くりこみ群解析による高次元gasket上のself-avoiding pathの漸近的性質

服部哲弥 (名大多元)　津田稔朗 (第一生命)

1．dSG 上の self-avoiding path

dSG (d 次元 pre-gasket) $(d=2,3,4,\cdots)$：

$d=2$: SG (pre-**S**ierpiński **g**asket) の d 次元版

d 次元単位単体 $F_0 = Ov_1v_2\cdots v_d \subset \mathbb{R}^d$

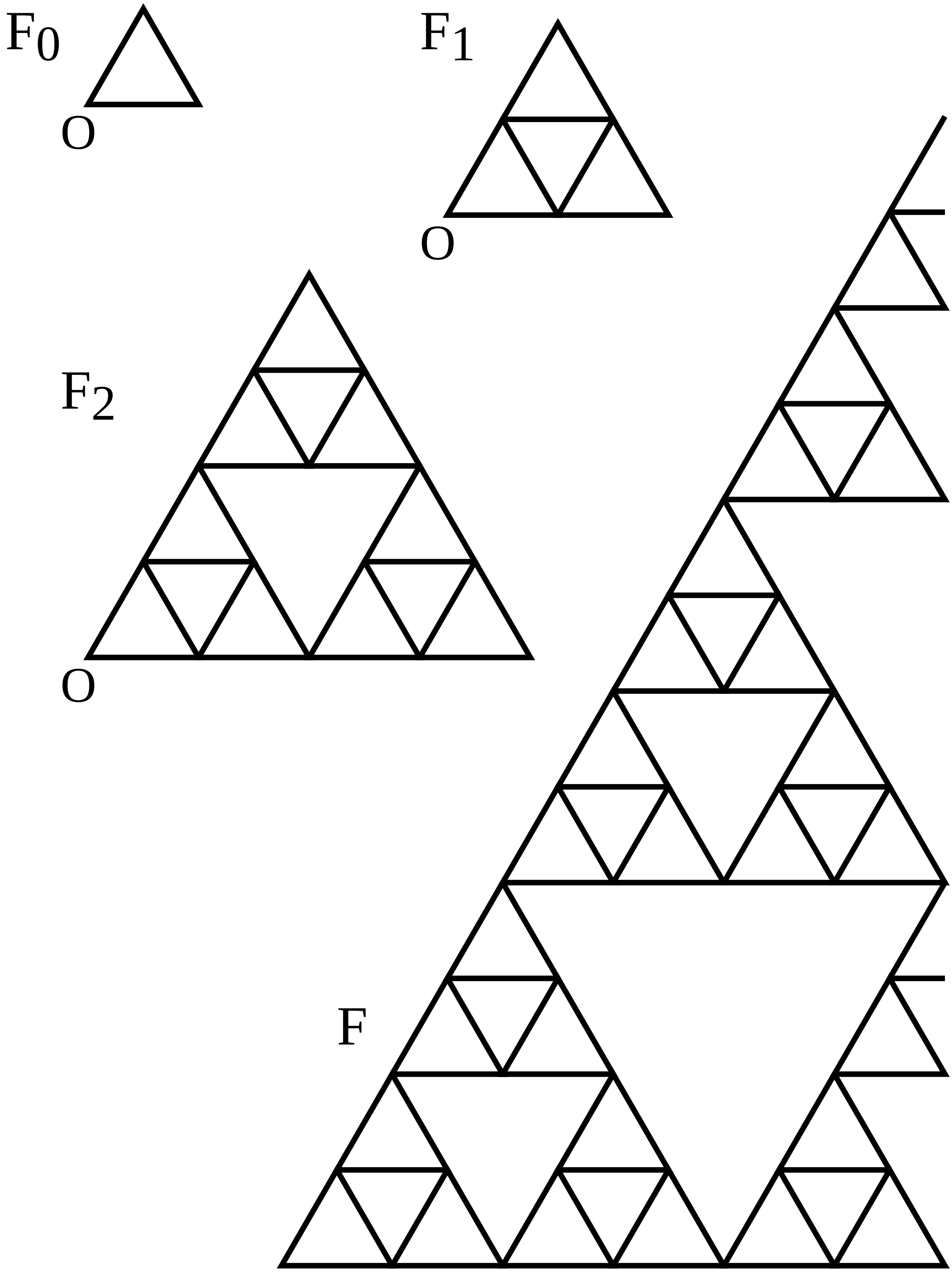
$F_n = d+1$ 個の F_{n-1} をつないで 1 辺 2^n の d 次元単体 $O\ 2^n v_1\ \cdots 2^n v_d$

$F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset \mathbb{R}^d$

$G_n = \{F_n$の頂点$\}$

$B_n = \{$ 辺 $\}$

dSG: $F=(G,B)$, $G=\bigcup_n G_n$, $B=\bigcup_n B_n$



F_0
O
F_1
O
F_2
O
F

W_0: SAP on dSG (**S**elf-**A**voiding **P**ath)

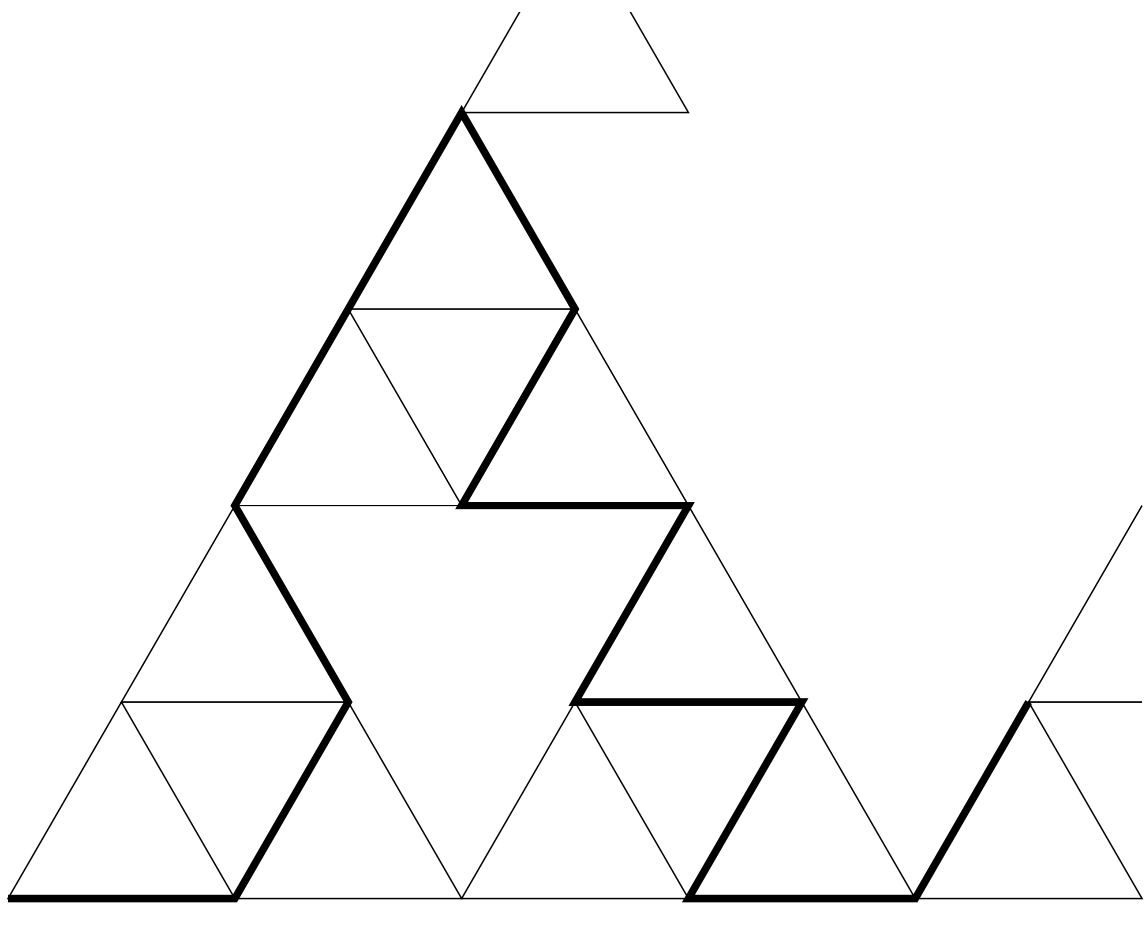
$w:\ \mathbb{Z}_+ \to G$

長さ $L(w) = \inf\{i \mid w(j) = w(i),\ j \geqq i\}$

$W_0 = \{w:\ \mathbb{Z}_+ \to G \mid$

(path) $\overline{w(i)w(i+1)} \in B,\ i = 0, 1, \cdots, L(w) - 1,$

(**self-avoiding**) $w(i_1) \neq w(i_2),\ i_1 < i_2 \leqq L(w)\}$



w∈W_0

L(w)=13

$\boxed{\text{Path の漸近的性質}}$

k 歩でどれくらい遠くまで届くか？

Mean square displacement の指数 γ:$|w(k)| \approx k^{\gamma}$

$d = 2, 3$: Hattori-Hattori-Kusuoka

問. dSG, $d = 2, 3$, の成果を一般化できるか？

まずは dSG, $d = 4, 5, 6, \cdots$？**難しい．** 何故？

dSG, $d = 2, 3$, の解析：

「前半部分」 SAP のくりこみ群解析（**離散力学系の軌道の議論**）

「後半部分」 くりこみ群解析の結果を SAP の漸近的性質に翻訳（**path 上の確率測度の議論**）

目標：dSG 上の SAP について「後半部分の一般論」（くりこみ群についての仮定から SAP の漸近的性質を得るような定理 → くりこみ群に何を求めれば十分かを明確にしたい）

2．くりこみ群

くりこみ群の (不十分な) 定義：無限自由度系の解析の一手段であって以下の性質を持つもの

(i) 距離空間に値を取る確率過程 (path 上の測度) の距離空間の**「スケール変換」**に対応する変化 (測度空間の上の力学系) を適切なパラメータ空間上の力学系として表現すること

(ii) 追跡すべき軌道が**大局的**に素直なこと

(iii) 軌道の固定点への収束または固定点近傍の線型化が確率過程の漸近的性質を与えること

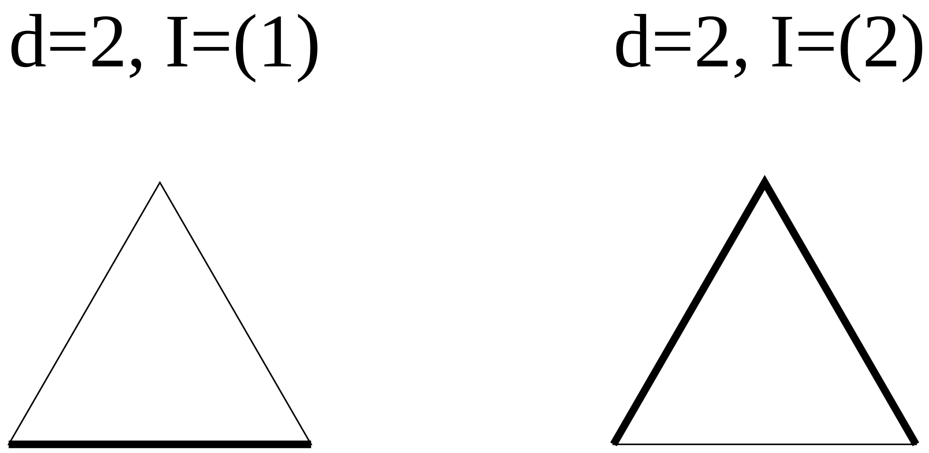
dSG 上の SAP の漸近的性質という問題を力学系 (recursion) の軌道解析の問題に帰着させる

くりこみ群のrecursionが閉じるためにSAP **を分類**

(A) SAP が一つの単位単体を通る通り方

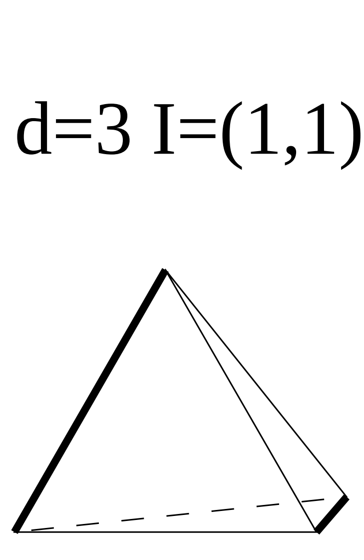
例. • $d = 2$: $\mathcal{I}_2 = \{(1), (2)\}$

$\{\overline{Ov_1}\}$ (１歩で通り抜ける) か $\{\overline{Ov_1v_2}\}$ (２歩で通り抜ける)



• $\mathcal{I}_3 = \{(1), (2), (3), (1, 1)\}$

$(1, 1)$ は２度通り抜ける



添字集合

$$\mathcal{I}_d = \{(i_1, i_2, \cdots, i_k) \in \mathbb{Z}_+^k \mid$$

$$k = 1, 2, 3, \cdots,\ 0 < i_1 \leqq i_2 \leqq \cdots \leqq i_k\,,$$

$$i_1 + i_2 + \cdots + i_k + k \leqq d + 1\}$$

命題 1　*SAP* w の単位単体の通り方は,

ある $I = (i_1, i_2, \cdots, i_k) \in \mathcal{I}_d$ に対して

$$\Delta_I = \{\overline{O v_1 v_2 \cdots v_{i_1-1} v_{i_1}}, \overline{v_{i_1+1} \cdots v_{i_1+i_2}}, \cdots,$$

$$\overline{v_{i_1+\cdots i_{k-1}+1} \cdots v_{i_1+\cdots i_k}}\}$$

と合同

(B) F_n 上の SAP の分類

• path の組 (自己・相互回避するもの) も必要

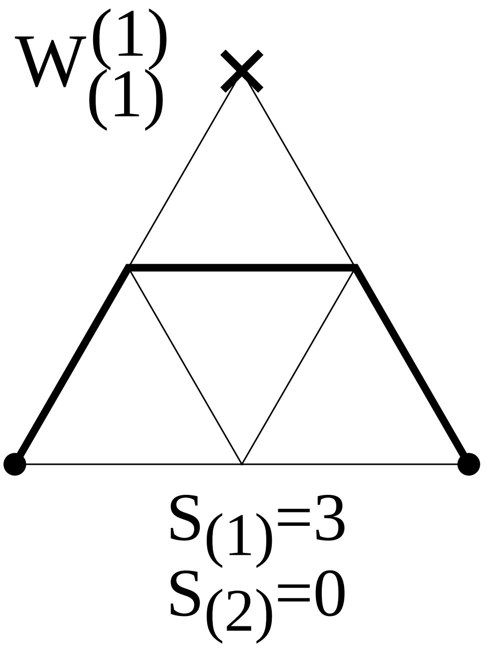
$W_I^{(n)}$, $I \in \mathcal{I}_d$

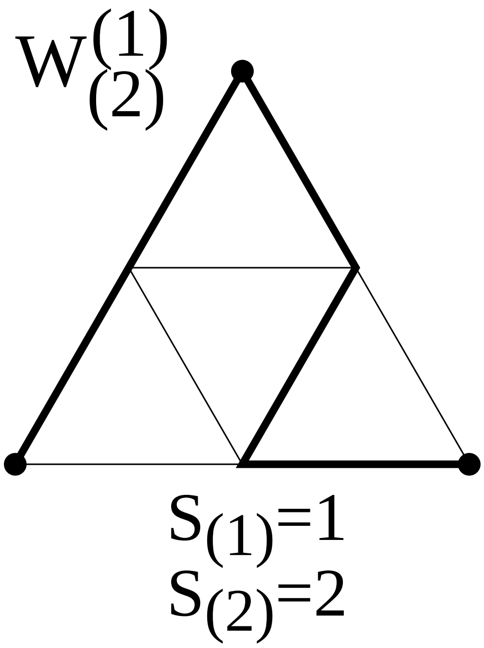
F_n の頂点 $v_{n,i} = 2^n v_i$, $i = 1, \cdots, d$

例.　$d = 2$

$I = (1)$ $O \to v_{n,1}$　($v_{n,2}$ を通らない)

$I = (2)$ $O \to v_{n,1} \to v_{n,2}$





$d = 3$

(1), (2), (3) $d = 2$ と同様

$I = (1,1)$:　$O \to v_{n,1}$ と $v_{n,2} \to v_{n,3}$ の組 (互いに交わらない)

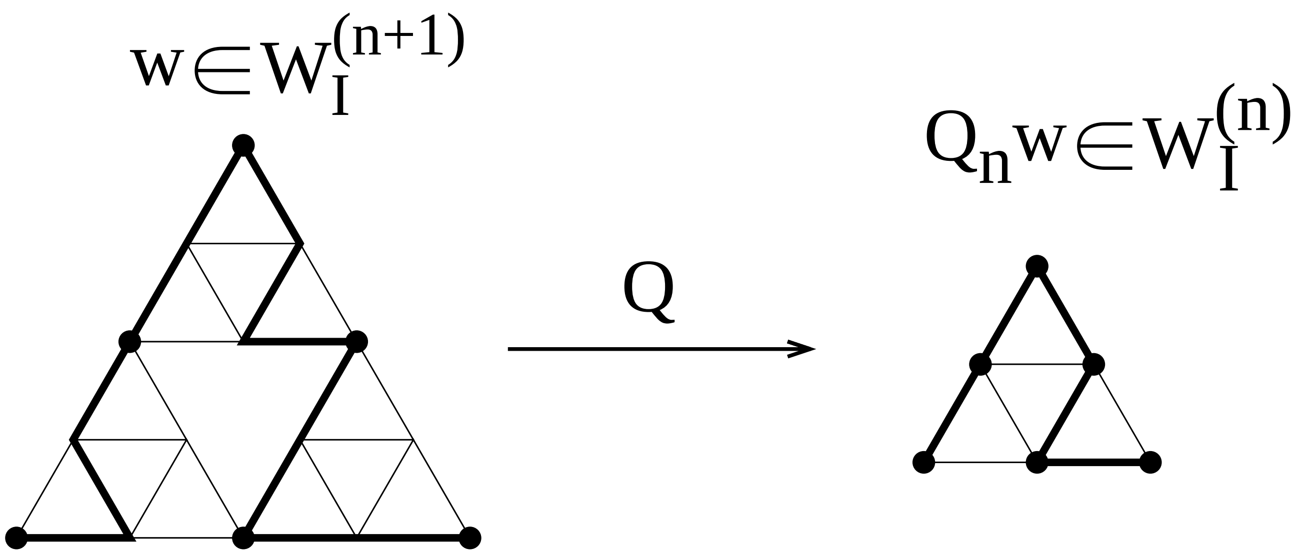
• くりこみ群 (SAP における「スケール変換」)

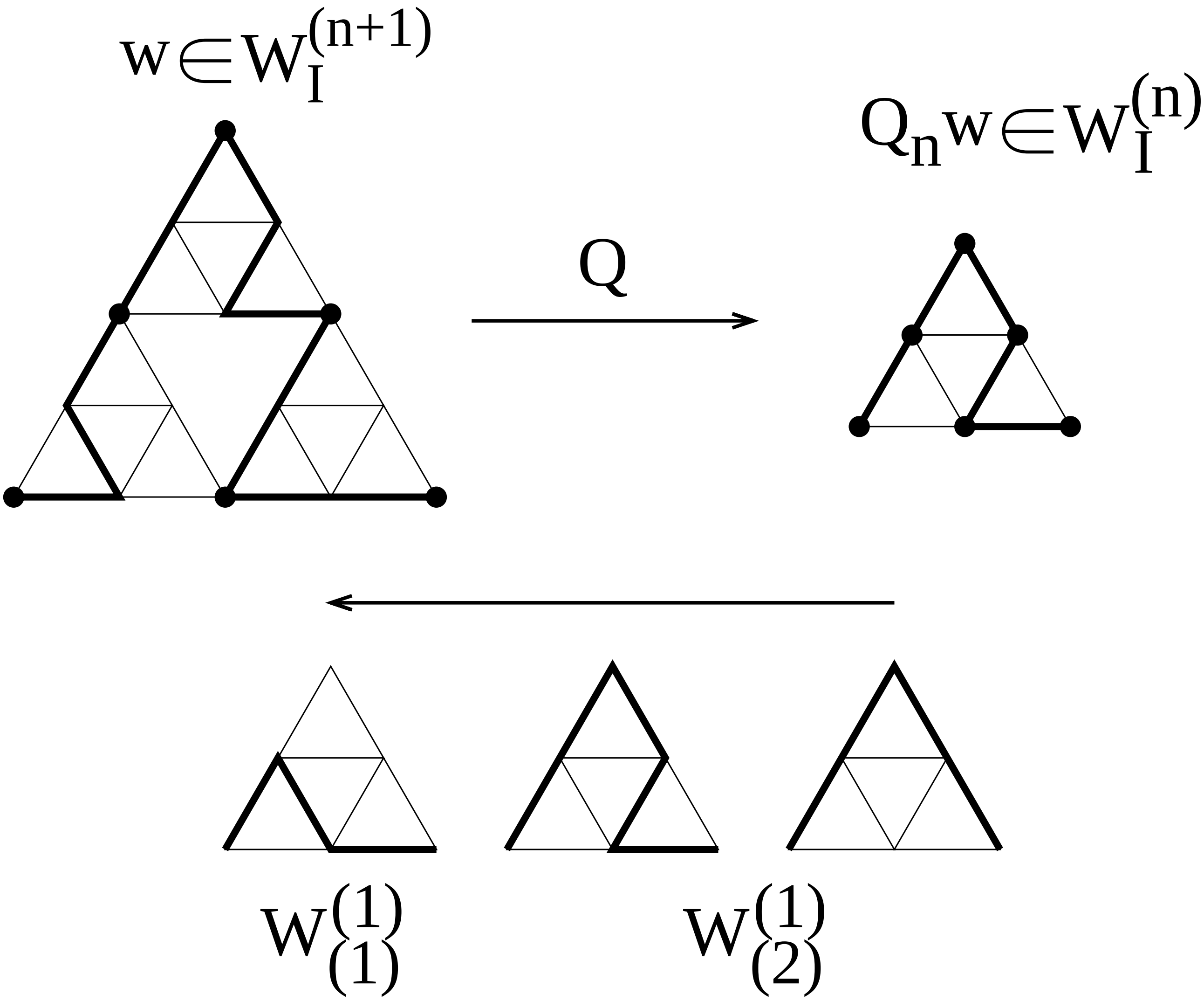
Decimation. $Q_n: \ W_I^{(n+1)} \to W_I^{(n)}$

$$(Q_n w)(j) = 2^{-1} w(T_{n,j}(w)), \quad j \in \mathbb{Z}_+;$$

$T_{n,i}$ (G_n の 'hitting times')： $T_{n,0}(w) = 0$,

$$T_{n,i+1}(w) = \inf\{j > T_{n,i}(w) \mid w(j) \in G_n \setminus \{w(T_{n,i}(w))\}\}$$





漸近的性質 $n \to \infty$：decimation Q_n の逆

$(w \in W_I^{(n)}$ の各１歩に「細かい構造」を追加)

「細かい構造　」⇔　$W_J^{(1)}$

w: SAP または相互回避する SAP の組, $I \in \mathcal{I}_d$

$s_I(w)$: w が I 型で通る単位単体の個数

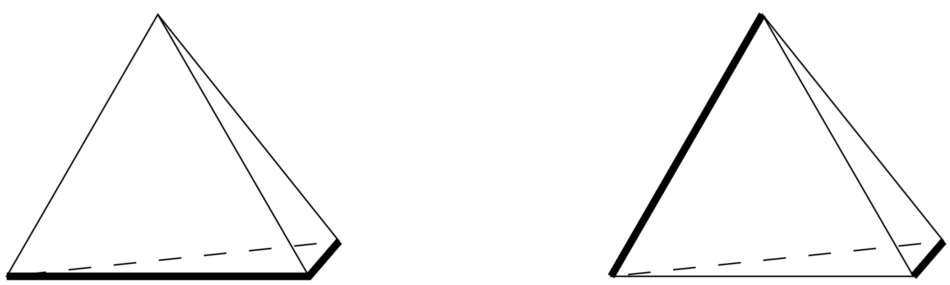
SAP の総歩数 L との関係：

$I = (i_1, \cdots, i_k)$, $w = (w_1, w_2, \cdots, w_k) \in W_I^{(n)}$

$$\sum_{i=1}^{k} L(w_i) = \sum_{J \in \mathcal{I}_d} |J| s_J(w)$$

$(J = (j_1, \cdots, j_\ell)$ に対して $|J| = j_1 + \cdots + j_\ell)$

| I |=2



• $(s_J,\ J \in \mathcal{I}_d)$ の $(W_I^{(n)},\ I \in \mathcal{I}_d)$ に関する母関数 $\vec{X}_n = (X_{n,I},\ I \in \mathcal{I}_d)$

$$X_{n,I}(\vec{x}) = \sum_{w \in W_I^{(n)}} \prod_{J \in \mathcal{I}_d} x_J^{s_J(w)}$$

$$\vec{x} = (x_J,\ J \in \mathcal{I}_d), \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

命題 2 $\vec{X}_{n+1} = \vec{X}_n \circ \vec{X}_1, \quad \vec{X}_0(\vec{x}) = \vec{x}$

証明. $w \in W_I^{(n)}$ から $W_I^{(n+1)}$ の path を得る手続き：

「F_n の $(d+1)^n$ 個の単体それぞれについて，w の通り方が J 型のとき $W_J^{(1)}$ の要素で置き換える」

□

くりこみ群：$\vec{\Phi} = \vec{X}_1$ が定義する $\mathbb{R}_+{}^{\mathcal{I}_d}$ 上の力学系

くりこみ群が有限次元← dSG が finitely ramified

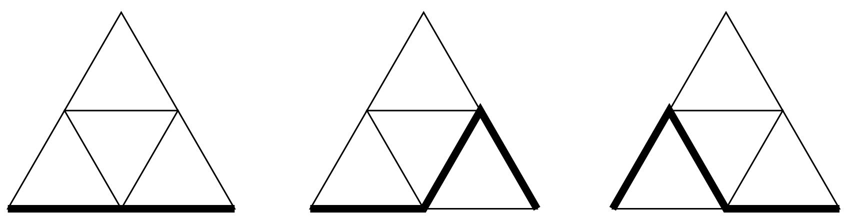
例.　2SG $\mathcal{I}_2 = \{(1),(2)\}$

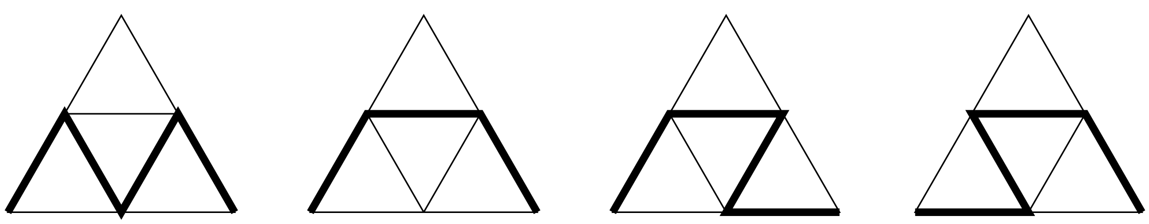
F_1 の O から $2v_2$ までの SAP で $2v_{1,1}$ を通るものの集合 $W^{(1)}_{(1)}$，通らないものの集合 $W^{(1)}_{(2)}$

1 歩で通り抜ける単位三角形 $s_{(1)}(w)$ 個，2 歩で通るもの $s_{(2)}(w)$ 個

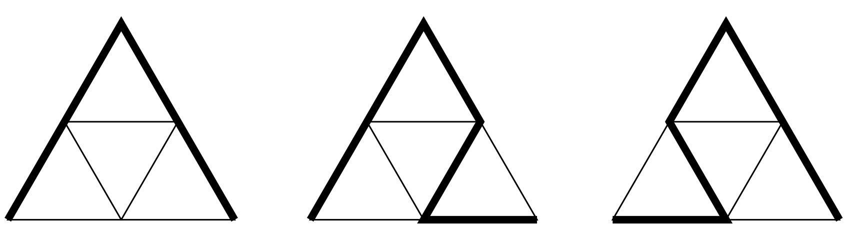
$$\vec{\Phi}(x,y) = ((x+y)^2 + x^2(x+2y), (x+2y)xy)$$

I=(1)





I=(2)



$\vec{\Phi}$: 非負係数多項式　$\leftarrow$　$W^{(1)}_{I}$ は有限集合

でも，やさしくはない

くりこみ群の不変部分集合：SAP らしさを意味すると思われる不変部分集合 ($d=2,3$ の経験則)

$I=(i_1,\cdots,i_k), J=(j_1,\cdots,j_\ell)\in\mathcal{I}_d$ に対して $I\oplus J$ を，$i_1,\cdots,i_k,j_1,\cdots,j_\ell$ の非減少列への並べ替え

$$\Xi_d=\{\vec{x}\in{\mathbb{R}_+}^{\mathcal{I}_d}\mid I\oplus J\in\mathcal{I}_d \text{ なる全ての } I,J\in\mathcal{I}_d \text{ に対して } x_{I\oplus J}\leqq x_I x_J\}$$

命題 3 Ξ_d は $\vec{\Phi}$ の不変部分集合

例. $\Xi_3=\{\vec{x}\in{\mathbb{R}_+}^{\mathcal{I}_3}\mid x_{(11)}\leqq x_{(1)}^2\}$ ◇

直感「2 本以上の SAP が交わらないという性質は decimation 不変」

３．主結果

dSG 上の SAP の漸近的性質を保証するくりこみ群の軌道の性質の定式化

$\vec{x}_c$ が self-avoiding fixed point (**SAFP**) とは：

(FP1) $\vec{\Phi}(\vec{x}_c) = \vec{x}_c$

(FP2) $\vec{\Phi}$ の Jacobi 行列 $\mathcal{J}$ について，$\mathcal{J}(\vec{x}_c)$ は対角化可能，最大固有値 $\lambda > 1$, | その他 | < 1.
λ に対応する左固有ベクトル $\vec{v}_L$ は全成分正.
右固有ベクトルについて $v_{R,(1)} > 0$

(FP3) $x_{c,I} \neq 0$ ならば，Φ_I に $m_{(1)} > 0$ と「$x_{c,J} = 0 \to m_J = 0$」を満たす項 $\displaystyle\prod_{J \in \mathcal{I}_d} {x_J}^{m_J}$ がある

(FP4) $\vec{x}_c \in \Xi_d \setminus \{O\}$

$\beta_c \in \mathbb{R}$ が**臨界点**とは $\vec{x}_{can}(\beta_c) = (e^{-\beta_c |I|},\ I \in \mathcal{I}_d)$ に対して $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to\infty} \vec{X}_n(\vec{x}_{can}(\beta_c)) = \vec{x}_c \text{ となる SAFP } \vec{x}_c}$ が存在すること

$W^{(0)}$：原点 O から出発する SAP の集合

$N(k)$： O から出発する歩数 $L=k$ の SAP の本数

$\tilde{P}_k$：原点 O から出発する歩数 k の SAP の集合上の一様分布（E_k： 期待値）

定理 4 (Hattori–Tsuda '01) 臨界点 $\beta_c \in \mathbb{R}$ が存在すれば

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \log N(k) = \beta_c$$
$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\log k} \log E_k[|w(k)|^s] = s\gamma, \ \ s \geqq 0$$

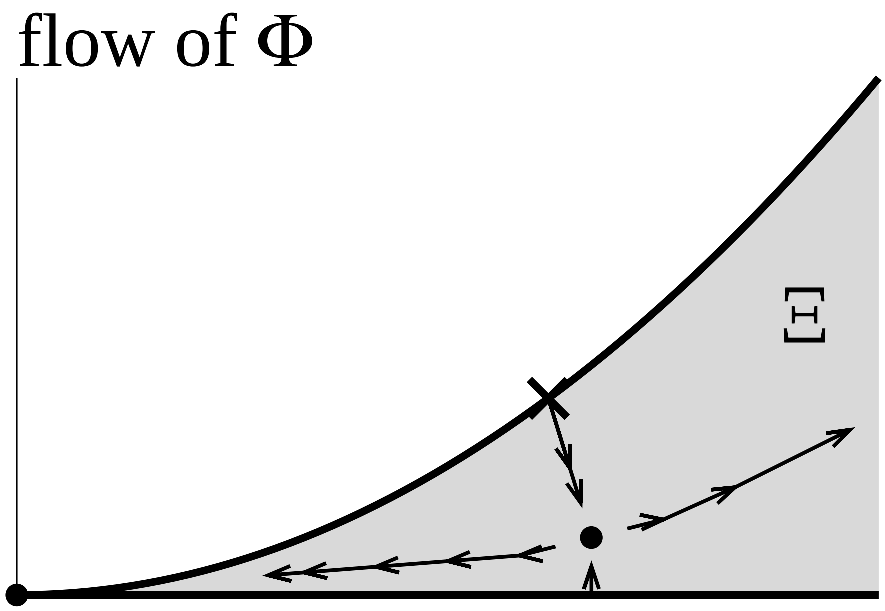
$\gamma = \dfrac{\log 2}{\log \lambda}$, λ: β_c に対応する SAFP の (FP2)

- $|w(k)| \approx k^\gamma$

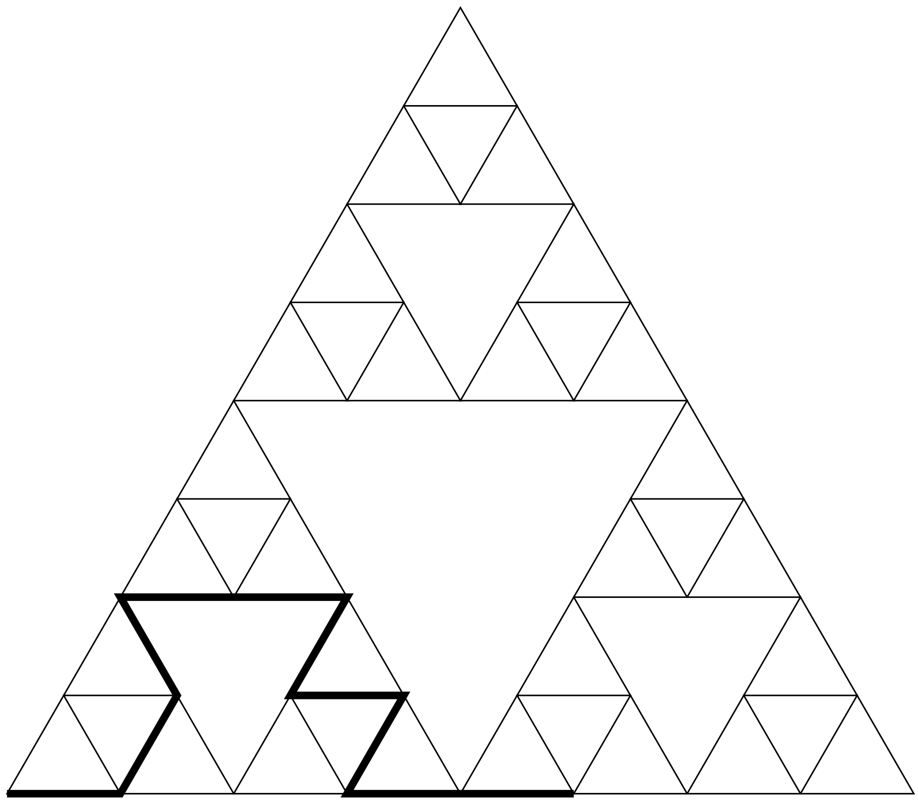
- 臨界点は (存在すれば) ただ一つ (cf. SAFP の唯一性は $d \geqq 4$ では未解決)

- β_c, λ はくりこみ群だけで決まり，元の dSG や SAP に戻る必要がない

くりこみ群が SAP の漸近的性質を決める



for SAP on dSG,
if this global RG flow structure holds true, then



$$|w(k)| \quad k^{\gamma} \qquad\qquad \gamma = \frac{\log 2}{\log \lambda}$$

4．証明

$Z_{n,I}(\beta) = X_{n,I}(\vec{x}_{can}(\beta))$

定理 5

$$\lim_{n\to\infty} Z_{n,I}(\beta) = \begin{cases} 0, & \beta > \beta_c\,, \\ x_{c,I}\,, & \beta = \beta_c \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_I Z_{n,I}(\beta) = \infty, \quad \beta < \beta_c$$

- $\vec{\Phi}$ の各成分は 2 次以上の多項式

β が小→ $\vec{x}$ が小→ $\log X_{n+1,*} \approx 2 \log X_{n,*}$

$\log X_{n,I} \approx -2^n \log \dfrac{1}{\max_J x_J} \to -\infty$

$\mathcal{D}om(\vec{x}_c)$：SAFP $\vec{x}_c$ に対して $\lim_{n\to\infty} \vec{X}_n(\vec{x}) = \vec{x}_c$ なる $\vec{x} > 0$ の集合

$$\mu_{\vec{x},n,I}[\{w\}] = \frac{1}{X_{n,I}(\vec{x})} \prod_{J\in\mathcal{I}_d} x_J^{s_J(w)} \quad (\text{on } W_I^{(n)})$$

定理 6 (端点固定歩数分布の漸近形) $\vec{x}_c$ が *SAFP* で $\vec{x} \in \mathcal{D}om(\vec{x}_c)$ とする．$x_{c,I} \neq 0$ ならば，スケールされた一般化歩数 $(\lambda^{-n}s_J,\ J \in \mathcal{I}_d)$ の $\mu_{\vec{x},n,I}$ の下での結合分布は $n \to \infty$ で $\mathbb{R}^{\mathcal{I}_d}$ 上の確率測度に弱収束．*(さらに，C^∞ 密度関数の存在と正値性)*

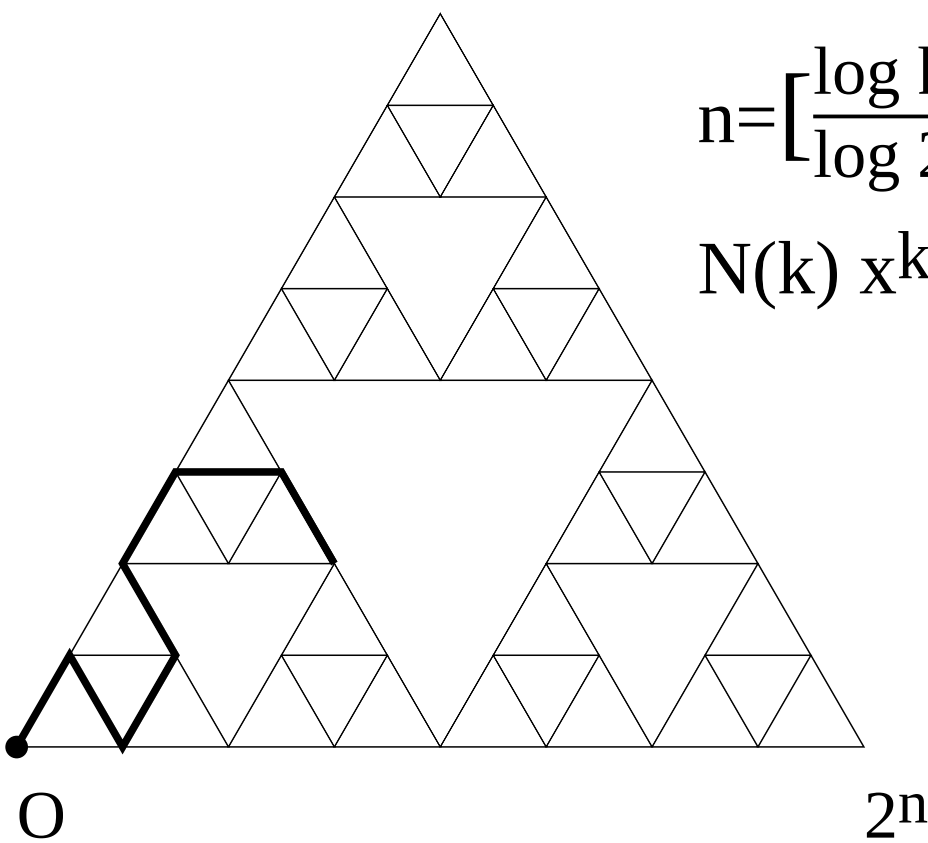
- $(\lambda^{-n}s_J,\ J \in \mathcal{I}_d)$ の $\mu_{\vec{x},n,I}$ の下での分布 $p_{\vec{x},n,I}$ の母関数は $\displaystyle\int_0^\infty e^{\vec{t}\cdot\vec{\xi}} p_{\vec{x},n,I}[d\vec{\xi}] = \frac{X_{n,I}(\vec{x}(\vec{t}))}{X_{n,I}(\vec{x})}$
Recursion で定義される多変数正則関数の一般論から広義一様収束
- 密度の存在，滑らかさ，正値性：総歩数の分布の分散が正 ＋ recursion → 極限特性関数の遠方での減少

- $N(k)$ の上からの評価

$$\nu(w) = \min\{n \mid w(k) \in G_n\,,\ 0 \leqq k \leqq L(w)\}$$

$$\rightarrow \quad L(w) > 2^{\nu(w)-1}$$

$+$ $\vec{Z}_n(\beta_c)$ が bdd. $+$ くりこみ群と類似の考察



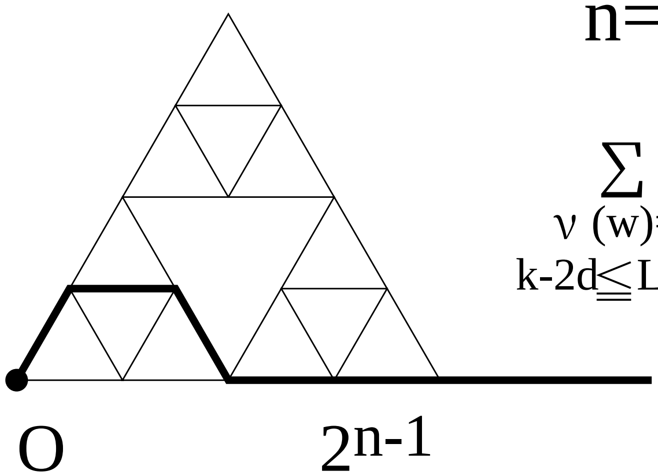
$$n = \left[\frac{\log k}{\log 2}\right] + 1$$

$$N(k)\, x^k < \sum_{\nu(w) \leqq n} x^{L(w)}$$

- $N(k)$ の下からの評価

スケールされた総歩数の分布 $\overline{p}_{\vec{x}_{can}(\beta_c),n,I}$ の収束の速さに関する Tauber 型評価　＋　path を延ばす

単射 $\{w \in W^{(n)}_{(1)} \mid L(w) \leqq k\} \to \{w \in W^{(0)} \mid L(w) = k\}$



$$n=\left[\frac{\log k}{\log 2}\right]$$

$$\sum_{\substack{\nu(w)=n \\ k-2d \leqq L(w) \leqq k}} x^{L(w)} < N(k)\, x^{k-2d}$$

- 長い path と短い path の大偏差的評価

$$\sum_{\substack{w \in W^{(0)};\\ \nu(w) \leqq n,\\ L(w) \geqq \lambda^{n+(m/2)}}} e^{-\beta_c L(w)}$$ などが小さい

$\rightarrow \quad E_k[\|w\|^{sd_w}]$ についての対応する評価

$$\|w\| = \max\{|w(k)| \mid k = 0, 1, 2, \cdots, L(w)\}$$

- Reflection principle

$\rightarrow \|w\| \asymp |w(k)|$

$$L(w) \overset{\text{LDP}}{\Leftrightarrow} \nu(w) \Leftrightarrow \max|w(i)| \overset{\text{RP}}{\Leftrightarrow} |w(L(w))|$$

5．4SG 上の SAP (くりこみ群の軌道解析)

- SAP の漸近的性質への翻訳 $\to$ **解決**
- くりこみ群の大局的軌道解析 $\to$ **不満な現状**

各 d 毎に証明　$d = 2, 3$ HHK'90, HK'92, HHK'93

$d = 4$ →今回 (restricted model)

Restricted model $s_J(w) = 0,\ J \notin \mathcal{K}_{res} = \{(1), (11)\}$

直接数え上げることで以下を得る

命題 7

$$\Phi_{(1)}(x, y, 0, 0, 0, 0)$$
$$= x^2 + 3x^3 + 6x^4 + 6x^5 + 12x^3 y + 30x^4 y$$
$$+ 18x^2y^2 + 78x^3y^2 + 96x^2y^3 + 132xy^4 + 132y^5$$
$$\Phi_{(1,1)}(x, y, 0, 0, 0, 0)$$
$$= x^4 + 2x^5 + 4x^3y + 13x^4y + 32x^3y^2 + 88x^2y^3$$
$$+ 22y^4 + 220xy^4 + 186y^5$$

このことから以下を得る．証明は具体的かつ長い

定理 8

$\Phi_{(1)}(x,y,0,0,0,0) = x$, $\Phi_{(11)}(x,y,0,0,0,0) = y$ は $\Xi_4 \setminus \{\vec{0}\}$ にただ一つの解 $\vec{x}_c = (x_c, y_c, 0,0,0,0)$ ($x_c = 0.32649\cdots$, $y_c = 0.0279\cdots$) を持ち，それは *SAFP* である.

Restricted model の臨界点 $\beta_{c,res}$ が存在する

$$x_c = g(x_c) > 0;$$

$$\begin{aligned}
g(x) = \\
&- 3162456 + 3162456x + 27935028x^2 + 82351390x^3 + 534340195x^4 \\
&- 22712313853x^5 - 22749190609x^6 + 173488539516x^7 + 520491536505x^8 \\
&+ 159919155293x^9 - 1067593750255x^{10} - 3355567112768x^{11} \\
&- 7117707818273x^{12} - 8049744033921x^{13} + 3218074725393x^{14} \\
&+ 29132597332920x^{15} + 58986824992938x^{16} + 74778447132144x^{17} \\
&+ 70897214418552x^{18} + 55063893147408x^{19} + 36096140965140x^{20} \\
&+ 19669482325692x^{21} + 7841354208804x^{22} + 1771680351168x^{23} \\
&+ 149567809608x^{24}
\end{aligned}$$

$$x_c = 0.326490898\cdots$$

$$\lambda = 3.17282866849\cdots$$

$d=4$restricted model のくりこみ群解析（定理 8）

＋　「後半部分の一般論」（定理 4）　によって,

$d=4$ restricted model の mean square displacement 指数が解決する

定理 9 $d=4$*restricted model* に対して

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\log k}\log E_{res,k}[|w(k)|^s]=s\gamma,\quad s\geqq 0.$$

$E_{res,k}$ は原点から出発する長さ k の *restricted SAP* の上の一様分布に関する期待値,

$\gamma=\dfrac{\log 2}{\log\lambda}=1/1.6657696\cdots$