統計数学試験問題

1996/07/09 服部哲弥

解答用紙は氏名と学籍番号を記入せよ．番号が 95CA$\cdots$ **以外** の者は名前を囲み，95CA$\cdots$ の者は名前に飾りをつけないこと．早く終わった者は答案を提出して退出してよい．

必要ならば，以下の事実を用いてもよい．

- 確率変数 X の期待値を $\mathrm{E}[\ X\ ]$ と書くとき，分散は $\mathrm{V}[\ X\ ] = \mathrm{E}[\ (X - \mathrm{E}[\ X\ ])^2\ ]$ で定義される．また，二つの確率変数 X, Y の相関係数は $r(X,Y) = \dfrac{\mathrm{E}[\ (X-\mathrm{E}[\ X\ ])(Y-\mathrm{E}[\ Y\ ])\ ]}{\sqrt{\mathrm{V}[\ X\ ]\mathrm{V}[\ Y\ ]}}$ で定義される．
- 非負整数の集合を $\mathbf{Z}_+$ と書く．$\mathbf{Z}_+$ 上の関数 f によって $P(A) = \displaystyle\sum_{n\in A} f(n)$ と表される分布（離散分布）の平均 M と分散 V は，それぞれ $M = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n\, f(n)$ および $V = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (n-M)^2\, f(n)$ である．
- 実数の集合を $\mathbf{R}$ と書く．$\mathbf{R}$ 上の関数 f によって $P(A) = \displaystyle\int_A f(x)\, dx$ と表される分布（連続分布）の平均 M と分散 V は，それぞれ $M = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx$ および $V = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} (x-M)^2\, f(x)\, dx$ である．f は確率測度 P の密度と呼ばれる．
- n 個から k 個選ぶ場合の数 ${}_nC_k$ について公式，${}_nC_k = {}_nC_{n-k}$ や $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} {}_aC_k\ {}_bC_{n-k} = {}_{a+b}C_n$ などが成り立つ．

問 1.

問 1–1. 以下の各項目は，それぞれ確率論において用いられる用語などの説明である．それぞれ何について述べているか，下記語群から選んで答えよ．語群の 15 個の語句は同じものを 2 度選んではいけないこととする．

(i) 与えられた集合（全体集合）の部分集合を要素とする集合（集合族）であって，空ではなく，補集合 (A^c) と可算和 ($\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$) という二種類の集合算に関して閉じているもの．

(ii) 与えられた σ-加法族上の実数値関数（集合関数）であって，$[0,1]$ を値域とし，σ 加法性を持ち，かつ，実際に値 1 をとるもの．

(iii) 実数の部分集合よりなる集合族であって，あらゆる区間を要素に持つ σ-加法族のうち最小のもの $\mathcal{B}_1$．

以下の項目では，確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ が与えられているとする．

(iv) $\mathcal{F}$ の要素の，確率論における別名．

(v) $\mathcal{F}$ のある要素 A と B に対して，$\mathrm{P}(\ A\cap B\ ) = \mathrm{P}(\ A\ )\mathrm{P}(\ B\ )$ が成り立つこと．

(vi) $\mathcal{F}$ の部分 σ-加法族 $\mathcal{G}$ と $\mathcal{H}$ に対して，$A \in \mathcal{G}$, $B \in \mathcal{H}$ ならば必ず $\mathrm{P}(\ A\cap B\ ) = \mathrm{P}(\ A\ )\mathrm{P}(\ B\ )$ が成り立つこと．

(vii) Ω 上の実数値関数 $X:\ \Omega \to \mathbf{R}$ であって，A が $\mathcal{B}_1$ の要素ならば必ず Ω の部分集合 $\{\omega\in\Omega \mid X(\omega)\in A\}$ が $\mathcal{F}$ の要素になる，という性質を持つもの．

以下の項目ではそのような性質を持つ関数 X, Y が与えられているとする．

(viii) $\{\omega\in\Omega \mid X(\omega)\in A\}$ の別の書き方 (記号で)．

(ix) $\mathcal{B}_1$ 上で定義された関数（集合関数） Q であって，$A\in\mathcal{B}_1$ に対して $Q(A) = \mathrm{P}(\ \{\omega\in\Omega \mid X(\omega)\in A\}\ )$ で定義されるもの．$Q = P\circ X^{-1}$ とも書く．

(x) 上記の $Q(A)$ のこと (言葉で)．

(xi) $\mathrm{P}(\ X\in A, Y\in B\ ) = \mathrm{P}(\ X\in A\ )\mathrm{P}(\ Y\in B\ )$ が，全ての $A\in\mathcal{B}_1$ と $B\in\mathcal{B}_1$ に対して成り立つこと．

(xii) 独立な確率変数列に関しては成り立つが，一般の確率変数列に対しては必ずしも成り立たない性質．
(xiii) 分散の平方根のこと．
(xiv) 分散の加法性に関する式であって，確率変数 X と Y が独立ならば成り立つが，一般には必ずしも成り立たない公式.
(xv) 確率変数 X と Y が独立でなくても成り立つ，分散の非線型性に関する公式.

語群

事象	確率変数	事象の独立性	標準偏差	積の期待値が期待値の積に等しい
σ-加法族	X の分布	確率変数の独立性	X の値が A に入る確率	$\mathrm{V}[\,aX\,] = a^2\mathrm{V}[\,X\,]$ (a は定数)
確率測度	$X^{-1}(A)$	σ-加法族の独立性	(1 次元)Borel 集合族	$\mathrm{V}[\,X+Y\,] = \mathrm{V}[\,X\,] + \mathrm{V}[\,Y\,]$

問 1–2. ある国の夫婦について，夫の身長 X と妻の身長 Y を調べたところ，全国平均（期待値）と標準偏差について，$\mathrm{E}[\,X\,] = 170cm$, $\sigma_X = \sqrt{\mathrm{V}[\,X\,]} = 16cm$, $\mathrm{E}[\,Y\,] = 160cm$, $\sigma_Y = \sqrt{\mathrm{V}[\,Y\,]} = 12cm$, であった. 以下の問に答えよ.

(i) 夫婦の平均身長 $Z = \dfrac{1}{2}(X+Y)$ の全国平均 $\mathrm{E}[\,Z\,]$ を求めよ.
(ii) 仮に，夫と妻の身長が独立であると仮定して，Z の標準偏差 $\sigma_Z = \sqrt{\mathrm{V}[\,Z\,]}$ を求めよ.
(iii) 実際には $\sigma_Z = 11cm$ であった．この結果を説明する仮説として次の 2 つが提案された．どちらの仮説がより適切か．理由をつけて答えよ.
(a) 長身の女性は長身の男性を，小柄な女性は小柄な男性を夫に選ぶ.
(b) 長身の女性は小柄な男性を，小柄な女性は長身の男性を夫に選ぶ.
注：理由付きでなければ採点しない．なお，この国は現代日本とは関係ないので，男女の嗜好に関する常識等は解答には利用できない (一夫一婦制とする).

問 1–3. 次の確率分布の平均，分散，及び，$P(\{0\})$ (0 が生じる確率)，を書け．答えのみでよい.

(i) $n = 0, 1, 2, \cdots, 10$ のとき $f(n) = {}_{10}C_n \left(\dfrac{1}{10}\right)^n \left(\dfrac{9}{10}\right)^{10-n}$, それ以外のとき $f(n) = 0$ となる，自然数上の関数 f を用いて，自然数の部分集合 A に対して $P(A) = \displaystyle\sum_{n \in A} f(n)$ と表される分布 (二項分布)．(この問題の $P(\{0\})$ の計算については，べき乗は計算しないでください．)
(ii) $x \geq 0$ のとき $f(x) = \frac{1}{2}e^{-x/2}$, $x < 0$ のとき $f(x) = 0$ となる，実数上の関数 f を用いて，Borel 集合 A に対して $P(A) = \displaystyle\int_A f(x)\,dx$ と表される分布 (指数分布).

問 2.

問 2–1. λ を正の定数とする．$\mathbf{Z}_+ = \{0, 1, 2, \cdots\}$ の任意の部分集合 $A \subset \mathbf{Z}_+$ に対して，

$$P(A) = \sum_{n \in A} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$$

となる $\mathbf{Z}_+$ 上の確率測度（Poisson 分布） P の平均と分散を求めよ.

問 2–2. 二人の人が硬貨をそれぞれ n 回ずつ投げて，表が何回出るかを比べる．二人の出した表の数が等しい確率を求めよ．硬貨は公平な硬貨，即ち，m 回硬貨を投げたとき起こりうる 2^m 通りの表裏の出方が全て等しい確率で起こるとする.

問 2–3.　20 人の子供の身長と体重を測定したところ，次のような結果を得た．

身長 X (cm)	体重 Y (kg)	人数 (人)
130	25	4
130	30	4
140	30	4
140	35	6
150	35	2

身長と体重それぞれの平均，および，身長と体重の相関係数，を求めよ．相関係数は小数第 2 位まででよい．

ここで，X がとる値（値域）が，$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_a,$ であって，$X = x_i$ となる確率（割合）が f_i^x のとき，$\mathrm{E}[\ X\ ] = \sum_{i=1}^{a} x_i\, f_i^x$ であり，確率変数 X, Y が取る値が，それぞれ $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_a,$ および $y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_b,$ であって，$(X,Y) = (x_i, y_j)$ となる確率が f_{ij} のとき，$\mathrm{E}[\ X\,Y\ ] = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} x_i\, y_j\, f_{ij}$ である．

平方根に関して下記の表を利用してもよい．

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

x	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
x^2	121	144	169	196	225	256	289	324	361	400

x	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
x^2	441	484	529	576	625	676	729	784	841	900

問 3.

(i) 講義を「採点」せよ．(書き方について自分の方針がない場合は，講義のよかった点，悪かった点と改善案，興味深かった部分，一番理解できなかった部分，をそれぞれ一つずつ以上あげよ．)

(ii) この試験問題 (問 1–問 3) を「採点」せよ．

統計数学試験解答

1996/07/09; rev. 1996/07/12 服部哲弥

問 1–1 (30).

(i) σ-加法族
(ii) 確率測度
(iii) (1 次元)Borel 集合族
(iv) 事象
(v) 事象の独立性
(vi) σ-加法族の独立性
(vii) 確率変数
(viii) $X^{-1}(A)$
(ix) X の分布
(x) X の値が A に入る確率
(xi) 確率変数の独立性
(xii) 積の期待値が期待値の積に等しい
(xiii) 標準偏差
(xiv) $\mathrm{V}[\,X+Y\,] = \mathrm{V}[\,X\,] + \mathrm{V}[\,Y\,]$
(xv) $\mathrm{V}[\,aX\,] = a^2\mathrm{V}[\,X\,]$ (a は定数)

問 1–2 (渡辺浩先生 (日本医科大学) の試験問題より) (15).

(i) 期待値の線型性から

$$\mathrm{E}[\,Z\,] = \frac{1}{2}(\mathrm{E}[\,X\,] + \mathrm{E}[\,Y\,]) = (170+160)/2 = 165cm\,.$$

(ii) $\mathrm{V}[\,Z\,] = \mathrm{V}[\,\frac{1}{2}(X+Y)\,] = \frac{1}{4}\mathrm{V}[\,X+Y\,]$ であるが，独立性の仮定から，$\mathrm{V}[\,X+Y\,] = \mathrm{V}[\,X\,]+\mathrm{V}[\,Y\,]$ となるので,

$$\sigma_Z = \sqrt{\frac{1}{4}(\mathrm{V}[\,X\,]+\mathrm{V}[\,Y\,])} = \frac{1}{2}\sqrt{16^2+12^2} = 10cm\,.$$

(iii) $\Delta X = X - \mathrm{E}[\,X\,]$, $\Delta Y = Y - \mathrm{E}[\,Y\,]$, とおく.

$$\begin{aligned}\mathrm{V}[\,Z\,] &= \frac{1}{4}\mathrm{V}[\,X+Y\,] = \frac{1}{4}\mathrm{E}[\,(\Delta X+\Delta Y)^2\,] \\ &= \frac{1}{4}(\mathrm{E}[\,(\Delta X)^2\,] + \mathrm{E}[\,(\Delta Y)^2\,] + 2\mathrm{E}[\,\Delta X\,\Delta Y\,]) = \frac{1}{4}(\mathrm{V}[\,X\,]+\mathrm{V}[\,Y\,]+2\mathrm{E}[\,\Delta X\,\Delta Y\,]),\end{aligned}$$

に，与えられた数値を代入すると，$\mathrm{E}[\,\Delta X\,\Delta Y\,] = 42$. よって X と Y の相関係数 $r(X,Y)$ は,

$$r(X,Y) = \frac{\mathrm{E}[\,\Delta X\,\Delta Y\,]}{\sqrt{\mathrm{V}[\,X\,]\mathrm{V}[\,Y\,]}} = \frac{42}{16\times 12} = \frac{7}{32} \approx 0.22 > 0\,.$$

相関が正なので，(a) が，より適切，と考える.

計算結果の意味． Z の標準偏差の実測値を上の問の結果と比較すると，独立であると仮定した場合よりも実測値のほうが大きい. (従って，特に，X と Y は独立ではない.) もし，大きい X と小さい Y （およびその逆）がペアになると，平均 Z はならされて，標準偏差が（独立な場合に比べて）小さいであろう．実測はその逆で，長身の者同士，小柄な者同士がペアになって, (独立，即ち，相関のない場合に比べて）標準偏差が大きくなった，と考えられる．よって，長身の女性は長身の男性を，小柄な女性は小柄な男性を夫に選ぶ，という仮説のほうが，このデータをよりよく説明する.

問 1–3 (20).

(i) 平均 1，分散 0.9，$P(\{0\}) = 0.9^{10}$.
(ii) 平均 2，分散 4，$P(\{0\}) = 0$.

問 2–1 (p.52 §2 問 7) (15). 公式 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}=e^{\lambda}$ の両辺を λ で微分して，その後で λ をかけると，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n\,\frac{\lambda^n}{n!}=\lambda\,e^{\lambda}$. 再び両辺を λ で微分して λ をかけると，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^2\,\frac{\lambda^n}{n!}=\lambda(e^{\lambda}+\lambda\,e^{\lambda})=(\lambda+\lambda^2)\,e^{\lambda}$. 以上を用いれば，平均 M，分散 V は，

$$\begin{aligned} M &= e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{\infty} n\,\frac{\lambda^n}{n!}=\lambda\,, \\ V &= e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{\infty} n^2\,\frac{\lambda^n}{n!}-M^2=(\lambda+\lambda^2)-\lambda^2=\lambda\,. \end{aligned}$$

問 2–2 (p.86 §3 問 17) (15). 二人で合計 $2n$ 回硬貨を投げることになる．仮定により公平な硬貨なので，合計 2^{2n} 通りの表裏の出方がある．二人の出した表の数が等しい事象（集合）と，A が出した表の数と B が出した**裏**の数をたすと n になるという事象は一致する．その，場合の数は，$2n$ 個の中から n 個取り出す場合の数に等しいから，${}_{2n}C_n$ である．よって，求める確率は $\dfrac{{}_{2n}C_n}{2^{2n}}$ である．

問 2–3 (p.104 §4 問 3 データを簡単化してある) (15). X を身長，Y を体重を表す確率変数とする．

$X \setminus Y$	25	30	35	X の分布
130	4	4	0	8
140	0	4	6	10
150	0	0	2	2
Y の分布	4	8	8	$N=20$

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[\,X\,] &= 140-10\times\frac{8}{20}+10\times\frac{2}{20}=137(\mathrm{cm})\,. \\ \mathrm{E}[\,Y\,] &= 30-5\times\frac{4}{20}+5\times\frac{8}{20}=31(\mathrm{kg})\,. \end{aligned}$$

X と Y の相関係数 $r(X,Y)$ を求めるために，$\Delta X=X-\mathrm{E}[\,X\,]$, $\Delta Y=Y-\mathrm{E}[\,Y\,]$, とおく．

$$r(X,Y)=\frac{\mathrm{E}[\,(X-\mathrm{E}[\,X\,])(Y-\mathrm{E}[\,Y\,])\,]}{\sqrt{\mathrm{V}[\,X\,]\,\mathrm{V}[\,Y\,]}}=\frac{\mathrm{E}[\,\Delta X\,\Delta Y\,]}{\sqrt{\mathrm{E}[\,(\Delta X)^2\,]\,\mathrm{E}[\,(\Delta y)^2\,]}}\,.$$

$\Delta X \setminus \Delta Y$	-6	-1	4	
-7	4	4	0	8
3	0	4	6	10
13	0	0	2	2
	4	8	8	20

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[\,(\Delta X)^2\,] &= (-7)^2\cdot\frac{8}{20}+3^2\cdot\frac{10}{20}+13^2\cdot\frac{2}{20}=41\,, \\ \mathrm{E}[\,(\Delta Y)^2\,] &= (-6)^2\cdot\frac{4}{20}+(-1)^2\cdot\frac{8}{20}+4^2\cdot\frac{8}{20}=14\,, \\ \mathrm{E}[\,\Delta X\,\Delta Y\,] &= (-7)\cdot(-6)\cdot\frac{4}{20}+(-7)\cdot(-1)\cdot\frac{4}{20}+3\cdot(-1)\cdot\frac{4}{20}+3\cdot 4\cdot\frac{6}{20}+13\cdot 4\cdot\frac{2}{20}=18\,. \end{aligned}$$

を表から得るので，

$$r(X,Y)=\frac{\mathrm{E}[\,\Delta X\,\Delta Y\,]}{\sqrt{\mathrm{E}[\,(\Delta X)^2\,]\,\mathrm{E}[\,(\Delta y)^2\,]}}=\frac{18}{\sqrt{14\times 41}}=\frac{18}{\sqrt{574}}\,.$$

平方根の表から，$\sqrt{574}\approx 24$（有効数字二桁）なので，$r(X,Y)\approx 18/24=0.75$ を得る．

問 3 (10).