ゲージ不変性

—祝トップクォーク確認—

服部哲弥／はっとりてつや／数学・物理学

1　電子メール

電子メールとはコンピューターの記憶装置を郵便受けに使う通信手段で，科学者の世界では国内・国際を問わず便利な通信手段として普及している．1994 年 4 月 23 日の朝日新聞朝刊には「欧州の物理学界に電子メールで広まっている情報」などとしてトップクォークの存在の有力証拠が米国で得られたとのスクープが載り，4 月 26 日には実験グループが公式発表した．

「数セミ」1994 年 7 月号 (p50–52) にも早速益川敏英氏による「トップクォーク発見の報，走る」という記事が掲載された．トップクォーク発見の素粒子理論としての意義を，素粒子理論の歴史の概観を通して記述しておられる．益川氏は２０年以上前に小林誠氏とともにトップクォークの存在を「予言」された方であり,「数セミ」編集部の人選とタイミングに関する判断

の高さが光る．

益川氏の記事は，電磁気学の基本法則が確立した１９世紀まで遡る．電磁気学の基本法則が持つゲージ不変性は,「今や素粒子の運動法則の基本的骨格」であると書かれている．今日実験的に確かめられている素粒子の運動法則は全て何らかの意味でゲージ不変性を満たしていることを益川氏は述べておられるのだろうか．素粒子の運動法則を記述する理論的構造は場の量子論と総称されるので，素粒子の運動法則は今日実験的に確かめられている範囲ではゲージ場の量子論で記述されているということになる．益川氏の記事と同じ号 (p48–49) の米谷民明氏の記事「物理学と予想」にもゲージ理論が頻繁に登場する．

ゲージ場の量子論を「数セミ」の読者の数学的批判力に耐える形で記述するのはこの記事の目的ではないが，トップクォークをはるかかなたに意識しつつ，ゲージ不変性という言葉の解説を試みる．

2　カーナビゲーション

電磁気学は，日常お目にかかる電気力と磁気力が具体的にどういう現象を引き起こすかを記述する自然法則である．電磁場は多様な形でヒトの生活に影響を及ぼす．ナイロン製の衣類を乾燥機にかけて暗闇でこするとぱちぱち音がして光が見えるが，これは衣類に蓄積した電荷の放電である．かつて「冷蔵庫，電気なければただの箱」というＣＭがあったが，これは電線を流れる電流に言及している．カーナビゲーションを自動車にとりつけると現在位置を表示してくれるが，これ（ＧＰＳの部分）は人工衛星が発信し空中を伝幡してきた電磁波を受信して利用している．

電線を流れる電流と空中を飛び交う電磁波ではずいぶん違うようにみえるし，実際大きな違いがある．前者は電子が移動し，後者は「もの」の移動（フェルミオンの流れ）はない．実用上は違いが大事だが，現象を引き起こす電磁場の働きを記述するおおもとの方程式（基本法則あるいは第一原理）はどの現象でも共通である（正確には，共通であると仮定して実験や観測と矛盾がない）．それが真空中のマックスウェル方程

式と呼ばれる次の連立偏微分方程式である．

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div}\vec{E}(t,\vec{x}) &= 0\,, & (1)\\
\operatorname{div}\vec{B}(t,\vec{x}) &= 0\,, & (2)\\
\operatorname{rot}\vec{E}(t,\vec{x}) &= -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}(t,\vec{x})\,, & (3)\\
\operatorname{rot}\vec{B}(t,\vec{x}) &= \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}(t,\vec{x})\,, & (4)
\end{aligned}
$$

t は時刻を表す実変数，$\vec{x}=(x,y,z)$ は３次元空間の１点を指定する実３成分ベクトル．$\vec{E}=(E_x,E_y,E_z)$ と $\vec{B}=(B_x,B_y,B_z)$ は３成分実ベクトル値関数で，それぞれ電場と磁場を表す．電場と磁場をまとめて電磁場と呼ぶ．また

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\,,\\
&\operatorname{rot}\vec{E} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}, \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}, \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right),
\end{aligned}
$$

である．c は正定数で光速を表す．

コイルに電流を流すと磁石になるのは電荷や電流が電磁場を作ることを意味する．このことを記述する項

は簡単のためゼロとおいたが，それ以外には上式に省略はない．マックスウェル方程式の背景は，数学セミナー 1992 年 1 月号 (p58–63) に恒藤敏彦氏による記事「Maxwell 方程式」がある．ここでは上記の偏微分方程式が与えられたとしてそこから出発する．

物質（質点）の運動は時刻 t における質点の位置を表すベクトル値関数 $\vec{x}(t)$ で定まる．ニュートン力学の運動方程式は $\vec{x}$ に関する常微分方程式である．電磁場が質点に及ぼす影響はニュートン力学では次の運動方程式で与えられる：

$$m\,\frac{d^2\vec{x}}{dt^2}(t) = Q\left(\vec{E}(t,\vec{x}(t)) + \frac{d\vec{x}}{dt}(t) \times \vec{B}(t,\vec{x}(t))\right). \quad (5)$$

m は質量を表す正定数，Q は電荷を表す定数である．

3　1.5 ボルトの乾電池

電磁場 $(\vec{E},\vec{B})$ が時刻 t に依存しないとき (3) は

$$\mathrm{rot}\,\vec{E}(t,\vec{x}) = 0 \quad (6)$$

となるが，このとき

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\phi = -(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}) \tag{7}$$

となる関数 ϕ が存在する．実際，

$$\begin{aligned} \phi(t, \vec{x}) = &-\int_0^x E_x(t, s, 0, 0)\, ds \\ &-\int_0^y E_y(t, x, s, 0)\, ds - \int_0^z E_z(t, x, y, s)\, ds\,, \end{aligned} \tag{8}$$

とおけば (7) が成り立つことが (6) を用いて示せる．関数 ϕ は静電ポテンシャルと呼ばれる．乾電池を買うと電圧が 1.5 ボルトなどと表示されているが，これは電池の陽極での ϕ の値と陰極での ϕ の値の差を表す数値である．化学的方法で極の間に静電ポテンシャルの値の差を作り出す装置が電池である．

電磁場が t に依存するときは一般には (3) の右辺がゼロでないので (7) は (3) と矛盾する．しかし (7) を次のように拡張すればこの矛盾は解消する．

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\ . \tag{9}$$

ここで $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ は

$$\vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A} \tag{10}$$

を満たす関数．条件 (2) の下で (10) を満たす $\vec{A}$ の存在が言える．実際，

$$\begin{cases} A_x(t,\vec{x}) = \displaystyle\int_0^z B_y(t,x,y,s)ds - \int_0^x B_z(t,s,y,0)ds, \\ A_y(t,\vec{x}) = -\displaystyle\int_0^z B_x(t,x,y,s)\,ds\,, \\ A_z(t,\vec{x}) = 0\,, \end{cases} \tag{11}$$

とおけばよい．$\vec{A}$ は静電ポテンシャル ϕ と組になって登場したが，ベクトル値関数であり，ベクトルポテンシャルと呼ばれる．式 (8) (11) で定義された $(\phi, \vec{A})$ が条件 (2) (3) の下で (9) (10) を満たすことは直接確かめることができる．一般にマックスウェルの方程式を満たす電磁場 $(\vec{E}, \vec{B})$ が与えられたとき，(9) (10) がポテンシャル $(\phi, \vec{A})$ を決める偏微分方程式であり，その解が例えば (8) (11) である，ということが分かった．

電磁場 $(\vec{E}, \vec{B})$ が与えられても，(9) (10) の解 $(\phi, \vec{A})$ は一意的には決まらない．かってな（適当になめらか

な）関数 $\Lambda(t,\vec{x})$ に対して

$$\begin{cases} \phi' = \phi + \dfrac{\partial\Lambda}{\partial t}\ , \\ \vec{A}' = \vec{A} - \mathrm{grad}\,\Lambda\,, \end{cases} \tag{12}$$

とおくと，$(\phi',\vec{A}')$ も同じ電磁場 $(\vec{E},\vec{B})$ に対する (9) (10) の解になる．これを裏返して，電磁場 $(\vec{E},\vec{B})$ は変換 (12) に対して不変である，という言い方もできる．変換 (12) をゲージ変換と呼び，ゲージ変換に対して電磁場 $(\vec{E},\vec{B})$ が不変なことを電磁場の**ゲージ不変性**と言う．

$\Lambda = -\displaystyle\int_0^t \phi(s,\vec{x})\,ds$ と選ぶと恒等的に $\phi'(t,\vec{x}) = 0$ となるので，任意の電磁場 $(\vec{E},\vec{B})$ に対してポテンシャル，(9) (10) の解，を $\phi = 0$ となるように選べる．ポテンシャル４成分のうち１成分は物理現象を記述する上で不要なことがゲージ変換を用いて示された．系がゲージ不変性を持つことはその系を記述する自由度に余分があることを暗示する．

4　電子は波である

力学や電磁気学は（方程式が解ければ）ヒトの大きさ程度の現象を正確に説明するが，原子，原子核，素粒子といったミクロの大きさで起きる現象を正しく説明しない．ミクロの世界で成り立つ自然法則を量子論と呼び，量子論以前に正しいと考えられていた物理法則を区別のため古典論と呼ぶことがある．現在では量子論を第一原理と考える．古典論はヒトの大きさでは量子論の良い近似だが，原子より小さいスケールで起きる自然現象に対しては近似が悪い．

古典論的運動法則を知っているときに，その知識に基づいてより正確な自然法則である量子論的運動法則を見つける手続きを量子化という．量子化の具体例が「数セミ」1992 年 11 月号 (p74–78) 一瀬郁夫氏の記事「調和振動子の物理」にある．ニュートン力学を量子化すると量子力学が得られ，電磁場の中を運動する電子やクォークを記述する（より正確には，電子やクォークの生成消滅を無視できる現象は量子力学で記述できる）．古典力学では素朴には電子は質点であると考えるので，電子の位置を表す関数 $\vec{x}(t)$ が電子の状態の

全情報を与え，運動方程式は (5) である．量子力学では電子は波動関数と呼ばれる時空点 $(t, \vec{x}) \in \mathbf{R^4}$ 上の関数 $\psi(t, \vec{x})$ を用いて表される．時空点上の関数で表される物理的対象を場と呼ぶ．大学時代に量子力学を教わった宮沢弘成先生は「電子は波である」と強調された．電子やクォークが質点ではなく場で記述されることを強調された，と理解している．

古典力学 (5) を量子化すると ψ に関する次の偏微分方程式を得る：

$$\begin{aligned}&\sqrt{-1}\,\frac{h}{2\pi}\{Q(\mathrm{div}\,\vec{A})\psi + 2Q\vec{A}\cdot(\mathrm{grad}\,\psi) - 2m\,\frac{\partial\psi}{\partial t}\,\} \\ &- \frac{h^2}{4\pi^2}\,\mathrm{div}(\mathrm{grad}\,\psi) + Q^2A^2\psi + 2mQ\phi\psi = 0\,.\end{aligned} \tag{13}$$

h はプランク定数と呼ばれる正定数．$(\phi, \vec{A})$ は第 3節で定義した電磁気学のポテンシャル．ゲージ変換は (12) の変換と同時に ψ を

$$\psi'(t, \vec{x}) = \exp(-2\pi\sqrt{-1}Q\Lambda(t, \vec{x})/h)\,\psi(t, \vec{x}) \tag{14}$$

と変換することと定義する．ゲージ変換で (13) は不変な方程式になるが，これが量子力学における**ゲージ不変性**を意味する．

ニュートンの方程式とマックスウェルの方程式は，ポテンシャル $(\phi, \vec{A})$ を定義しなくても電磁場 $(\vec{E}, \vec{B})$ だけで記述できる．だから古典論では（電磁）ポテンシャルやゲージ変換に立ち入る必要はない，とも言える．量子力学では (13) のように $(\phi, \vec{A})$ が本質的な自由度になるので，ゲージ変換を避けて通れなくなる．

ゲージ変換 (14) (12) を偏微分方程式 (13) に代入することで方程式のゲージ不変性を確かめるのはやさしいが，前節までの知識を仮定せずにこの変換の存在を見抜くのはやさしくないかも知れない．量子化の手続きを実行すれば，ゲージ不変性が自然に見えるような (13) の書き換えが得られる．書き換えは演算子を使えばやさしいが，ここでは深入りしない．

5　相性の問題

量子力学は電子やクォークの個数が変わらない現象を記述する．しかし，加速器におけるトップクォークの発見とはトップクォークを新たに作り出すことだから，素粒子の生成消滅に関わる．クォークの生成とい

う複雑な現象をも定量的に記述する方法が場の量子論である．場の量子論は場の古典論を量子化して得られる．量子力学の電子も古典電磁気学の電磁場も場で書かれている．従って，電子が電磁場を作り，電磁場が電子に力を及ぼすという電子と電磁場の自然法則は，電子と電磁場の系について場の量子化をすることにより，場の量子論で記述される．この理論を量子電磁力学と呼ぶ．量子電磁力学においてもゲージ変換を古典論の類推で考えることができて，ゲージ不変性が成り立つ．

場の量子論は矛盾なく，かつ，現実の物理現象の説明や予言を定量的に行えるように定式化するのが難しい．この意味で現時点で最も実用的な汎用性のある場の量子論の定式化は摂動論と呼ばれる方法である．摂動論的場の量子論の無矛盾性は,（摂動論的）くりこみ可能性という概念で論じる.（さらに，ゲージ不変性があると第 3節の終わりに書いたように余分な自由度が理論の中にあるので，観測されない自由度が理論的に出てこないことを確かめる必要もある.）量子電磁力学はくりこみ可能である．実験事実の定量的説明や予言

の能力は非常に高く，物理学的にも数学的にも場の量子論が「良い」研究対象であることを示唆する．

古典電磁気学では，ゲージ変換は (12) で与えられ，この変換に対してマックスウェルの方程式は不変であった．電磁ポテンシャル $(\phi, \vec{A})$ は４成分だが，これを１２成分にして，

$$
\begin{aligned}
&A'_{\mu,1} = A_{\mu,1} - \frac{\partial \Lambda_1}{\partial x_\mu} + g\left(\Lambda_2 A_{\mu,3} - \Lambda_3 A_{\mu,2}\right) + O(\Lambda^2)\,,\\
&A'_{\mu,2} = A_{\mu,2} - \frac{\partial \Lambda_2}{\partial x_\mu} + g\left(\Lambda_3 A_{\mu,1} - \Lambda_1 A_{\mu,3}\right) + O(\Lambda^2)\,,\\
&A'_{\mu,3} = A_{\mu,3} - \frac{\partial \Lambda_3}{\partial x_\mu} + g\left(\Lambda_1 A_{\mu,2} - \Lambda_2 A_{\mu,1}\right) + O(\Lambda^2)\,,\\
&\mu = 0, 1, 2, 3\,,
\end{aligned}
$$

という変換を考える．但し，ϕ を A_0 と書き直し，$x_0 = -t$ とおいた．g は定数．$g = 0$ のときこの式は (12) を３つ独立に並べただけになるが，$g \neq 0$ のときは複雑な変換になる．４０年前 Yang と Mills はこの複雑な変換で不変な，電磁気学のアナロジーを発見した．この複雑な変換はリー代数によって自然に「美しく」表現できる．リー代数の分類毎に電磁気学のアナロジー

が作れるが，これらをゲージ理論と呼び,「複雑な変換」は電磁気学同様ゲージ変換と呼ぶ．対応するリー代数が非可換な代数のとき，非可換ゲージ理論と呼ぶ.

ゲージ理論を量子化したものがゲージ場の量子論である．２０年前非可換ゲージ場の量子論の摂動論的くりこみ可能性が証明された．さらに，摂動論的くりこみ群の理論に基づいて漸近自由性という強い無矛盾性も示された．**ゲージ不変性**が重視される真の理由（たぶん）は，気むずかしい場の量子論と相性がよいことである．時空 $\mathbf{R^4}$ 上の場の量子論で漸近自由という良い性質を持つことが知られているのは本質的に非可換ゲージ場の量子論だけである．しかし，なぜ相性がいいのかは分からない．計算すると漸近自由性が導かれるが直感的に理解する説明はまだない，と漸近自由性を導出した 't Hooft が指摘していた．数学や物理学においてすら相性とはそういうものだろうか.

6　トップクォーク

トップクォークの予言を説明するには少なくとも２つの理論的要素が残っている．一つはヒッグス機構である．これは，質量がゼロでないベクトル粒子の摂動論的場の量子論を矛盾なく定義する方法である．「数セミ」1994 年 3 月号 (p24–29) の近藤敬比古氏の記事「物理学における未解決・未発見」に，ヒッグス機構の分かりやすいたとえ話がある．もう一つはＣＰ対称性の破れという実験事実の理論的説明である．トップクォーク（を含むクォーク・レプトン第３世代）が存在するとＣＰ対称性の破れが自然に説明できることを小林・益川両氏が発見したのがいわゆるトップクォークの予言である．

近藤氏の記事に「（ヒッグス粒子の発見は，当時）未発見の６番目のトップクォークに比べたら格別の重要性がある」とある．これはクォークの発見が重要でないという意味ではない．例えば，クォークの質量を正確に予言あるいは説明できる理論はいまだにないので，トップクォークについてもいつどんな質量（エネルギー）で発見されるのか予測できなかった．トップ

クォークの発見と詳しい実験結果はそれ自体格別の重要性がある．第一報によるとトップクォークの質量はエネルギー換算で $174GeV$ とのことだ．他のクォークに比べれば異様に重いが，未発見の自然法則を簡単に予想させるほど重くはないようだ．今後はこの数字を含むクォークの質量の値の説明が課題の一つとなる．ヒッグス機構はこの質量の問題にも密接に関係し，トップクォーク発見のあとに未解決の問題として残される，ということなどが近藤氏の指摘の真意であろうか．

非可換ゲージ場の量子論にヒッグス機構とＣＰ対称性の破れの説明を組み込むことでトップクォークが理論的に予言された．しかし，実際の歴史ではこれらの理論的構成要素が一つずつ順に自然法則として確立したのではない．ヒッグス機構などは未だに明確な実験的検証がない．既存の諸説のうちどれが実際の自然現象を記述するのか実験的検証のない段階で自ら適切な組み合わせを選び，その枠内でより精密な理論を構築することが必要であった．益川氏の記事の最後の節にこのような苦労があまりにもさりげなく書かれているように私には思われた．

トップクォークについてご教示下さった東北大学の日笠健一先生と原稿作成に関して助言を下さった数学セミナー編集部の佐藤大器氏に感謝します.