数学基礎１　中間テスト　**問３　別解**

1999/06/09
服部哲弥

問３．

n を正の奇数とし，$a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$ を n 個の実数とする．x の奇数次の多項式 $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ は，任意の実数 α に対して $P(x) = \alpha$ を満たす実数 x を少なくとも一つは持つことを示せ。

次の別解は九州大学の落合啓之先生からご提案いただいたものです．

多項式

$$f(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1}(1-t^2) + \cdots + a_1 t(1-t^2)^{n-1} + (a_0 - \alpha)(1-t^2)^n$$

を考える．$f(1) = 1$, $f(-1) = (-1)^n = -1$ であり，f は多項式なので閉区間 $[-1, 1]$ で連続だから，中間値の定理より $f(c) = 0$ となるような $-1 < c < 1$ が存在する．

$b = c/(1-c^2)$ とおく．$(1-t^2)^n \left(P\left(\dfrac{t}{1-t^2}\right) - \alpha \right) = f(t)$ に注意すれば，$f(c) = 0$ より $P(b) = \alpha$ がわかる．