20050707 木 15:45-17:15　確率論セミナー
講師：　鈴木 由紀 氏（慶応大・医）
題目：　片側 Brown ポテンシャルをもつ拡散過程
概要：　１次元ランダム媒質の中の拡散過程の問題を扱う．数直線の負の部分にのみ Brown 運動の媒質をとり，正の部分には何も媒質はない場合を考え，このようなランダム媒質の中を動く拡散過程の長時間後の漸近挙動について報告する．

河津清氏（山口大・教育）との共同研究.

1　問題と結果.

ランダム媒質の中の拡散過程：Brox (1986), Schumacher (1985)
「Brown 媒質の中の拡散過程は動きが遅くなる」

1.1　モデル.

１次元空間で原点 O の左側だけ Brownian path のポテンシャル，右側はポテンシャル 0：
$C(\mathbb{R})$: $\mathbb{R}$ 上の連続関数の集合,
$\mathbb{W} = \{w \in C(\mathbb{R}) \mid w(x) = 0,\ x \geqq 0\}$
P: Wiener meas. on $\mathbb{W}$　（$\mathbb{W}$ 上の確率測度であって，$\{w(-x)\},\ x \geqq 0,\ P\}$ が x を時刻変数とする Brown 運動，ということ）
$\Omega = C(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}) \ni \omega$,
粒子 ω：$X(t) = X(t, \omega) = \omega(t)$
「w はランダムな外場（ポテンシャル），ω はそのポテンシャルの中を運動する粒子」
$w \in \mathbb{W}$（外場）, $x_0 \in \mathbb{R}$（出発点）
「外場 w の中での粒子の運動法則」
$P_w^{x_0}$：Ω 上の確率測度であって，$\{X(t),\ t \geqq 0,\ P_w^{x_0}\}$ が，出発点が $X(0) = x_0$ であって

$$L_w = \frac{1}{2} e^{w(x)} \frac{d}{dx} (e^{-w(x)} \frac{d}{dx})$$

を generator とする diffusion になっているもの.
「外場についての平均」
$\mathcal{P}^{x_0}$：$\mathbb{W} \times \Omega$ 上の確率測度 $\mathcal{P}^{x_0}(dw\, d\omega) = P(dw) P_w^{x_0}(d\omega)$
Kawazu – Suzuki – Tanaka (2001)
$(\mathbb{W} \times \Omega,\ \mathcal{P}^{x_0})$ 上の process $\{X_(t),\ t \geqq 0,\ \mathcal{P}^{x_0}\}$ を，**片側 Brown ポテンシャルをもつ拡散過程** と呼ぶ.
興味． $\{X(t),\ t \geqq 0,\ \mathcal{P}^0\}$, $t \to \infty$?
• Brox (1986), Schumacher (1985) は両側とも Brown 媒質の場合．その結果は,
関数 $b : \mathbb{W} \to \mathbb{R}$ が存在して，$\forall \epsilon$ に対して

$$\lim_{t \to \infty} \int P_w^0 [|(\log t)^{-2} X(t) - b(w_{\log t})| < \epsilon] P(dw) = 1\,.$$

ここで $w_\lambda(x) = \lambda^{-1} w(\lambda^2 x)$.
特に，$t \to \infty$ における $\{(\log t)^{-2} X(t),\ t \geqq 0,\ \mathcal{P}^0\}$ の分布の極限分布の存在が分かる．
証明の鍵になるのは valley という概念.
原点 0 を含む深さが 1 より大きい valley (a, b, c) （$((w(a) - w(b)) \wedge (w(c) - w(b)) > 1$）の存在と「Brown 媒質の自己相似性」によって証明される．
• Kawazu – Tamura – Tanaka (1988, 1989)　漸近自己相似性を持つ広いポテンシャルのクラスで成立
興味． 今回の仕事は（右側はポテンシャルが 0 なので）原点を含む valley はない！

1.2 結果．

$\mathcal{M}$: space of probability laws on Ω

ρ: Prokhorov metric on $\mathcal{M}$

$\{X(t),\ t \geqq 0,\ \mathcal{P}^0\}$: diffusion process with one-sided Brownian potential

$\lambda > 0$　「スケール因子」（$\lambda \to \infty$ に興味）

$X_\lambda(t) = \lambda^{-1/2} X(\lambda t), \geqq 0.$

$P_\lambda(w) \in \mathcal{M}$: probability law of $\{X_\lambda(t),\ t \geqq 0,\ P_w^0\}$

$P_N \in \mathcal{M}$: 0 にとどまる動かない process

$P_R \in \mathcal{M}$: reflecting Brownian motion on $\mathbb{R}_+$ staritng form 0

まず，以前の結果.

Theorem 0 (Kawazau − Suzuki − Tanaka, 2001). $0 < \forall \epsilon < \dfrac{1}{2}\rho(P_N, P_R)$ に対して

$$\lim_{\lambda \to \infty} P[\rho(P_\lambda(w), P_N) < \epsilon] = 0.5,$$
$$\lim_{\lambda \to \infty} P[\rho(P_\lambda(w), P_R) < \epsilon] = 0.5.$$

特に（$t = 1$ として $\lambda \to \infty$ を見ることで時間無限スケール極限の分布を得る．また $max_{s \leqq t} X(s)$ の分布もわかる：）

$t^{-1/2} X(t)$ の分布は $\mathcal{P}^0$ の下で $t \to \infty$ で

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-x^2/2} dx + \frac{1}{2}\delta_0(dx)$$

に収束し，$t^{-1/2} \max\limits_{s \in [0,t]} X(s)$ の分布は $\mathcal{P}^0$ の下で $t \to \infty$ で

$$\frac{1}{2} P_R[\max_{s \in [0,t]} X(s) \in dx] + \frac{1}{2}\delta_0(dx)$$

に収束する．◇

Q(竹田)．どういう外界wがP_Nに近くて，どういうのがP_Rに近いか分かるか？

A．以前の分類は分かりにくかった．今回分かりやすくした．後述の事象A，B.

次に，今回の結果.

Null path P_N に近づくところを精密化　→　スケーリングが $(\log \lambda)^{-2}$ であることがわかった (Theorem 2)．Theorem 0 では $\lambda^{-1/2}$ でスケールしたから null path に収束してしまった.

$\{X(t),\ t > 0,\ P_w^0\}$

$\lambda > 0$

$X_\lambda(t) = \lambda^{-1/2} X(\lambda t), t \geqq 0$

$G_\lambda(t)$: $X(t) < 0$ の間はとばして，$X(t)$ が正側に滞在している時間だけを集めてつないだ process．すなわち，

X の正側滞在時間：$a_\lambda(t) = a_\lambda(t, \omega) = \displaystyle\int_0^t 1_{(0,\infty)}(X_\lambda(s))\, ds$

$a_\lambda^{-1}(t) = \inf\{s > 0 \mid a_\lambda(s) > t\}$

$G_\lambda(t) = X_\lambda(a_\lambda^{-1}(t)).$

Note: $\{G_\lambda(t),\ t \geqq 0,\ P_w^0\}$ は 0 を出発点とする $\mathbb{R}_+$ 上の反射壁ブラウン運動になる.

$w \in \mathbb{W}$, $a \in \mathbb{R}$ に対して，$\sigma(a) = \sup\{x < 0 \mid w(x) = a\}$ と書くとき，

$A := \{w \in \mathbb{W} \mid \sigma(-0.5) < \sigma(0.5)\}$　「原点から負方向に向かうと先に山にあたるポテンシャル」

$B := \{w \in \mathbb{W} \mid \sigma(0.5) < \sigma(-0.5)\}$　「先に谷に落ち込むポテンシャル」

$w \in \mathbb{W}$, $\lambda > 0$ に対して $w_\lambda(x) = \lambda^{-1} w(\lambda^2 x)$, $x \in \mathbb{R}$ とおくと，ブラウン運動の自己相似性から (w_λ, P) と (w, P) は同分布

$A_\lambda := \{w_\lambda \in \mathbb{W} \mid w_\lambda \in A\}$
$B_\lambda := \{w_\lambda \in \mathbb{W} \mid w_\lambda \in B\}$
Note: $P[A_\lambda] = P[B_\lambda] = 0.5$.

Theorem 1. $\forall T > 0, \forall \epsilon > 0$ に対して $A_{\log \lambda}$ で条件付けた条件付き確率 $P[\cdot \mid A_{\log \lambda}]$ について次が成り立つ：

$$\lim_{\lambda \to \infty} P[P_w^0[\sup_{t \in [0,T]} |X_\lambda(t) - G_\lambda(t)| < \epsilon] > 1 - \epsilon \mid A_{\log \lambda}] = 1$$

◇

服部の独り言（講演者に未確認）： 粒子の運動を眺める時間スケール λ に対して，高さ $\log \lambda / 2$ のポテンシャルの壁が谷より先に見えるポテンシャルではおおむね反射壁 B. m. のように運動する． ◇

次の定理は前回の研究で null path に収束した部分についての精密化.
$w \in \mathbb{W}$
$\zeta = \zeta(w) = \sup\{x < 0 \mid w(x) - \min_{y \in [x,0]} w(y) = 1\}$
（原点から負方向に向かって，地点 $x < 0$ までのポテンシャル w の最小値と $w(x)$ の差が初めて 1 を超える点が $x = \zeta$：深さ 1 の谷を越えた点）

$M = M(w) = \begin{cases} \sigma(0.5), & w \in A, \\ \zeta, & w \in B. \end{cases}$

$v = v(w) = \min_{x \in [M,\infty)} w(x)$ （谷底の深さ）
$\exists! b = b(w) \in (M, 0)$; $w(b) = v$;, P–a.s. （谷底の位置）

Theorem 2. $(\forall \epsilon > 0)$ に対して $B_{\log \lambda}$ で条件付けた条件付き確率 $P[\cdot \mid B_{\log \lambda}]$ について次が成り立つ：

$$\lim_{t \to \infty} P[P_w^0[|(\log t)^{-2} X(t) - b(w_{\log t})| < \epsilon] > 1 - \epsilon \mid B_{\log \lambda}] = 1$$

◇

服部の独り言（講演者に未確認）： 定義をたどっていくと，$(\log t)^2 b(w_{\log t})$ は初めて出会う深さ $\log t$ の谷底（そこから左に $\log t$ の壁があるという意味で）の位置なので，高さ $\log t / 2$ のポテンシャルの谷底が壁より先に見えるポテンシャルでは粒子は時刻 t のスナップショットではその谷底付近に（高さの誤差が $(\log t)^2$ 程度の範囲内で）見つかる． ◇

服部の未確認の疑問： ポテンシャルの壁 $\log t$ で条件付けているのに，高さの誤差 $(\log t)^2$ は無駄に弱すぎないの？つまり，定理の絶対値の中は，証明をほとんど変えずに $((\log t)^{-2} X(t) - b(w_{\log t})) \times (\log t)^{1-\delta}$, $\forall \delta > 0$,（またはひょっとして $\delta = 0$ も ?? ）とできるのでは？ ◇

他の定理は粒子の位置 $X(t)$ や path 形状に関する結果だが，ここで正側滞在時間についてコメントしておく．

Theorem 3. $(\forall \epsilon > 0)$ に対して

$$\lim_{t \to \infty} P[P_w^0[\frac{1}{t} \int_0^t 1_{(0,\infty)}(X(s))\, ds > 1 - \epsilon] > 1 - \epsilon \mid A_{\log t}] = 1$$
$$\lim_{t \to \infty} P[P_w^0[\frac{1}{t} \int_0^t 1_{(0,\infty)}(X(s))\, ds < \epsilon] > 1 - \epsilon \mid B_{\log t}] = 1$$

◇

Corollary 4. $\mathcal{P}^0$ の下で $\frac{1}{t} \int_0^t 1_{(0,\infty)}(X(s))\, ds$ の分布は $t \to \infty$ で $\frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_1$ に収束する． ◇

Remark. Z. Shi によると， $\{X(t),\ t \geqq 0,\ \mathcal{P}^0\}$ に対して，$\frac{1}{\log t} \log \int_0^t 1_{(0,\infty)}(X(s))\, ds$ の分布は $t \to \infty$ で $1 \wedge (2U)$ に弱収束する．ここで U は $[0,1]$ 上の一様分布 ◇

服部の独り言（講演者に未確認）： 正側平均滞在時間が 0 に行く事象について，滞在時間が「$O(t^U)$」（指数が「一様分布」）ということのようだが，もしかすると後の Theorem 5 の H の分布から（谷の深さと滞在時間の関係を通じて）導出できることなのでは？ ◇

$\max X(s)$，つまり，正の側でどこまで遠くに行っているか，についての結果.

Theorem 5. $(\forall\epsilon > 0)$ に対して

$$\lim_{t\to\infty} \mathcal{P}^0[|\frac{1}{\log t}\log \max_{s\in[0,t]} X(s) - H(w_{\log t})| > \epsilon] = 0,$$

ここで $H(w) = \max_{x\in[M,0]} w(x)$. （Note: $w \in A$ なら $H(w) = 0.5$, $w \in B$ なら $0 < H(w) < 0.5$.） ◇

服部の独り言（講演者に未確認）：谷底に落ち込んだらその分遠くに行けない．というか，谷の深さとそこに落ち込む時間の関係が精密に評価できて，その上で全てを証明している，ということが伺われる気がする． ◇

最後に Kawazu-Suzuki-Tanaka(2001) の結果と今回の結果を合わせ，粒子の位置 $X(t)$ の $\mathcal{P}^0$ の下での $t\to\infty$ における極限分布をまとめる．

Theorem 6.

$\tilde{X}_t$	$\tilde{X}_t$ の極限分布	support
$t^{-1/2}X(t)$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-x^2/2}\,dx + \frac{1}{2}\delta_0(dx)$	$[0,\infty)$
$(\log t)^{-1/2}X(t)$	$P[(b\in dx)\cap B] + \frac{1}{2}\delta_\infty(dx)$	$(-\infty,0)\cup\{\infty\}$
$t^{-1/2}\max_{s\in[0,t]} X(s)$	$\frac{1}{2}P_R[\max_{s\in[0,1]} X(s)\in dx] + \frac{1}{2}\delta_0(dx)$	$[0,\infty)$
$\frac{1}{\log t}\max_{s\in[0,t]} X(s)$	$P[H\in dx]$	$(0,0.5)$
$\frac{1}{(\log t)^2}\min_{s\in[0,t]} X(s)$	$P[M\in dx]$	$(-\infty,0)$

さらに，b, H, M の分布のラプラス変換は以下で与えられる．$\xi > 0$ に対して：

$\mathrm{E}[\,e^{\xi b},\ B\,] = \dfrac{\sinh\sqrt{\xi/2}}{\sqrt{2\xi}\cosh\sqrt{2\xi}}$

$\mathrm{E}[\,e^{\xi H},\ A\,] = \dfrac{1}{2}e^{\xi/2}$

$\mathrm{E}[\,e^{\xi H},\ B\,] = \displaystyle\int_0^{1/2} e^{\xi x}\,dx$

$\mathrm{E}[\,e^{\xi M},\ A\,] = \dfrac{\sinh\sqrt{\xi/2}}{\sinh\sqrt{2\xi}}$

$\mathrm{E}[\,e^{\xi M},\ B\,] = \dfrac{\sinh\sqrt{\xi/2}}{(\sinh\sqrt{2\xi})(\cosh\sqrt{2\xi})}$ ◇

2 証明．

2.1 準備．

$\lambda > 0$, $w\in\mathbb{W}$, $x_0\in\mathbb{R}$

$\{X(t),\ t\geqq 0,\ P^{x_0}_{\lambda w}\}$ は generator $L_{\lambda w}$ の diffusion．これはブラウン運動の time change で構成できる．

プロセスの構成．

$(\tilde{\Omega}, \tilde{P})$: 確率空間

$B(t)$, $t\geqq 0$: 0 を出発点とする 1 次元 Brown 運動

time change parameter: $S_\lambda(x) = \displaystyle\int_0^x e^{\lambda w(y)}\,dy$

$A_\lambda(t) = \displaystyle\int_0^t e^{-2\lambda w(S_\lambda^{-1}(B(s)))}\,ds$

このとき $X(t;0,\lambda w) = S_\lambda^{-1}(B(A_\lambda^{-1}(t)))$, $t\geqq 0$, は 0 を出発する generator $L_{\lambda w}$ の diffusion.

さらに，$w^{x_0}(\cdot) = w(\cdot + x_0)$ と書くとき $X(t;x_0,\lambda w) = x_0 + X(t;0,\lambda w^{x_0})$ は x_0 を出発する generator $L_{\lambda w}$ の diffusion.

Remark. $S_\lambda(x) \to -\infty$, $x \to -\infty$ ならば $X(t; x_0, \lambda w)$ は recurrent．これが確率 1 で起きているので，以後 $\mathbb{W}$ を $\{w \in \mathbb{W} \mid S_\lambda(x) \to -\infty,\ x \to -\infty,\ \forall\lambda > 0\}$ に制限して考える．従って，以後 $X(t; x_0, \lambda w)$ は recurrent． ◇

Lemma 7 (Brox). $\forall\lambda > 0$ と $\forall w \in \mathbb{W}$ に対して $\{X(t),\ t \geqq 0,\ P^0_{\lambda w_\lambda}\}$ と $\{\lambda^{-2}X(\lambda^4 t),\ t \geqq 0,\ P^0_w\}$ の分布は等しい． ◇

2.2 Theorem 1 の証明．

反射壁 B.m. に行くほう．Theorem 1 のスケーリングをわずかに書き換えておく．

Theorem 8. $\mu = \mu(\lambda) = \lambda^{1/4}\log\lambda$ とおくと，$\forall T > 0$ と $\forall\epsilon > 0$ に対して

$$\lim_{\lambda\to\infty} P[P^0_{\mu w_\mu}[\sup_{t\in[0,T]} |X(t) - G(t)| < \epsilon] > 1 - \epsilon \mid A_{\log\lambda}] = 1.$$

ここで，既出のとおり，G は X の正滞在部分だけを集めてつないだもの：

$G(t) = X(a^{-1}(t))$, $a^{-1}(t) = \inf\{s > 0 \mid a(s) > t\}$, $a(t) = \displaystyle\int_0^t 1_{(0,\infty)}(X(s))\,ds.$ ◇

（Theorem 8 → Theorem 1 は事象の差を評価するだけ.）

Note: $G(t) \geqq X(t)$, $G(t) \geqq 0$

明らかに

Lemma 9. $|G(t) - X(t)| = |G(t) - G(a(t))| - \min(X(t), 0)$. ◇

Theorem 8 の証明は，Lemma 9 をにらんで Theorem 8 の主張の左辺の確率を 1 から引いたものを 2 つ事象

$$\{\sup_{t\in[0,T]} |X(t) - G(t)| \geqq \epsilon\} \subset \{\sup_{t\in[0,T]} |G(a(t)) - G(t)| \geqq \epsilon/2\} \cup \{\inf_{t\in[0,T]} X(t) \leqq -\epsilon/2\}$$

の確率の和で上から評価する．$\{\inf_{t\in[0,T]} X(t) \leqq -\epsilon/2\}$ の確率が小さいことは Kawazu – Suzuki – Tanaka で証明済み．もう一方は t と $a(t)$ が $A_{\log\lambda}$ 上では近い（「ほとんどの時間正の側に滞在する」）ことがチェビシェフと Lemma 7 (Brox の結果) と次の Lemma 12 からわかることで終わる．

Lemma 12. $w \in A$, $T > 0$ のとき

$$\lim_{\lambda\to\infty} E^0_{\lambda w}[\frac{1}{Te^\lambda}\int_0^{Te^\lambda} 1_{(0,\infty)}(X(s))\,ds] = 1.$$

◇

服部の独り言（講演者に未確認）：まさに「ほとんどの時間正の側に滞在する」という主張． ◇

Lemma 12 の証明には次の既存の結果も用いる．

Lemma 13 (Kawazu – Suzuki – Tanaka). $w \in \mathbb{W}$, $a < 0$, および，$w(a) > w(x)$, $\forall x > a$, ならば,

$$(\forall\epsilon > 9)\ \lim_{\lambda\to\infty} P^0_{\lambda w}[e^{\lambda(J-\epsilon)} < \tau(a) < e^{\lambda(J+\epsilon)}] = 1.$$

ここで，$J = \max\{J_0,\ 2w(a)\}$; $J_0 = w(a) - \displaystyle\min_{x\in[a,0]} w(x)$ とおいた．τ はふつうの hitting time：$x\mathbb{R}$ に対して $\tau(x) = \inf\{t > 0 \mid X(t) = x\}$. ◇

服部の独り言（講演者に未確認）：壁を $x = a$ までよじ登る時刻についての大数の法則が成り立つことが証明済み !? ◇

Proof of Lemma 12. Lemma 13 の他に，relecting $L_{\lambda w}$ diffusion の不変測度と coupling argument を用いる．

$w \in A$.

$v > -0.5$ に注意すると $-v < r_0 < r_1 < 0.5$ なる r_0, r_1 があるが，そのような任意のものについて原点の左でポテンシャルの壁をよじ登る時刻 $\sigma(r_1)$ と原点の右（ポテンシャルのないブラウン粒子）で遠方 $e^{r_0\lambda}$ に達する時刻を比べると，

$$\lim_{\lambda\to\infty} P^0_{\lambda w}[\tau(e^{r_0\lambda}) < \tau(\sigma(r_1))] = \lim_{\lambda\to\infty} \frac{\int_{\sigma(r_1)}^0 e^{\lambda w(x)}\,dx}{\int_{\sigma(r_1)}^0 e^{\lambda w(x)}\,dx + e^{r_0\lambda}} = 1.$$

ここで

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{\lambda} \log \int_{\sigma(r_1)}^0 e^{\lambda w(x)}\,dx = r_1 > r_0$$

を用いた．これと，Lemma 13 から得られる

$$\lim_{\lambda\to\infty} P^0_{\lambda w}[e^{\lambda(2r_1-\epsilon)} < \tau(\sigma(r_1)) < e^{\lambda(2r_1+\epsilon)}] = 1$$

から，

$$\exists\theta \in (0,1);\ \lim_{\lambda\to\infty} P^0_{\lambda w}[\tau(e^{r_0\lambda}) < e^{\lambda\theta}] = 1.$$

$\rho > 0.5$ を $\min_{x\in[\sigma(\rho),\sigma(0.5)]} w(x) > v$ を満たすようにとると

$$\lim_{\lambda\to\infty} P^0_{\lambda w}[e^{\lambda(2\rho-\epsilon)} < \tau(\sigma(\rho)) < e^{\lambda(2\rho+\epsilon)}] = 1$$

から，

$$(\forall T > 0)\ \lim_{\lambda\to\infty} P^0_{\lambda w}[\tau(\sigma(\rho)) > Te^{\lambda}] = 1.$$

ここで，$I_\lambda = [\sigma(\rho), e^{r_0\lambda}]$ 上の確率測度 $m_{\lambda w}$ を

$$m_{\lambda w}(E) = \frac{\int_{E\cap[\sigma(\rho),0]} e^{-\lambda w(x)}\,dx + \int_{E\cap(0,e^{r_0\lambda}]} dx}{\int_{\sigma(\rho)}^0 e^{-\lambda w(x)}\,dx + e^{r_0\lambda}}$$

で定義すると，$m_{\lambda w}$ は I_λ 上の reflecting $L_{\lambda w}$–diffusion の不変測度になっている．

$-v < r_0$ に注意すると

$$\lim_{\lambda\to\infty} m_{\lambda w}[(0, e^{r_0\lambda}]] = \lim_{\lambda\to\infty} \frac{e^{r_0\lambda}}{\int_{\sigma(\rho)}^0 e^{-\lambda w(x)}\,dx + e^{r_0\lambda}} = 1.$$

以下の性質を満たす拡散過程 $\{Y_\lambda(t),\ t \geqq 0\}$, $\{Z_\lambda(t),\ t \geqq 0\}$ を，ある確率空間 $(\tilde\Omega, \tilde P)$ 上に構成できる．

- $\{Y_\lambda(t),\ t \geqq 0\}$ は $e^{r_0\lambda}$ を出発点とする $[\sigma(\rho), \infty)$ 上の reflecting $L_{\lambda w}$–diffusion
- $\{Z_\lambda(t),\ t \geqq 0\}$ は初期分布を $m_{\lambda w}$ とする $[\sigma(\rho), e^{r_0\lambda}]$ 上の reflecting $L_{\lambda w}$–diffusion
- $\tilde P[Y_\lambda(t) \geqq Z_\lambda(t),\ \forall t \geqq 0] = 1$

作り方から，

$$\lim_{\lambda\to\infty} \tilde E[\frac{1}{Te^\lambda} \int_0^{Te^\lambda} 1_{(0,\infty)}(Z_\lambda(t))\,dt] = 1$$

から

$$\lim_{\lambda\to\infty} \tilde E[\frac{1}{Te^\lambda} \int_0^{Te^\lambda} 1_{(0,\infty)}(Y_\lambda(t))\,dt] = 1$$

を得て，強マルコフ性によって

$$\lim_{\lambda\to\infty} E^0_{\lambda w}[\frac{1}{Te^\lambda} \int_0^{Te^\lambda} 1_{(0,\infty)}(X_\lambda(t))\,dt] = 1$$

を得る． **(Lemma 12 の証明終わり.)**

2.3 Theorem 2 の証明.

服部注： 講演 OHP にはもう少し詳しく書いてあるが，長くなったので以下詳細は略す. ◇

次を証明すればよい.

Theorem 14. $w \in B$ ならば

$$\exists\delta > 0;\ (1-\delta < \forall r_1 < \forall r_2 < 1+\delta)\ (\forall\epsilon > 0)\ \lim_{\lambda\to\infty}\inf_{r\in[r_1,r_2]} P^0_{\lambda w}[|X(e^{\lambda r}) - b(w)| < \epsilon] = 1.$$

◇

この証明には，ポテンシャルの谷底 $v = w(b)$ に至るまでのポテンシャルの最大値 $v' = w(b')$ に注目する.

(i) $v' - v > 1$ ならば， $w|_{[\zeta,b']}$ は深さ 1 の valley になる．c を b' から負の方向に（valley の中に）見て行って最初に $w(x) = 0$ となる点とすると，いつものように $\tau(c) < e^{\lambda\theta_0}$ が漸近的に得られる．他方 c から valley 側については Brox の結果が使えるので，強マルコフ性から主張を得る.

(ii) $v' - v < 1$ ならば，$w(\zeta) < \rho < 0.5$ かつ $\min\{w(x) \mid \sigma(\rho) \leqq x \leqq \zeta\} > v$ なる ρ をとってきて（つまり，ζ のやや左側に $\sigma(\rho)$ をとってきて）そのとりかたから，いつものように $\tau(\sigma(\rho)) < \tau(e^{\lambda/2})$ が漸近的に成り立つことを言う．$\rho - v > 1$ に注意すれば，$\{X(t),\ 0 \leqq t \leqq e^{\lambda(1+\delta_1)},\ P^0_{\lambda w}\}$ を $I'_\lambda = [\sigma(\rho), e^{\lambda/2}]$ 上の reflecting $L_{\lambda w}$–diffusion と見なせるので，Lemma 12 の証明と同様に，I'_λ 上の確率測度 $m'_{\lambda w}$ で I'_λ 上の relflecting $L_{\lambda w}$–diffusion の不変測度になっているものをとれて，これについて b の近くに漸近的に確率が集中していることがわかるので，初期分布が $m'_{\lambda w}$ である reflecting $L_{\lambda w}$–diffusion $\{X^{(R)}_\lambda(t),\ t \geqq 0\}$ を適当な確率空間の上に構成すると Theorem 14 の証明ができる.

2.4 Theorem 5 の証明.

次の補題を示せばよい.

Lemma 15. r: a real valued function of $\lambda > 0$; $r(\lambda) \to 1$, $\lambda \to \infty$, とすると，for almost all $w \in \mathbb{W}$ と $\epsilon > 0$ に対して

$$\lim_{\lambda\to\infty} P^0_{\lambda w}[e^{\lambda(H-\epsilon)} \leqq \max_{0\leqq s\leqq e^{\lambda r(u)}} X(s) \leqq e^{\lambda(H+\epsilon)}] = 1.$$

◇

証明は Lemma 13 を用いて

$$\lim_{\lambda\to\infty} P^0_{\lambda w}[\tau(e^{\lambda(H-\epsilon)}) < e^{\lambda r(\lambda)} < \tau(e^{\lambda(H+\epsilon)})] = 1$$

の形で示すことで可能である.

Q(服部). Brox の結果を使っているが，Brox との違いは？
A. Brox は原点が valley の中にいる場合.
valley にならない場合を比較定理でやった。
C(服部). 漸近的に確率1 (LLN) の結果だが，近づく速さ (LD) もできるのでは？
するのが良いことかは知らないけど.