慶應義塾大学試験問題用紙（日吉）

試験時間	50 分	分

平成 24 年 7 月 24 日 (火) 6 時限施行		学部　学科　年　組	
担当者名	服部　哲弥　君	学籍番号	
科目名	経済数学 I	氏　名	

採　点　欄	※

注意：　解答は答案用紙の表がわに収めること．答えだけでよい．

問１．　偏微分に関連する以下の量 i) ii) iii) を計算せよ．答案用紙は計算結果だけでよい．

i) $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy + 4x^3 + x^2y^2$ で与えられる 2 変数関数 $f:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ の勾配ベクトル $\overrightarrow{\nabla} f(x,y) = (\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y))$.

ii) 上と同じ関数 f のヘッセ行列の点 $(0,0)$ での値 $\overrightarrow{\nabla}^2 f(0,0) = H_f(0,0)$.

iii) $\overrightarrow{g}(x,y,z) = \begin{pmatrix} g_1(x,y,z) \\ g_2(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y+3z \\ (x-1)^2 - (y-1)^2 + (z-1)^2 \end{pmatrix}$ で与えられる 3 変数 $\mathbb{R}^2$ 値 (2成分) 関数 $\overrightarrow{g}:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ のヤコビ行列 $\overrightarrow{\nabla}\,\overrightarrow{g}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} & \frac{\partial g_1}{\partial z} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} & \frac{\partial g_2}{\partial z} \end{pmatrix}(x,y,z)$.

問２．　$f(x,y) = -4x^2 + 15xy + 4y^2 - 3x^2y + y^3$ で定まる関数 $f:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ の原点 $(0,0)$ での極値を 2 階偏微分までを用いて判定することについて，以下の問いに答えよ．

i) f のヘッセ行列の原点での値 $\overrightarrow{\nabla}^2 f(0,0) = H_f(0,0)$ の固有値を全て求めよ．答案用紙は固有値だけでよい．

ii) 原点 $(0,0)$ は f の <u>極大値を与える点</u>，<u>極小値を与える点</u>，<u>峠点（鞍点）</u>，<u>極値を与える点でも峠点でもない点</u>，<u>f の 2 階微分まででは判定できない</u>，のいずれが正しいか，一つ選んで下線のとおり答案に書け．答案用紙は選択結果だけでよい．

iii) $g(x,y) = 3x + 5y$ で定まる関数 $g:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ による条件 $g(x,y) = 0$ の下での f の極値問題について，原点 $(0,0)$ は <u>極大値を与える点</u>，<u>極小値を与える点</u>，<u>峠点（鞍点）</u>，<u>極値を与える点でも峠点でもない点</u>，<u>f の 2 階微分まででは判定できない</u>，のいずれが正しいか，一つ選んで下線のとおり答案に書け．答案用紙は選択結果だけでよい．

問３．　以下の文は講義またはテキストで紹介した定理の意味の一端を説明する例文である．空欄 (1)–(4) に適切な語句を下記語群から選び，答案用紙に <u>(5) 確率積分</u> のように記入せよ．なお，同じ番号の空欄は同じ語句が入る．

i) $\mathbb{R}$ の開区間 $(0,1)$ 上で $f(x) = \dfrac{1}{x}$ によって定義された関数 $f:\ (0,1) \to \mathbb{R}$ は最大値がないが，これが最大値の定理と矛盾しないのは，定義域 $(0,1)$ が $\boxed{(1)\qquad}$ ではないからである．

ii) 合成関数の微分公式，たとえば，$F(t) = f(g(t),h(t))$ に対して
$$\frac{dF}{dt}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(g(t),h(t))\,\frac{dg}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(g(t),h(t))\,\frac{dh}{dt}(t),$$
の証明で用いる平均値の定理の仮定は単に $\boxed{(2)\qquad}$ だけでなく，たとえば偏導関数の連続性も要請する．合成関数の微分公式の証明で，F の微分の定義の極限を取る際に，g と h が同時に変化することから，変数の同時変化に対する微分のすなおな変化が必要なので，$\boxed{(2)\qquad}$ よりも強い条件を要請するのは自然である．

iii) 2 変数関数 $f(x, y)$ がある点 (a, b) で極値を持つことが，2 次のテイラーの定理によって結論できるとき，f の等高線 $f(x, y) = c$ は点 (a, b) の近傍では $\boxed{(3)\qquad\qquad}$ に近い．

iv) $g(x, y) = 0$ の条件下で $f(x, y)$ の極値を求める問題は，条件を $y = \phi(x)$ の形に「y について解く」ことができれば，これを代入することによって 1 変数関数 $F(x) = f(x, \phi(x))$ の極値を求める問題に帰着できる．陰関数定理は，このように「一方の変数について解く」ことができることを微分についての適切かつ緩やかな条件の下で保証する．ラグランジュの未定乗数法は，この時 F についての 1 階の微分から得られる極値の必要条件を整理すると，候補となる点 (a, b) について 2 つのベクトル $\overrightarrow{\nabla} f(a, b)$ と $\overrightarrow{\nabla} g(a, b)$ が $\boxed{(4)\qquad\qquad}$ であることと同値であることを指摘する．

語群：確率積分，空集合，全体集合，閉集合，開集合，部分集合，テイラー展開可能性，全微分可能性，偏微分可能性，長方形（正方形を含む），楕円（円を含む），放物線，双曲線，交差する 2 直線，垂直，一次独立，一次従属，零ベクトル

経済数学Ｉ　期末試験　**略解**　　2012/07/25 服部哲弥

問 1 (30=10*3).　【第２章 偏微分（勾配ベクトル，ヘッセ行列，ヤコビ行列）】

$f(x,y)=x^2+y^2-xy+4x^3+x^2y^2$,

$\overrightarrow{g}(x,y,z)=\begin{pmatrix} x+2y+3z \\ (x-1)^2-(y-1)^2+(z-1)^2 \end{pmatrix}$

i) $\overrightarrow{\nabla} f(x,y)=\underline{(2x-y+12x^2+2xy^2,\ 2y-x+2x^2y)}$.

ii) $H_f(x,y)=\begin{pmatrix} 2+24x+2y^2 & -1+4xy \\ -1+4xy & 2+2x^2 \end{pmatrix}$ なので，$H_f(0,0)=\underline{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}$.

iii) $\overrightarrow{\nabla}\,\overrightarrow{g}(x,y,z)=\underline{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2(x-1) & -2(y-1) & 2(z-1) \end{pmatrix}}$.

問 2 (30=10*3).　【第３章 極値（勾配ベクトルの零点，ヘッセ行列の符号）】【第４章 ラグランジュの乗数法（等式条件下，必要条件）】

$f(x,y)=-4x^2+15xy+4y^2-3x^2y+y^3$, $g(x,y)=3x+5y$

i) $\overrightarrow{\nabla} f(x,y)=(-8x+15y-6xy,\ 15x+8y-3x^2+3y^2)$, $H_f(x,y)=\begin{pmatrix} -8-6y & 15-6x \\ 15-6x & 8+6y \end{pmatrix}$,

だから $H_f(0,0)=\begin{pmatrix} -8 & 15 \\ 15 & 8 \end{pmatrix}$ で，その固有値は $0=\begin{vmatrix} t+8 & -15 \\ -15 & t-8 \end{vmatrix}=t^2-289=t^2-17^2$ の解なので，$\underline{\pm 17}$.

ii) f は多項式だから C^2 級で，$\overrightarrow{\nabla} f(0,0)=(0,0)$ かつヘッセ行列の固有値が正負混在なので，<u>峠点（鞍点）</u>.（なお，i) の解答が無い場合や i) の解答と矛盾する場合は加点しない.）

iii) $g(x,y)=3x+5y=0$ だから，変数の取り得る範囲（「公園の遊歩道」）は，たとえば $x(t)=5t$, $y(t)=-3t$ とパラメータ表示できる．これを $f(x,y)$ に代入すると $F(t)=f(5t,-3t)=-289t^2+198t^3$．原点 $(0,0)$ は $t=0$ に対応するので <u>極大値を与える点</u>.

（別解）$H_f(0,0)$ を対角化すると，$P=\dfrac{1}{\sqrt{34}}\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix} 17 & 0 \\ 0 & -17 \end{pmatrix}$ に対して $H_f(0,0)=PD{}^tP$ だから，$f(0,0)=0$，$\overrightarrow{\nabla} f(0,0)=(0,0)$ と併せて，$f(x,y)\approx\dfrac{1}{2}(x,y)H_f(0,0)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\dfrac{1}{68}(17(3x+5y)^2-17(5x-3y)^2)$．$g(x,y)=3x+5y=0$ 上では $=-\frac{1}{4}(5x-3y)^2$ となって，$(0,0)$ は極大値 0 を与える.

問 3 (40=10*4).　【第１章 位相，第２章 偏微分，第３章 極値，第４章 乗数法】

i) $\mathbb{R}$ の開区間 $(0,1)$ 上で $f(x)=\dfrac{1}{x}$ によって定義された関数 $f:\ (0,1)\to\mathbb{R}$ は最大値がないが，これが最大値の定理と矛盾しないのは，定義域 $(0,1)$ が <u>(1) 閉集合</u> ではないからである.

ii) 合成関数の微分公式の証明で用いる平均値の定理の仮定は単に <u>(2) 偏微分可能性</u> だけでなく，たとえば偏導関数の連続性も要請する.

iii) 2 変数関数 $f(x,y)$ がある点 (a,b) で極値を持つことが，2 次のテイラーの定理によって結論できるとき，f の等高線 $f(x,y)=c$ は点 (a,b) の近傍では <u>(3) 楕円（円を含む）</u> に近い.

iv) ラグランジュの未定乗数法は，この時 F についての 1 階の微分から得られる極値の必要条件を整理すると，候補となる点 (a,b) について 2 つのベクトル $\overrightarrow{\nabla} f(a,b)$ と $\overrightarrow{\nabla} g(a,b)$ が <u>(4) 一次従属</u> であることと同値であることを指摘する.