慶應義塾大学試験問題用紙（日吉）

試験時間	50 分	分

平成 22 年 7 月　日 (　)　時限施行		学部　学科　年　組	
担当者名	服部　哲弥　君	学籍番号	
科目名	経済数学 I	氏　名	

採　点　欄	※

注意：　なるべく答案用紙の表がわに収まるように簡潔に解答すること．

問 1 ．　以下の文章の空欄 (1)—(5) それぞれにいちばん当てはまる語句を語群から選んで (0) 集合 のように答えよ．同じ番号の空欄には同じ語句が入る．

微分は極限によって定義されるので，ある点での微分係数を求めるために，その点だけでなくその点の近くの点での関数の値が必要である．特に，多変数関数で微分の方法が有効であるためには (1) だけでなく，(2) でもある必要があり，注目する点の近くの全ての点が関数の定義域に含まれる必要がある．このことから，関数 f の定義域 A は，A のどの点 $x \in A$ も，x のある (3) $U_\delta(x)$ が f の定義域 A に含まれる ($U_\delta(x) \subset A$) として，定理を組み立てることが多い．この A の性質を持つ集合を (4) という．また，補集合が (4) である集合を (5) という．１点だけからなる集合 $\{a\}$，２点だけからなる集合 $\{a, b\}$ は (5) である．

語群

凸集合，開集合，閉集合，正則集合，内点，近傍，全微分可能，偏微分可能

問 2 ．　i) $\mathbb{R}^2$ 上で定義された実数値関数
$f(x,y) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}x^3 + x^4y + x^3y^3$
の勾配ベクトル $\nabla f(x,y)$ とヘッセ行列 $\nabla^2 f(x,y) = H_f(x,y)$ を計算せよ．
ii) 実 2 成分実 2 変数関数 $\mathbf{g}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ が
$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}$, $g_1(x,y) = x^2 + 4x^3y + 3x^2y^3$, $g_2(x,y) = x^4 + 3x^3y^2$
で定義されているとき，$\mathbf{g}$ のヤコビ行列 $\nabla \mathbf{g}$ を計算せよ．
（ i) ii) いずれも，答案用紙には途中の計算は書かなくて良い.）

問 3 ．　i) $\mathbb{R}^2$ 上で定義された実数値関数 $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - x^2 - y^2$ について $\nabla f(x,y) = \mathbf{0}$ となる点 (x,y) を全て求めよ．
ii) i) で求めた各点について，ヘッセ行列 $\nabla^2 f(x,y) = H_f(x,y)$ の符号を正定値・負定値・不定符号などとして答案用紙に記し，極値をとるか否かを記せ．さらに極値をとる点については極大か極小かを答えよ．
（ i) ii) いずれも，答案用紙には途中の計算は書かなくて良い.）

問 4 ．　$\mathbb{R}^2$ 上で定義された実数値関数 $f(x,y) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}x^3 + x^2y$ および $g(x,y) = 2x + y - 1$ において，条件 $g(x,y) = 0$ の下で $f(x,y)$ が極値をとる点の候補を**ラグランジュの乗数法によって**求めよ．答案用紙には解くべき方程式，および，解いて得られた (x,y) の値に加えてそのときのラグランジュの乗数の値と $f(x,y)$ の値も記すこと．

経済数学 I　期末試験　**略解**　　2010/07/28 服部哲弥

問 1 (20).　【第 1 章 位相（開集合，閉集合，近傍）】

(1) 偏微分可能 (2) 全微分可能 (3) 近傍 (4) 開集合 (5) 閉集合

問 2 (30).　【第 2 章 偏微分（勾配ベクトル，ヘッセ行列，ヤコビ行列）】

i) $\nabla f(x,y) = (-x + x^2 + 4x^3y + 3x^2y^3, -y + x^4 + 3x^3y^2)$

$$\nabla^2 f(x,y) = H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -1 + 2x + 12x^2y + 6xy^3 & 4x^3 + 9x^2y^2 \\ 4x^3 + 9x^2y^2 & -1 + 6x^3y \end{pmatrix}$$

$$\nabla \mathbf{g}(x,y) = \begin{pmatrix} 2x + 12x^2y + 6xy^3 & 4x^3 + 9x^2y^2 \\ 4x^3 + 9x^2y^2 & 6x^3y \end{pmatrix}$$

問 3 (30).　【第 3 章 極値（勾配ベクトルの零点，ヘッセ行列の符号）】

i) $\nabla f(x,y) = (3x^2 + 3y^2 - 2x, 6xy - 2y)$

$\nabla f(x,y) = \mathbf{0}$ となる点は，$(0,0)$, $(\frac{2}{3},0)$, $(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$, $(\frac{1}{3},-\frac{1}{3})$

ii) $\nabla^2 f(x,y) = H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x-2 & 6y \\ 6y & 6x-2 \end{pmatrix}$

$(0,0)$: $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$，負定値なので極大.$(f(0,0) = 0)$

$(\frac{2}{3},0)$: $H_f(\dfrac{2}{3},0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$，正定値なので極小.$(f(\frac{2}{3},0) = -\frac{4}{27})$

$(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$: $H_f(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, 固有値は ± 2，不定符号なので極値ではない.$(f(\frac{1}{3},\frac{1}{3}) = -\frac{2}{27})$

$(\frac{1}{3},-\frac{1}{3})$: $H_f(\dfrac{1}{3},-\dfrac{1}{3}) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, 固有値は ± 2，不定符号なので極値ではない.

$(f(\frac{1}{3},-\frac{1}{3}) = -\frac{2}{27})$

問 4 (20).　【第 4 章 ラグランジュの乗数法（等式条件下，必要条件）】

解くべき方程式は，$\nabla f(x,y) + \lambda \nabla g(x,y) = (-x + x^2 + 2xy + 2\lambda, -y + x^2 + \lambda) = (0,0)$ と，拘束条件 $g(x,y) = 2x + y - 1 = 0$ の連立方程式．$y = 1 - 2x$ で y を消去して，残り 2 つの式から x^2 を消去すると x の 1 次方程式を得る．これを解くと，$x = \dfrac{1}{7}(3 - 5\lambda)$, $y = \dfrac{1}{7}(1 + 10\lambda)$．$x$ を x の 2 次方程式のどちらかに入れれば λ の 2 次方程式 $25\lambda^2 - 51\lambda + 2 = 0$ を得る．これを解くと $\lambda = \dfrac{1}{25}$ と $\lambda = 2$．それぞれについて，

$(x,y) = (\dfrac{2}{5},\dfrac{1}{5})$, $\lambda = \dfrac{1}{25}$, $f(\dfrac{2}{5},\dfrac{1}{5}) = -\dfrac{7}{150}$ および，$(x,y) = (-1,3)$, $\lambda = 2$, $f(-1,3) = -\dfrac{7}{3}$