解析学１試験問題

1996/07/01 服部哲弥

解答用紙は氏名と学籍番号を記入せよ．番号が 94CA$\cdots$ **以外** の者は名前を囲み，94CA$\cdots$ の者は名前に飾りをつけないこと．早く終わった者は答案を提出して退出してよい．

問 1． 以下の各問いに答えよ．なお，Ω は集合，$\mathcal{F}$ は Ω の部分集合の集合 (集合族) であって空ではないとし，μ は $\mathcal{F}$ 上で定義され $\mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ に値をとる (即ち，$\mu : \mathcal{F} \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$)，恒等的に $+\infty$ ではない関数とする．また，空集合は $\emptyset$ と表記する．

問 1–1． $\mathcal{F}$ が σ 加法族 (完全加法族，可算加法族，とも言う) であるとは，(空でない Ω の部分集合の集合族であって，しかも，) $\mathcal{F}$ がある二つの集合算について閉じていることである．その二つとは何か，言葉で (式を使わずに) 答えよ．

問 1–2． 式で書くと，$\mathcal{F}$ が σ 加法族であるとは，次の二つの条件を満たすことである．空欄 (a), (b) に適切な数式を入れよ．

(i) 集合 $A \subset \Omega$ が $\mathcal{F}$ の要素であれば（入っていれば）, $\boxed{\text{(a)}}$ も $\mathcal{F}$ の要素である．
(ii) 全ての自然数 n に対して集合 $A_n \subset \Omega$ が $\mathcal{F}$ の要素であれば, $\boxed{\text{(b)}}$ も $\mathcal{F}$ の要素である．

問 1–3． $\mathcal{F}$ を σ 加法族とする．μ が $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の測度であるとは，($\mu : \mathcal{F} \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$，かつ，恒等的に $+\infty$ ではない関数であって，しかも，) 次の二つの性質を満たすことである．空欄 (c), (d), (e) に適切な数式を入れよ．

(i) 任意の $A \in \mathcal{F}$ に対して $\mu(A)\boxed{\text{(c)}}$．即ち，μ は負の値をとらない．
(ii) 可算個の $\mathcal{F}$ の要素 A_1, A_2, A_3, $\cdots$, が互いに共通部分を持たない (即ち，$n \neq m$ ならば $A_n \cap A_m =$ $\boxed{\text{(d)}}$) とき，$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \boxed{\text{(e)}}$．この性質を σ 加法性と呼ぶ．なお，前提条件の下で $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ を $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ と書いてもよい．

問 1–4． $\mathcal{F}$ を σ 加法族とする．

(i) $\Omega \in \mathcal{F}$，即ち，σ 加法族は必ず全体集合を含むこと，を証明せよ．但し，σ 加法族の問 1–2 の定義のみ用い，講義中に証明した他の性質，たとえば有限加法性など，をあらわに**用いずに**証明せよ．
(ii) $\emptyset \in \mathcal{F}$，即ち，$\sigma$ 加法族は必ず空集合を含むこと，を証明せよ．但し，定義および $\Omega \in \mathcal{F}$ のみ用い，上の問題と同様に他の性質を用いずに証明せよ．

問 1–5． $\mathcal{F}$ を σ 加法族，μ を $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の測度とする．問 1–4 より $\mu(\emptyset)$ が存在する．$\mu(\emptyset)$ はいくらになるか．答えだけでなく，導出の過程 (計算) も書け．問 1–4 と同様に定義のみ用いて導け．

問 2． $\mathbf{R}$ の区間 $(a, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x \leq b\}$, $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$, の全てを要素に持つ集合族を $\mathcal{I}$ と書く．（但し，$(a, a] = \emptyset$, $(a, \infty] = (a, \infty)$ の意味とする．）$\mathcal{I}$ は $\mathbf{R}$ の部分集合の集合族 (空でない) である．以下の各問いに答えよ．

問 2–1． $\mathcal{I}$ は σ 加法族ではない．このことを (なるべく簡単に) 証明せよ．

問 2–2. $\mathcal{I}$ の任意の要素 $(a,b]$ に対して $\mu(\,(a,b]\,) = b-a$ となる測度，即ち素朴な「長さ」の拡張概念となる測度 μ，が存在することが知られている．講義でこのような測度 (Lebesgue 測度) を構成 (存在証明) したが，その手順を説明する次の文章の空欄 (1)–(15) に下の語群から適当なものを入れよ．(注意：番号の等しい欄は同じ語が入り，番号の異なる欄は異なる語が入る．用いない語もある．) 解答は番号順に並べること．

$\mathbf{R}$ 上の区間塊の族 $\mathcal{J} = \{\sum_{i=1}^{n} I_i \mid n \in \mathbf{N},\ I_i \in \mathcal{I},\ i = 1,2,\cdots,n\}$ は $\boxed{(1)}$ である．従って，$\mathcal{J}$ は $\boxed{(2)}$ や $\boxed{(3)}$ などの集合算について閉じている．しかし，$\boxed{(4)}$ について閉じているとは限らない．

$E \in \mathcal{J}$ に対して $E = \sum_{i=1}^{n} I_i$ なる $I_i = (a_i, b_i] \in \mathcal{I},\ i = 1,2,\cdots,n$ をとり，$m(E) = \sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)$ で m を定義すると m は $\mathcal{J}$ 上の $\boxed{(5)}$ になる．従って，m は $\boxed{(6)}$ や $\boxed{(7)}$ などの性質を持つ．

$\mathbf{R}$ の部分集合 A に対して $\mu^*(A) = \boxed{(8)}\{\sum_{n=1}^{\infty} m(E_n) \mid \{E_n\} \subset \mathcal{J},\ A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\}$ とおくと，μ^* は単調性, $\boxed{(6)}$, $\boxed{(9)}$, $\mu^*(\emptyset) = 0$, の諸性質を持つ．このことを μ^* は $\boxed{(10)}$ であるという．

$\boxed{(10)}$ は $\boxed{(11)}$ を持つとは限らないが，$\boxed{(11)}$ を持つように定義域を制限することができる．$\mathbf{R}$ の任意の部分集合 A に対して $\mu^*(\boxed{(12)} \cap \boxed{(13)}) + \mu^*(\boxed{(12)}^c \cap \boxed{(13)}) = \mu^*(\boxed{(13)})$ を満たす $E \subset \Omega$ の全体 (集合族) を $\mathcal{F}$ とおくと，$\mathcal{F}$ は $\boxed{(2)}$ と $\boxed{(4)}$ について閉じているので，$\boxed{(14)}$ である．しかも，μ^* の定義域を $\mathcal{F}$ に制限したもの ($\mu = \mu^*|_{\mathcal{F}}$) は，$\boxed{(6)}$ と $\boxed{(11)}$ を持つので，$\mathcal{F}$ 上の $\boxed{(15)}$ である．$\mathcal{J} \subset \mathcal{F}$ も成り立つ．

一般には $\boxed{(5)}$ は，$\boxed{(11)}$ を持つとは限らない．$\boxed{(11)}$ から $\boxed{(7)}$ を導くことはできるが，逆は必ずしも真ではない．但し，上記の m は $\mathcal{J}$ 上の $\boxed{(5)}$ であるだけではなく，$\boxed{(11)}$ も持つことが分かる．このとき，$\mu|_{\mathcal{J}} = m$ が成り立つ．故に，測度空間 $(\mathbf{R}, \mathcal{F}, \mu)$ は $(\mathbf{R}, \mathcal{J}, m)$ の拡張である．μ を Lebesgue 測度と呼ぶ．

語群

非負性	劣加法性	有限加法性	σ 加法性	有限加法族	σ 加法族
有限加法的測度	外測度	測度	補集合 A^c	有限和 $A \cup B$	可算和 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$
max	min	sup	inf	A	E

問 3–1. 解析学 1 でこれまで (この試験の前まで) に行ってきた講義内容の「目次」(「見出し」の表) を次の条件にしたがって作れ．

(i) 準備の章 (集合論に関する復習) は除く．
(ii) これまでの講義を内容にしたがって大きく 2 以上 5 以下の部分に分けて考え，各部分の内容を表す適切な見出し (表題) を書く．(2 つ程度の大見出しと，各々3 つ程度の小見出し，などでもよい．)
(iii) 各見出しは解答用紙 1 行以内とする．
(iv) 講義の表題と正確に一致しなくても良いが，見出しの順序の論理的自然性や，見出しが講義内容の本質を説明すること，実際の講義と矛盾のないこと，などは当然採点の基準に含まれる．

問 3–2. 講義を「採点」せよ．(書き方について自分の方針がない場合は，講義のよかった点，悪かった点と改善案，興味深かった部分，一番理解できなかった部分，をそれぞれ一つずつ以上あげよ．なお，万が一，出席十分とは言えなかったり，出席しても講義に身を入れていなかった者がいる場合は，なぜそうであったか，教員に可能な改善の方法は何か，という問題に置き換えて解答せよ．説得力 (正直に書いているように見えるか) および現実性 (講義改善の参考になるか) を採点基準とする．)

解析学１試験解答

1996/07/08 服部哲弥

問 1–1 (5×2). 補集合と可算和.

問 1–2 (5×2).

(a) A^c

(b) $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

問 1–3 (5×3).

(c) ≥ 0

(d) $\emptyset$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

問 1–4 (5×2).

(i) $\mathcal{F}$ は仮定から空でない．$A \subset \Omega$ を含んでいるとすると，σ 加法族は補集合も含むから $A^c \in \mathcal{F}$．$A_1 = A^c$, $A_2 = A_3 = A_4 = \cdots = A$ とおくと，全ての自然数 n に対して $A_n \in \mathcal{F}$ となるので，σ 加法族の可算加法性から $\mathcal{F} \ni \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A^c \cup A \cup A \cup \cdots = A^c \cup A = \Omega$.

(ii) $\Omega \in \mathcal{F}$ であるからその補集合即ち空集合も $\mathcal{F}$ の要素である．

問 1–5 (10). μ は仮定により恒等的には ∞ ではないから $\mu(A) \in \mathbf{R}$ となる $A \in \mathcal{F}$ が存在する．$A_1 = A$, $A_2 = A_3 = A_4 = \cdots = \emptyset$ とおけば，$n \neq m$ ならば $A_n \cap A_m = \emptyset$ が成り立つから，μ の σ 加法性から

$$\mu\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

であるが，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} A_n = A \cup \emptyset \cup \emptyset \cdots = A$, $\mu(A_2) = \mu(A_3) = \cdots = \mu(\emptyset)$ である．よって $\mu(A) = \mu(A) + \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \mu(\emptyset)$ となる．μ は測度だから値域は非負実数または $+\infty$ であるが，$\mu(\emptyset) \neq 0$ とすると上式から $\mu(A) = \mu(A) + \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \mu(\emptyset) = \infty$ となって，仮定 $\mu(A) \in \mathbf{R}$ に矛盾する．よって $\mu(\emptyset) = 0$.

問 2–1 (5). (解答例)：$[0, 1] \in \mathcal{I}$ であるが，その補集合 $(-\infty, 0] \cup (1, \infty]$ は区間ではない (二つの連結成分を持っている) ので $\mathcal{I}$ に含まれない．よって $\mathcal{I}$ は補集合をとる集合操作に関して閉じていないから，σ 加法族ではない.

問 2–2 (3×15).

(1) 有限加法族	(2) 補集合 A^c	(3) 有限和 $A \cup B$
(4) 可算和 $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$	(5) 有限加法的測度	(6) 非負性
(7) 有限加法性	(11) σ 加法性	(8) inf
(9) 劣加法性	(10) 外測度	(12) E
(13) A	(14) σ 加法族	(15) 測度

問 3–1 (10).　(解答方針の例)：

(i) 測度の定義
  (a) σ 加法族および測度の定義と簡単な性質
  (b) 測度の例
(ii) Lebesgue 測度の構成
  (a) 有限加法的測度から測度を構成する一般論（外測度，可測集合）
  (b) 一般論の Lebesgue 測度への適用
  (c) Lebesgue 可測集合の簡単な性質
(iii) 直積測度
(iv) 測度の一意性
  (a) 一般論（Borel 集合族，Hopf の拡張定理，完備性）
  (b) 一般論の Lebesgue 測度への適用

のように講義は続いていく (序章を除く)．終わったところまで書けばよい．小見出しを書くか，大見出しのみにしてそれを詳しくするかは分量を考えて選ぶ.

問 3–2 (5).　（原理的に解答例等は存在しません.）