解析学１後期試験問題

1996/12/16 服部哲弥

解答用紙は氏名と学籍番号を記入せよ．番号が 94CA$\cdots$ **以外** の者は名前を囲み，94CA$\cdots$ の者は名前に飾りをつけないこと．早く終わった者は答案を提出して退出してよい．空集合は $\emptyset$ と表記する．

問 1． 6 個の自然数を要素とする集合 $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ の部分集合を要素とする次の σ 加法族

$$\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1\}, \{3,5\}, \{1,3,5\}, \{2,4,6\}, \{1,2,4,6\}, \{2,3,4,5,6\}, \{1,2,3,4,5,6\}\}$$

を考える．集合関数 μ： $\mathcal{F} \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ は

$$\mu(\{1\}) = \mu(\{3,5\}) = \mu(\{2,4,6\}) = 1, \quad \mu(\{1,3,5\}) = \mu(\{1,2,4,6\}) = \mu(\{2,3,4,5,6\}) = 2,$$

を満たすとする． $\mu(\emptyset)$ と $\mu(\Omega)$ は μ が可測空間 $(\Omega, \mathcal{F})$ の上の測度になるように決める．

実数値関数 f： $\Omega \to \mathbf{R}$ が単関数であるとは，$f = a_1\chi_{E_1} + a_2\chi_{E_2} + \cdots + a_k\chi_{E_k}$ という形に表せることである．ここで，k は自然数，a_j たちは実数，E_j たちは $\Omega = E_1 + E_2 + \cdots + E_k$ （互いに共通部分を持たず，和集合が全体集合に等しい）を満たす可測集合（$\mathcal{F}$ に入っている集合）であり，また，記号 χ は定義関数 ($x \in A$ ならば $\chi_A(x) = 1$，$x \notin A$ ならば $\chi_A(x) = 0$) を表す．単関数 f の Ω での積分は $\int_\Omega f\,d\mu = a_1\mu(E_1) + a_2\mu(E_2) + \cdots + a_k\mu(E_k)$ で定義される．以上について，以下の各問いに答えよ．

問 1–1． μ が $(\Omega, \mathcal{F})$ の上の測度になるように $\mu(\emptyset)$ 及び $\mu(\Omega)$ の値を定めよ．

問 1–2． 次の 5 つの $f(x)$ で表される $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ 上の関数のうち，$(\Omega, \mathcal{F})$ で単関数になっているものを全て選べ．
$f(x) = 2x, \quad f(x) = \cos(\pi x), \quad f(x) = 2, \quad f(x) = \sqrt{x}, \quad f(x) = \sin(\frac{1}{2}\pi|x-4|).$

問 1–3． 前問で選んだ単関数それぞれについて Ω での積分を求めよ．

問 2． $(\mathbf{R}, \mathcal{F}_1, \mu_1)$ を 1 次元 Lebesgue 測度空間（実数上の完備測度で， $\mu_1(\,(a,b]\,) = b - a$ となる測度）とする．$x > 0$ で定義された実数値関数が可測関数であることと $\{x > 0 \mid f(x) > a\} \in \mathcal{F}_1$ が全ての実数 a に対して成り立つことが同値である．以下の問に答えよ．

問 2–1． $x > 0$ で定義された関数 $f(x) = \sqrt{x}$ が可測関数であることを上記の同値条件から証明せよ．

問 2–2． 次の文章の空欄 (1) と (2) に入る式を求めよ．
f が非負可測関数のとき，

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & f(x) = 0 \text{ のとき}, \\ (k-1)2^{-n}, & (k-1)2^{-n} < f(x) \le k2^{-n} \text{ のとき}, \ (k = 1,2,3,\cdots,2^n n), \\ n, & f(x) > n \text{ のとき}, \end{cases}$$

で定義される関数列 f_n, $n = 1,2,3,\cdots$, は $n \to \infty$ のとき f に各点収束する非負増大単関数列になる．例えば $f(x) = \sqrt{x}$ $(x > 0)$ とおくと， $k = 1,2,3,\cdots,2^n n$ に対して，$\boxed{\quad (1) \quad} < x \le \boxed{\quad (2) \quad}$ のとき $f_n(x) = (k-1)2^{-n}$ となる．

問 2–3． $f(x) = \sqrt{x}$ に対して前問で求めた単関数 f_n の， $0 < x \le 1$ での積分 $I_n = \int_{(0,1]} f_n\,d\mu_1$ を求めよ．
和の公式 $\sum_{\ell=1}^{N-1} \ell = \frac{1}{2}N(N-1)$, $\sum_{\ell=1}^{N-1} \ell^2 = \frac{1}{6}N(N-1)(2N-1)$, $\sum_{k=1}^{N} g(k) = \sum_{\ell=0}^{N-1} g(\ell+1)$, などを用いても良い．

問 2–4. 前問で求めた I_n について，$\lim_{n\to\infty} I_n$ を計算することによって $\int_0^1 \sqrt{x}\,dx = \lim_{n\to\infty} I_n$ を求めよ．

問 3. $\mathbf{R^2}$ 上の Lebesgue 測度 μ_2 は $\mathbf{R}$ 上の Lebesuge 測度 μ_1 2 個の直積測度 $\mu_1 \times \mu_1$ の完備化に等しい．このことを説明する次の文章の空欄 (1)–(10) に下の語群から適当なものを入れよ．(番号の等しい欄は同じ語が入り，番号の異なる欄は異なる語が入る．用いない語もある．解答は番号順に並べること．)

$\mathbf{R}$ 上の Lebesgue 可測集合族を $\mathcal{F}_1$ と書き，$\mathcal{I} = \{E \times F \mid E, F \in \mathcal{F}_1\}$ とおく．$\mathcal{I}$ の要素を $\boxed{\text{(1)}}$ と呼ぶ．有限個の $\boxed{\text{(1)}}$ の直和（共通部分を持たない和集合）全てを要素に持つ集合族を $\mathcal{J}$ とおくと $\mathcal{J}$ は $\boxed{\text{(2)}}$ になる．$\mathcal{J}$ で定義された集合関数 m を，$\boxed{\text{(1)}}$ に対して $m(E \times F) = \mu_1(E)\,\mu_1(F)$ $(0 \times \infty = 0$ の約束とする$)$ とし，$\boxed{\text{(1)}}$ の直和に対しては和でもって m の値を決めることにすると，m は σ 加法性を持つ σ 有限な有限加法的測度になる．従って $\boxed{\text{(3)}}$ により $\sigma[\mathcal{J}]$ の上の測度 μ に一意的に拡張できる．ここで $\sigma[\mathcal{J}]$ は $\mathcal{J}$ を含む $\boxed{\text{(4)}}$ の σ 加法族を表す．すぐ分かるように $\sigma[\mathcal{J}] = \sigma[\mathcal{I}]$ である．この μ が $\boxed{\text{(5)}}$ である．

さて，$\mathbf{R^2}$ の長方形（$\{(x, y) \mid a < x \le b,\ c < y \le d\}$ という形の集合）全てを要素に持つ集合族を $\mathcal{I}_2$ とするとき $\boxed{\text{(3)}}$ から，上の場合と同様に，$\mathcal{B}_2 = \sigma[\mathcal{I}_2]$ 上の測度であって，長方形に対してはその面積を与えるものがただ一つある．$\boxed{\text{(6)}}$ はこの測度の完備化である．$\mathcal{F}_1$ は区間を含むので $\mathcal{I} \supset \mathcal{I}_2$．従って，$\sigma[\mathcal{J}] = \sigma[\mathcal{I}] \boxed{\text{(7)}} \sigma[\mathcal{I}_2] = \mathcal{B}_2$ である．また，拡張の一意性から $\mathcal{B}_2$ 上では $\mu_2 = \mu_1 \times \mu_1$ である．$\mathcal{F}_1$ は区間が生成する σ 加法族 $\sigma[\mathcal{I}_1]$ の完備化だから測度 $(\mathbf{R^2}, \sigma[\mathcal{I}], \mu_1 \times \mu_1)$ はその作り方から $(\mathbf{R^2}, \mathcal{B}_2, \mu_1 \times \mu_1)$ の完備化に含まれる．従って，両者の完備化は一致する．

以上により，$\mathbf{R^2}$ 上の Lebesgue 測度 μ_2 は直積測度 $\mu_1 \times \mu_1$ の完備化に等しい．

ところで，$\boxed{\text{(3)}}$ は，$\boxed{\text{(2)}}$ $\mathcal{J}$ 上の σ 加法性を持つ有限加法的測度 m から σ 加法族 $\mathcal{F}$ 上の測度 μ を構成できることを主張しているが，具体的には次の方法による．Ω の部分集合 A に対して

$$\Gamma(A) = \inf\{\sum_{n=1}^{\infty} m(E_n) \mid E_n \in \boxed{\text{(8)}}\ (n = 1, 2, 3, \cdots),\ A \boxed{\text{(9)}} \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\}$$

とおくと Γ は外測度になる．次に，$E \subset \Omega$ が外測度 Γ に関して可測集合であるとは $\Gamma(E \cap A) + \Gamma(\boxed{\text{(10)}}) = \Gamma(A)$ が全ての $A \subset \Omega$ に対して成り立つことと定義する．可測集合の全体（集合族）を $\mathcal{F}$ とおき，Γ を $\mathcal{F}$ に制限したものを μ と書くと μ は測度になる．外測度と可測集合の定義から直ちに $\mathcal{F} \boxed{\text{(7)}} \mathcal{J}$ を得るが，さらに，m が σ 加法性を持つことから μ は $\mathcal{J}$ では m に一致する．即ち，このようにして得られた測度 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ は有限加法的測度 $(\Omega, \mathcal{J}, m)$ の拡張になっている．

このような測度の構成方法は一見技巧的であるが，Lebesgue の原論文を読むと，極めて自然な方法であることが分かる．実際，多くの非可算集合上の具体的かつ有用な測度の例は，この方法で構成されている．

語群

$\subset$	矩形集合	$\mathcal{J}$	最小	$E \cap A^c$	直積測度 $\mu_1 \times \mu_1$	Hopf の拡張定理
$\supset$	有限加法族	$\mathcal{F}$	最大	$E^c \cap A$	$\mathbf{R^2}$ 上の Lebesgue 測度 μ_2	Lebesgue の収束定理

問 4. 講義を「採点」せよ．特に，前期に比べて後期の講義に進歩があったかどうかを採点せよ．(書き方について自分の方針がない場合は，講義のよかった点，悪かった点と改善案，興味深かった部分，一番理解できなかった部分，をそれぞれ一つずつ以上あげよ．なお，万が一，出席十分とは言えなかったり，出席しても講義に身を入れていなかった者がいる場合は，なぜそうであったか，教員に可能な改善の方法は何か，という問題に置き換えて解答せよ．説得力 (正直に書いているように見えるか) および現実性 (講義改善の参考になるか) を採点基準とする．)

解析学１試験解答

1996/12/16 服部哲弥

問 1–1 (5×2)．　測度なので $\mu(\emptyset)=0$.　　　加法性から，例えば $\mu(\Omega)=\mu(\{1,3,5\})+\mu(\{2,4,6\})=3$.

問 1–2 (3×5)．　解答例：$\mathcal{F}$ の要素 (Ω の部分集合) は全て 2 を含めば 4 を含み，逆も真だから，$f(2)=f(4)$ が必要条件．$2x$ と $\sqrt{x}$ は単関数でない．残りが単関数であることは，　$\cos\pi x=\chi_{(\{2,4,6\})}-\chi_{(\{1,3,5\})}$，　$2=2\chi_\Omega$，　$\sin(\frac{1}{2}\pi|x-4|)=\chi_{(\{3,5\})}-\chi_{(\{1\})}$，　からわかる．

問 1–3 (5×3)．

$$\int_\Omega \cos\pi x d\mu(x)=-1,$$
$$\int_\Omega 2d\mu(x)=6,$$
$$\int_\Omega \sin(\frac{1}{2}\pi|x-4|)d\mu(x)=0\,.$$

問 2–1 (10)．　$a>0$ ならば $\{x>0\mid f(x)>a\}=\{x>a^2\}$ は $\mathcal{F}$ の要素である．また，$a\le 0$ ならば $\{x>0\mid f(x)>a\}=\{x>0\}$ は $\mathcal{F}$ の要素である．よって任意の実数 a に対して $\{x>0\mid f(x)>a\}\in\mathcal{F}$ だから $f(x)=\sqrt{x}$ は可測関数.

（$\{x>b\}=\bigcup_{n=[b]+1}^{\infty}(b,n]$ なので，$\{x>b\}$ という形の集合が $\mathcal{F}$ の要素になっていることが分かる.）

問 2–2 (5×2)．

(1) $(k-1)^2 2^{-2n}$

(2) $k^2 2^{-2n}$

問 2–3 (15)．　$N=2^n$ とおいて問題に与えられた公式を適宜利用すると，

$$I_n=\int_{(0,1]} f_n\,d\mu=\sum_{k=1}^{2^n}(k-1)2^{-n}\,(k^2 2^{-2n}-(k-1)^2 2^{-2n})$$
$$=\frac{1}{N^3}\sum_{k=1}^{N}(2k-1)(k-1)=\frac{1}{N^3}\sum_{\ell=0}^{N-1}(2\ell+1)\ell=\frac{1}{N^3}\sum_{\ell=1}^{N-1}(2\ell^2+\ell)$$
$$=\frac{1}{N^3}(\frac{1}{3}N(N-1)(2N-1)+\frac{1}{2}N(N-1))=\frac{1}{6N^2}(N-1)(4N+1)=\frac{1}{6\,4^n}(4\,4^n-3\,2^n-1)\,.$$

問 2–4 (5)．　$\displaystyle\int_0^1\sqrt{x}\,dx=\lim_{n\to\infty}I_n=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}.$

問 3 (4×10)．

(1) 矩形集合	(2) 有限加法族	(3) Hopf の拡張定理	(4) 最小
(5) 直積測度 $\mu_1\times\mu_1$	(6) $\mathbf{R^2}$ 上の Lebesgue 測度 μ_2	(7) $\supset$	(8) $\mathcal{J}$
(9) $\subset$	(10) $E^c\cap A$		

問 4 (20)．　（都合により解答例を省略します.）