慶應義塾大学試験問題用紙（日吉）

試験時間	50 分	分

平成 24 年 2 月 1 日 (水) 1 時限施行		学部　学科　年　組	
担当者名	服部　哲弥　君	学籍番号	
科目名	経済数学 II	氏　名	

採　点　欄	※

注意：　答案用紙の表がわに収まるように簡潔に解答すること．

問 1 ．　a, b, c を正の定数たちで $a^2 + b^2 + c^2 > 1$ を満たすものとする．以下は，x, y, z が非負で，点 (x, y, z) が原点 O を中心として半径 1 の球内または球面上にある，という条件の下で，$f(x, y, z) = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2$ で定義される関数 f の最小値を求めるための手続きである．これに関して，以下の小問 1–1 から 1–6 に答えよ．

$g_1(x, y, z) = \boxed{}$, $g_2(x, y, z) = -y$, $g_3(x, y, z) = -z$, $g_4(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$, で関数 g_i, $i = 1, 2, 3, 4$, を定義すると，条件は $g_i(x, y, z) \leqq 0$, $i = 1, 2, 3, 4$, と書ける．

問 1–1． $g_1(x, y, z)$ を求めよ．答えだけでよい．

f および g_i たちは $\mathbb{R}^3$ 上で定義された多項式の凸関数であり，そして，たとえば $g_i(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) < 0$, $i = 1, 2, 3, 4$, が成り立つことは直接代入すればわかる．したがって，（テキストおよび講義のとおり，）不等式条件 $g_i \leqq 0$, $i = 1, 2, 3, 4$, の下で，f が $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ で最小値をとることと，Kuhn–Tucker 条件が成り立つことが同値である．

Kuhn–Tucker 条件は，不等式条件の個数と同数の未定乗数についての不等式 $\lambda_i \geqq 0$, $i = 1, 2, 3, 4$, および，等式 $\lambda_i\, g_i(x, y, z) = 0$, $i = 1, 2, 3, 4$, および，等式条件下の極値問題におけるラグランジュの未定乗数法と同様の等式（方程式）たち

$$\overrightarrow{\nabla} f(x, y, z) + \sum_{i=1}^{4} \lambda_i\, \overrightarrow{\nabla} g_i(x, y, z) = \overrightarrow{0} \qquad — \quad (*1)$$

をすべて満たす，という条件である．

問 1–2． (*1) を 3 本の具体的な方程式として（記号 f, g_i, $\overrightarrow{\nabla}$ を使わずに）書け．答えだけでよい．

f が点 (x, y, z) で最小値をとることとその点で Kuhn–Tucker 条件が成り立つことが同値なので，Kuhn–Tucker 条件を満たす点が 1 つ見つかれば，そこで取る値が最小値である．

問 1–3． $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ かつ $\lambda_4 > 0$ の場合に，Kuhn–Tucker 条件を満たす λ_4 を求めよ．答えだけでよいが，a, b, c 以外の変数 $(x, y, z, \lambda_i$ など$)$ を含ま**ない**形で答えよ（以下の小問も同様）．

問 1–4． 問 1–3 の場合の Kuhn–Tucker 条件を満たす点 (x, y, z) を求めよ．答えだけでよい．

問 1–5． 問 1–4 で得た点が不等式条件 $g_i(x, y, z) \leqq 0$, $i = 1, 2, 3, 4$, を満たすことを確認せよ．（答案用紙には，具体的に調べたことがわかるように，かつ，１つの条件につき１行で答えよ.）

問 1–6． $f(x, y, z)$ の $g_i(x, y, z) \leqq 0$, $i = 1, 2, 3, 4$, の下での最小値を求めよ．答えだけでよい．

問 2 ．　凸集合，凸関数，分離定理に関して，以下の小問 2–1 から 2–4 に答えよ．

問 2–1． 平面 $\mathbb{R}^2$ の部分集合 S が凸集合とは，$(x_1, y_1) \in S$, $(x_2, y_2) \in S$, $0 < \lambda < 1$ をどう選んでも，$(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2, \lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2) \in S$ が成り立つことを言う．次の選択肢に挙げた 10 個の平面の領域（部分集合）のうち，凸集合だけをすべて答案用紙に書き写せ．なお，名称で挙げた領域は全て境界を含むとする．

選択肢：　円の外部，　円の内部，　平行四辺形の内部，
第 1 象限，　第 1 象限と第 3 象限の和集合，　第 1,2,3 象限の和集合，　$\mathbb{R}^2$，
$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqq 2\}$，　$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leqq x^2 + y^2 \leqq 2\}$，　$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leqq x^2 + y^2\}$

問 2–2． 2 変数関数 f が凸関数であるとは，$(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, $0 < \lambda < 1$ をどう選んでも，
$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2) \leqq \lambda f(x_1, y_1) + (1-\lambda)f(x_2, y_2)$
が成り立つことを言う．

$f(x,y) = (p-1)^2x^2 + 2(p^2-1)xy + (2p+3)y^2$ で定義される 2 変数関数 f が $\mathbb{R}^2$ で凸関数となるような実数 p の範囲を求めよ．答えだけでよい．

問 2–3． 2 変数凸関数 f を用いて $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) < 0\}$ で定まる集合 A は $\mathbb{R}^2$ の凸集合である．テキストにも既出のこの事実を，$f(x,y) = x^2 + \boxed{}$ で定まる関数に適用すると，原点を中心とする半径 $\sqrt{3}$ の円の内部は凸集合とわかる．$\boxed{}$ 内を埋めることで $f(x,y)$ を求めよ．(答えだけでよいが，$f(x,y) =$ で始めること．)

以下では，ベクトルについての不等式は，(講義およびテキストと同様に）その全成分について不等号が成り立つ意味とする．

テキストでは，不等式条件下の極値問題の微分法による必要条件を，(成分に関して対称な）覚えやすい整理された形 (Fritz–John 条件，Kuhn–Tucker 条件) に直すために次の Gordan の定理を用いる：$m \times n$ 行列 B に対して，$S_1 = \{B\,\overrightarrow{y} \mid \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^n\}$ および $S_2 = \{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^m \mid \overrightarrow{x} < \overrightarrow{0}\}$ とおくとき，

『S_1 と S_2 が共通部分を持たないならば，$\overrightarrow{p} \neq \overrightarrow{0}$ と $\overrightarrow{p} \geqq \overrightarrow{0}$ を満たす $\overrightarrow{p} \in \mathbb{R}^m$ であって，$\overrightarrow{x} \in S_1$ ならば必ず $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{p}) = 0$ となるものが存在する．』

テキストでは，これを証明するのに次の分離定理を用いた：

『$\mathbb{R}^n$ の共通部分を持たない凸集合は $\mathbb{R}^n$ の中のある $\mathbb{R}^{n-1}$ 次元（超）平面で分離される．』

実際，S_1 と S_2 は共通部分を持たない凸集合なので，分離定理から，$\overrightarrow{x} \in S_1$ ならば $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{p}) \geqq \alpha$, $\overrightarrow{x} \in S_2$ ならば $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{p}) \leqq \alpha$, となるような，$\overrightarrow{0}$ でない m 次元ベクトル $\overrightarrow{p}$ と実数 α がある．$\overrightarrow{0} \in S_1$ であり $\overrightarrow{0}$ にいくらでも近い S_2 に属するベクトルがあるので $\alpha = 0$ となり，さらに S_2 には全ての $i = 1, 2, \ldots, m$ に対して標準の単位ベクトル $\overrightarrow{e}_i$ にいくらでも近いベクトルが含まれるから $\overrightarrow{p} \geqq \overrightarrow{0}$ を得る．ところで，S_1 は線形空間なので，$\overrightarrow{x} \in S_1$ ならば $-\overrightarrow{x} \in S_1$ でもある．もし $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{p}) > 0$ ならば $(-\overrightarrow{x}, \overrightarrow{p}) < 0$ となって，分離定理の結論に反する．よって全ての $\overrightarrow{x} \in S_1$ について $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{p}) = 0$ となるので，この $\overrightarrow{p}$ が求めるものである．

問 2–4． 講義の説明で頻繁に用いたように，2 次元ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ に対して平面の点 (x,y) を対応させることで 2 次元ベクトルの集合を平面の領域として図示することができる．上記の Gordan の定理の証明の説明において，$m = 2$, $n = 3$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -6 \end{pmatrix}$ の場合を考え，S_1 と S_2 を図示し，さらに，Gordan の定理によって得られる $\overrightarrow{p}$ を原点からのベクトルとして重ねて図示せよ．(答えは図だけでよい．)

経済数学 II　期末試験　**略解**　　2012/02/01 服部哲弥

問 1 (60=10*6).

【テキスト p.43 定理 6 系，p.45 問 (8) 類題】

1–1.　$g_1(x,y,z) = -x$.

1–2.　$2(x-a) - \lambda_1 + 2x\lambda_4 = 0$, $2(y-b) - \lambda_2 + 2y\lambda_4 = 0$, $2(z-c) - \lambda_3 + 2z\lambda_4 = 0$.

1–3.　問 1–2 の答えに $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ を代入して，$x = \dfrac{a}{1+\lambda_4}$, $y = \dfrac{b}{1+\lambda_4}$, $z = \dfrac{c}{1+\lambda_4}$.

$\lambda_4 > 0$ から $g_4(x,y,z) = 0$ なので，$\dfrac{a^2+b^2+c^2}{(1+\lambda_4)^2} = 1$.

$\lambda_4 > 0$ に注意して解くと $\lambda_4 = \sqrt{a^2+b^2+c^2} - 1$.

1–4.　問 1–3 から，$(x,y,z) = \left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right)$.

1–5.

$g_1(x,y,z) = -\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} < 0$,

$g_2(x,y,z) = -\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} < 0$,

$g_3(x,y,z) = -\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} < 0$,

$g_4(x,y,z) = \dfrac{a^2+b^2+c^2}{a^2+b^2+c^2} - 1 = 0$.

1–6.　問題文のとおり，Kuhn–Tucker 条件（と不等式条件）の成り立つ点でとる f の値が最小値である．よって問 1–4 の (x,y,z) を $f(x,y,z)$ に代入すると，最小値は

$f\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right) = (\sqrt{a^2+b^2+c^2} - 1)^2$.

問 2 (40=10*4).

【テキスト p.27 定理 1，p.37 定義定理 1，p.50 定理 7 および対応する講義】

2–1.　円の内部，平行四辺形の内部，第 1 象限，$\mathbb{R}^2$，$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leqq 2\}$.

2–2.　$f(x,y) = (p-1)^2(x + \dfrac{p+1}{p-1}y)^2 + (-p^2+2)y^2$．これが凸関数になる必要十分条件は $-\sqrt{2} \leqq p \leqq \sqrt{2}$.

2–3.　$f(x,y) = x^2 + y^2 - 3$.

2–4.