慶應義塾大学試験問題用紙（日吉）

試験時間	50分	分	

				採　点　欄	※
平成23年1月25日(火) 5時限施行		学部　学科　年　組			
担当者名	服部　哲弥　君	学籍番号			
科目名	経済数学 II	氏　名			

注意：　なるべく答案用紙の表がわに収まるように簡潔に解答すること．

問１．　以下は，$2xy+2x+y \leqq 1$, $x \geqq 0$, $y \geqq 0$ の条件下で，xy の最大値を求めるための手続きである．これに関して，下記の小問 1-1 から 1-4 に答えよ．

i) xy の最大値は $f(x,y)=-xy$ の最小値．条件は $g_1(x,y)=2xy+2x+y-1 \leqq 0$, $g_2(x,y)=-x \leqq 0$, $g_3(x,y)=-y \leqq 0$ と書ける．
条件を満たす集合 $S=\{(x,y) \mid g_1(x,y) \leqq 0,\ g_2(x,y) \leqq 0,\ \ g_3(x,y) \leqq 0\}$ は，有界閉集合で，f は（多項式なので）連続だから S 上で最小値をとる．その候補 (x,y) は Fritz–John 条件を満たす：

$$\mu_0 \nabla f(x,y) + \sum_{i=1}^{3} \mu_i \nabla g_i(x,y) = \mathbf{0}, \qquad \text{— (*1)}$$

$$(\mu_0,\mu_1,\mu_2,\mu_3) \neq (0,0,0,0),\ \mu_0 \geqq 0, \qquad \text{— (*2)}$$

$i=1,2,3$ について $\mu_i \geqq 0$, $\mu_i g_i(x,y)=0$, $g_i(x,y) \leqq 0$. — (*3)

問 1-1． (*1) を具体的な数式として（記号 f, g_i, ∇ を使わない形で）書き下せ．答えだけでよい．

ii) μ_0 が正か 0 かで場合分けする．

(a) $\mu_0=0$ のとき（条件が退化している点）．

問 1-2． $\mu_0=0$ のときに Fritz–John 条件を満たす点 (x,y) があれば全て求めよ．無ければ無しと明記せよ．答えだけでよい．

(b) $\mu_0>0$ のとき（Kuhn–Tucker 条件を満たす点）．$i=1,2,3$ について $\mu_i=\lambda_i\,\mu_0$ とおいて μ_i たちを消去すると，Fritz–John 条件は Kuhn–Tucker 条件になる．

問 1-3． $\mu_0>0$ のときに $\lambda_i=\mu_i/\mu_0$ に関する Kuhn–Tucker 条件を満たす点 (x,y) があれば全て求めよ．無ければ無しと明記せよ．答えだけでよい．

iii) 候補の間で比較する．

問 1-4． 問 1-2 と問 1-3 で得られた最小値の候補を与える点 (x,y) について（複数あればそれぞれについて），$f(x,y)$ を求めよ．答えだけでよい．さらに，最初の問題である不等式条件下での xy の最大値を求めよ．

問２．　以下は，条件 $x+y \geqq 3$ と $y \geqq 2$ の下で，$f(x,y)=3x^2+y^2$ の最小値を求めるための手続きである．これに関して，下記の小問 2-1 から 2-6 に答えよ．

条件は $g_1(x,y)=3-x-y \leqq 0$, $g_2(x,y)=2-y \leqq 0$ と書ける．
g_1 と g_2 は 1 次関数なので凸関数．　　— (☆1)
そして，たとえば $g_i(5,5)<0$, $i=1,2$, が成り立つ．また，f は，

$$f(x,y)=(x\ y)A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \text{— (☆2)}$$

と，非負定値 2 次行列 A を用いて書けるので凸関数．

（たとえば $g_i(5,5)<0,\ i=1,2,$ が成り立つので,）開凸集合 $\mathbb{R}^2$ 上の C^1 級凸関数 f が C^1 級凸関数で書かれた不等式条件 $g_i \leqq 0,\ i=1,2,$ の下で，$(x,y)\in\mathbb{R}^2$ で最小値をとることと，Kuhn–Tucker 条件が成り立つことが同値である．

問 2-1． 問 1 の (*1), (*3) にならって，Kuhn–Tucker 条件を考察し，問 1-1 と同様に，具体的な数式として（記号 f, g_i, ∇ を使わない形で）Kuhn–Tucker 条件すべてを書き下せ．未定乗数の記号は条件 g_1 と g_2 に対応して，それぞれ λ_1 と λ_2 を用いよ（以下の小問で用いる）．答えは具体的な条件の組だけでよい．

f が点 (x,y) で最小値をとることと，その点で Kuhn–Tucker 条件を満たす λ_i たちがあることが同値なので，Kuhn–Tucker 条件を満たす点が一つ見つかれば，そこで取る値が最小値である．

問 2-2． $\lambda_1>0$ かつ $\lambda_2=0$ の場合に，Kuhn–Tucker 条件を満たす点 (x,y) を求めよ．答えは点 (x,y) の値だけでよい．

問 2-3． 問 2-2 の点が Kuhn–Tucker 条件および最初の不等式条件をすべて満たすことを確認せよ.（答案用紙には，条件のすべてを尽くして具体的に調べたことがわかるように，かつ，簡潔に答えよ.）

問 2-4． $f(x,y)$ の与えられた不等式条件下での最小値を求めよ．答えだけでよい．

問 2-5． (☆ 1) に関して，a, b, c を実定数とするとき，1 次関数 $g(x,y)=a\,x+b\,y+c$ が凸関数であることを，$0<\lambda<1$ のとき，$g(\lambda x_1+(1-\lambda)y_1, \lambda x_2+(1-\lambda)y_2)$ を変形することで，証明せよ．

問 2-6． (☆ 2) を満たす実 2 次正方行列を求めよ．答えだけでよい．

問 1 (40=10*4).　　【テキスト p.32 問 (2) 類題】

1-1.　$\nabla f(x,y)=(-y,-x)$, $\nabla g_1(x,y)=(2y+2,2x+1)$, $\nabla g_2(x,y)=(-1,0)$, $\nabla g_3(x,y)=(0,-1)$, だから，

$\underline{-y\mu_0+(2y+2)\mu_1-\mu_2=0}$, $\underline{-x\mu_0+(2x+1)\mu_1-\mu_3=0}$.

1-2.　$\mu_0=0$ のとき．テキスト p.32 問 (2) の解答例と同様の計算によって，

$\mu_0=0$ のとき Fritz–John 条件を満たす点は無い.

1-3.　$\mu_0>0$ のとき.

S の点は $x\geqq 0$ と $y\geqq 0$ を満たす.

問 1-1 の結果から，$\lambda_1=\dfrac{y+\lambda_2}{2y+2}=\dfrac{x+\lambda_3}{2x+1}$.　— (*4)

$\lambda_1=0$ のとき，x, y, λ_2, λ_3 は非負なので，$\lambda_2=\lambda_3=x=y=0$．すなわち，

$(0,0)$ が極小値を取る点の候補.

$\lambda_1>0$ のとき，(*3) から $g_1(x,y)=2xy+2x+y-1=0$ — (*5)

テキスト p.32 問 (2) の解答例と同様の計算によって，$x=0$ も $y=0$ も Kuhn–Tucker 条件を満たす点はないので，$xy\neq 0$ となるが，これは，$g_2(x,y)=-x\neq 0$，$g_3(x,y)=-y\neq 0$ を意味するので，Kuhn–Tucker 条件から $\lambda_2=\lambda_3=0$．よって (*4) から $y=2x$．これと (*5) と $x\geqq 0$ から，$2x=y=\sqrt{2}-1$．これは，Kuhn–Tucker 条件をすべて満たすので，

$(\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1),\sqrt{2}-1)$ が極小値を取る点の候補.

1-4.　$\underline{f(0,0)=0}$, $\underline{f(\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1),\sqrt{2}-1)=\sqrt{2}-\frac{3}{2}}$．以上を比べると，

$xy=-f(x,y)$ の最大値は $(x,y)=(\dfrac{1}{2}(\sqrt{2}-1),\sqrt{2}-1)$ のときの $\frac{3}{2}-\sqrt{2}$ である.

問 2 (60=10*6).　　【テキスト p.45 問 (7) 類題】

2-1.　$\nabla f(x,y)=(6x,2y)$, $\nabla g_1(x,y)=(-1,-1)$, $\nabla g_2(x,y)=(0,-1)$, だから，Kuhn–Tucker 条件は，

$\underline{6x-\lambda_1=0}$, $\underline{2y-\lambda_1-\lambda_2=0}$,　— (☆3)

$\underline{\lambda_1\geqq 0}$, $\underline{\lambda_2\geqq 0}$, $\underline{\lambda_1(3-x-y)=0}$, $\underline{\lambda_2(2-y)=0}$.

以上に，最初の不等式条件 $x+y\geqq 3$, $y\geqq 2$ を加えたものが条件のすべてとなる.

2-2.　$\lambda_1>0$ だから $g_1(x,y)=0$，すなわち $y=3-x$．これと (☆3) と $\lambda_2=0$ から，$\lambda_1=6-2x=6x$．これを解いて，$\underline{x=\dfrac{3}{4}.\ \ y=3-x=\dfrac{9}{4}}$.

2-3.　$\lambda_1=\dfrac{9}{2}$ となるので，$\underline{\lambda_1>0}$. また，$\underline{g_1(\frac{3}{4},\ \frac{9}{4})=3-\frac{3}{4}-\frac{9}{4}=0}$. $\underline{\lambda_2=0}$ は既出.

$\lambda_2=0$ なので g_2 については元の不等式条件を確認すればよい：$\underline{g_2(\frac{3}{4},\ \frac{9}{4})=2-\frac{9}{4}=-\frac{1}{4}<0}$.

(☆3) について，$\underline{6x-\lambda_1=\dfrac{9}{2}-\dfrac{9}{2}=0}$, $\underline{2y-\lambda_1-\lambda_2=\dfrac{9}{2}-\dfrac{9}{2}-0=0}$.

よって，Kuhn–Tucker 条件および最初の不等式条件をすべて満たす.

2-4.　問題文最初に注意したように，点 (x,y) で Kuhn-Tucker 条件が成り立つことと最小値をとることが同値で，$\lambda_1>0$, $\lambda_2=0$ の場合に条件を満たす点を見つけたから，そこでとる値 $\underline{f(\dfrac{3}{4},\ \dfrac{9}{4})=\dfrac{27}{4}}$ が最小値である.

2-5.　$g(\lambda x_1+(1-\lambda)y_1,\lambda x_2+(1-\lambda)y_2)=a(\lambda x_1+(1-\lambda)y_1)+b(\lambda x_2+(1-\lambda)y_2)+c\leqq\lambda(ax_1+bx_2+c)+(1-\lambda)(ay_1+by_2+c)=\lambda g(x_1,x_2)+(1-\lambda)g(y_1,y_2)$ よって，1 次関数は凸関数.（実際は，等号なので，凸かつ凹.）

2-6.　$f(x,y)=3x^2+y^2=(x\ y)\begin{pmatrix}3&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ だから $\underline{A=\begin{pmatrix}3&0\\0&1\end{pmatrix}}$.