular-automata の研究が盛んである．そこでは現実の世界を離散系で近似して考える．物理法則や各点毎の保存則の局所性の概念を拡張して適当な意味で理解することで離散系の場合でも連続の方程式の類推を考えることが出来る．ネーターの定理ほど有名ではないと思うが，cellular-automata については武末真二氏との共同研究によって，物理法則が適当な意味で局所的で，かつ，(3) のような意味で密度を持つ保存量があれば，流れの関数

と連続の方程式が存在することを証明した．密度を持つ保存量の存在の全数調査可能な必要十分条件も与えるので，ラグランジアンや対称性と無関係に保存量と連続の方程式を求めることができる．

連続の方程式の前提としての保存則を第 2節で「埋めたまま忘れてそのまま誰の目にも触れずに埋もれた，というのは考えない」と説明したが，世の中にはこの大前提が破れることが本質的な現象もある．巨視的な系のパターンやリズムの形成を議論する散逸構造の研究などである．容器の液体を下から熱して液面との温度差をある程度作ると対流が起きるが，ベナール対流といって，適当な条件下では細胞状の領域に分かれてそれぞれの領域で対流が起こる．ある場所で熱エネルギーが供給されて別の場所で失われるとき，その間で空間的なパターンが生じるということだ．たとえて言えばなにかの都合で埋められて失われていくお金があるとき，埋められたお金に引きずられた取引（物理学では粘性に相当するが，経済学ではなんと呼ぶのだろうか？）の効果で街に怪しげな明かりが灯る，ということだろうか．保存則の仮定は現代物理学を根底から

支えるが，保存則の破れたところにもこのような興味深い現代物理学の話題がある．

数学セミナーに紹介して下さった東京大学の一瀬郁夫氏，原稿を読んで下さった東京大学の服部久美子氏，助言を下さった数学セミナーの佐藤大器氏に感謝します．