慶應義塾大学試験問題用紙（日吉）

試験時間	50 分	分

平成 25 年 1 月 23 日 (水) 6 時限施行		学部　学科　年　組	
担当者名	服部　哲弥　君	学籍番号	
科目名	経済数学 II	氏　名	

採　点　欄	※

注意：**答案用紙は裏を使わないこと**．解答は答案用紙の表がわに収めよ．

問 1． f, g_1, g_2 を，$(x,y) \in \mathbb{R}^2$ に対して $f(x,y) = x^2 - y$, $g_1(x,y) = (x+y-9)^3$, $g_2(x,y) = -x+2$ で定義される 2 変数実数値関数たちとする．不等式条件 $g_i \leqq 0$, $i = 1,2$, の下での f の最小値を求める問題を，Fritz–John 条件を経由して解くことを考える．

Fritz–John 条件は（C^1 級関数の枠内で）不等式条件下で最小値を取る点の必要条件（最小値を取る点の候補）を与える．今の問題の場合，それは μ_0, μ_1, μ_2, x, y の 5 個の未知数に対する以下の連立方程式－不等式系 (1)—(4) である．

(1)　$\mu_0 \overrightarrow{\nabla} f(x,y) + \mu_1 \overrightarrow{\nabla} g_1(x,y) + \mu_2 \overrightarrow{\nabla} g_2(x,y) = \overrightarrow{0}$

(2)　$\boxed{}$

(3)　$\mu_0 \geqq 0$, $\mu_1 \geqq 0$, $\mu_2 \geqq 0$

(4)　μ_i, $i = 0,1,2$, は全て同時に 0 ではない（つまり (1) の自明でない解）

以下の**問**に答えよ．

問 i) 最初に与えた関数たちについて，条件 (1) を具体的に（f, g_1, g_2, $\overrightarrow{\nabla}$ の記号を使わずに）書き下せ．答案用紙は答のみを書け．

問 ii) 条件 (2) の空欄を適切に埋めて，Fritz–John 条件を完成せよ．この問の答は，上の問の答とは逆に各々の関数の具体形を用いずに書け．答案用紙は答のみを書け．

問 iii) 不等式条件 $g_i \leqq 0$, $i = 1,2$, の下での f の最小値を与える点 (x_0, y_0) を答えよ．答案用紙は答のみを書け．

問 iv) 不等式条件 $g_i \leqq 0$, $i = 1,2$, の下での f の最小値 $f(x_0,y_0)$ を答えよ．答案用紙は答のみを書け．

問 v) Fritz–John 条件における未定乗数たち (μ_0, μ_1, μ_2) は条件 (3) からそれぞれ正または 0 である．問 iii) で得た座標 (x_0, y_0) は未定乗数たちがそれぞれどちらの場合の候補か．$(\mu_4, \mu_5, \mu_6, \mu_7) = (0,0,0,+)$ のように，$+$ または 0 の組で答えよ．答案用紙は答のみを書け．

$\mu_0 = 0$ の場合分けから見つかる候補は (1)–(4) に最小にすべき関数 f を含まないので，最小値を取る可能性というよりも，不等式条件 $g_i \leqq 0$ たちの特殊性を反映して 1 階微分では判定できない点の集合と考えられる．そのような可能性は種々考えられるため一般的には簡単な必要十分条件でまとめることはできないが，g_i たちが凸関数の場合には，不等式条件が定める領域が凸集合になり，Slater の制約想定と呼ばれる簡単な条件だけで $\mu_0 = 0$ からの候補がなくなって，Kuhn–Tucker 条件が最小値を与える．

最初に与えた関数たちには凸関数でないものがあるが，$g_i(x,y) \leqq 0$, $i = 1,2$, を満たす (x,y) の集合を S とおくと，S は凸集合である．実際，$(x_1,y_1) \in S$，$(x_2,y_2) \in S$，および $\boxed{(*)}$ とすると，$g_1(x_j,y_j) = (x_j+y_j-9)^3 \leqq 0$, $j = 1,2$, だから，$x_j + y_j - 9 \leqq 0$, $j = 1,2$, したがって，

$$g_1(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2) = (\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 + \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 - 9)^3$$
$$= (\lambda(x_1+y_1-9) + (1-\lambda)(x_2+y_2-9))^3 \leqq 0.$$

また，

$$g_2(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2,\lambda y_1+(1-\lambda)y_2)=\lambda(-x_1+2)+(1-\lambda)(-x_2+2)$$
$$=\lambda g_2(x_1,y_1)+(1-\lambda)g_2(x_2,y_2)\leqq 0.$$

よって $\lambda(x_1,y_1)+(1-\lambda)(x_2,y_2)\in S$ となるので S は凸集合である．

問 vi) 上の文章が S が凸集合であることの証明になるような，空欄 (*) を埋める適切な式を求めよ．答案用紙は答のみを書け.

問 vii) 連立不等式 $h_1(x,y)\leqq 0$ と $g_2(x,y)\leqq 0$ を満たす (x,y) の集合が S に一致するような，x と y の 1 次式 $h_1(x,y)$ を 1 つ見つけよ．答案用紙は答のみを書け.

問 2 ．　n 次元空間 $\mathbb{R}^n$ の中の共有点を持たない 2 つの凸集合は，$n-1$ 次元空間（超平面 $\mathbb{R}^{n-1}$）をうまく選ぶとそれによって仕切られる別々の半空間に収めることができる，という意味の定理を分離定理という．以下ベクトル $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ の内積を $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$，ノルムを $\|\overrightarrow{u}\|$ と書く．以下の**問**に答えよ．

問 i) $A\subset\mathbb{R}^n$ と $B\subset\mathbb{R}^n$ がともに閉凸集合で $A\cap B=\emptyset$（すなわち，共有点を持たない）ならば,（最大値の原理を経由して）どの $\overrightarrow{x}\in A$ と $\overrightarrow{y}\in B$ の組に対しても $\|\overrightarrow{x}_0-\overrightarrow{y}_0\|\leqq\|\overrightarrow{x}-\overrightarrow{y}\|$ が成り立つような $\overrightarrow{x}_0\in A$ と $\overrightarrow{y}_0\in B$ があることが保証されている．$\overrightarrow{p}=\overrightarrow{x}_0-\overrightarrow{y}_0$ とおくと（凸性を用いた若干の計算の後に）$\overrightarrow{x}\in A$ ならば $(\overrightarrow{x}-\overrightarrow{y}_0,\overrightarrow{p})\geqq 0$，および $\overrightarrow{y}\in B$ ならば $(\overrightarrow{y}-\overrightarrow{y}_0,\overrightarrow{p})\leqq 0$, となる．すなわち，$\overrightarrow{y}_0$ を通り $\overrightarrow{p}$ に垂直な平面（$\overrightarrow{w}$ の方程式 $(\overrightarrow{w}-\overrightarrow{y}_0,\overrightarrow{p})=0$ で定義される平面）に関して，集合 A は $\overrightarrow{p}$ の方向の半空間，集合 B は $-\overrightarrow{p}$ の方向の半空間，にそれぞれ含まれる．

3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ の共有点を持たない 2 つの閉凸集合 $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x^2+(y-1)^2+(z-2)^2\leqq 1\}$ と $B=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid(x-5)^2+(y-1)^2\leqq 4\}$ について，**上記説明文の手続きで得られる平面** $(\overrightarrow{w}-\overrightarrow{y}_0,\overrightarrow{p})=0$ **を求めよ**．答案用紙には，$\overrightarrow{w}=(x,y,z)$ として，x,y,z に関する 1 次方程式（平面の方程式）の形で，答のみを書け.

問 ii) 問 i) の $\overrightarrow{p}$ の選び方は閉凸集合どうしの分離定理の場合に限るが，分離定理そのものは閉集合でなくても凸集合どうしならば成り立つ.

平面 $\mathbb{R}^2$ の 2 つの共有点を持たない凸集合 $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2+y^2<25\}$ と $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid(x-6)^2+(y-8)^2<25\}$ について，$\overrightarrow{w}\in A$ ならば $(\overrightarrow{w}-\overrightarrow{y}_0,\overrightarrow{p})>0$，$\overrightarrow{w}\in B$ ならば $(\overrightarrow{w}-\overrightarrow{y}_0,\overrightarrow{p})<0$，となる**直線** $(\overrightarrow{w}-\overrightarrow{y}_0,\overrightarrow{p})=0$ **を（問 i) の説明にこだわらずに初等数学の知識によって）見つけよ**．答案用紙には，$\overrightarrow{w}=(x,y)$ として，x,y に関する 1 次方程式の形で，答のみを書け.

問 iii) Fritz–John 条件（**問 1** の (1)—(4) を参照）が，与えられた不等式条件下で与えられた関数が極小値を取る点の必要条件を与えることの証明に，分離定理を用いることができる．**問 1** の場合に，$g_1(a,b)=g_2(a,b)=0$ を満たす点 (a,b) について考える．f, g_1, g_2 の x 偏導関数を f_x, $g_{1,x}$, $g_{2,x}$ などと書くことにして，$J=\begin{pmatrix} f_x(a,b) & f_y(a,b) \\ g_{1,x}(a,b) & g_{1,y}(a,b) \\ g_{2,x}(a,b) & g_{2,y}(a,b) \end{pmatrix}$ とおいて，3 次元ベクトルの凸集合 $A=\{J\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}\mid(v,w)\in\mathbb{R}^2\}$ および $B=\{\begin{pmatrix} s \\ t \\ u \end{pmatrix}\mid s<0,\ t<0,\ u<0\}$ をとると，不等式条件下で f が点 (a,b) で最小値をとるならば $A\cap B=\emptyset$ となるので，分離定理から $\overrightarrow{x}\in A$ ならば $(\overrightarrow{x},\overrightarrow{p})\geqq 0$，$\overrightarrow{y}\in B$ ならば $(\overrightarrow{y},\overrightarrow{p})<0$，を満たす 3 次元ベクトル $\overrightarrow{p}$ がある.

上記説明の $\overrightarrow{p}$ を**問 1 の中にある記号を用いて**書け．答案用紙は答のみを書け.

経済数学 II　期末試験　**略解**　　2013/01/24 服部哲弥

問 1 (70=10*7).　i) $2x\mu_0 + 3(x+y-9)^2\mu_1 - \mu_2 = 0$，$-\mu_0 + 3(x+y-9)^2\mu_1 = 0$

ii) $\mu_1 g_1(x,y) = \mu_2 g_2(x,y) = 0$

iii) $(x_0, y_0) = (2,7)$

iv) $f(x_0,y_0) = -3$　【$S = \{(x,y) \mid g_i(x,y) \leqq 0,\ i=1,2\}$ は有界閉集合ではないが，y が小さくなるほど $f(x,y)$ は大きくなるので，有界閉集合の場合に帰着する】

v) $(\mu_0,\mu_1,\mu_2) = (0,+,0)$　【$\mu_1 = 0$ は (4): $(\mu_0,\mu_1,\mu_2) \neq (0,0,0)$ に反する】

vi) $0 < \lambda < 1$　【$0 \leqq \lambda \leqq 1$ も可】

vii) $h_1(x,y) = x+y-9$　【$h_1(x,y) = 3x+3y-27$ なども可】

【なお，問 v) の直後の問題文について，g_1 が凸関数でないことは，たとえば $(x_1,y_1) = (0,0)$, $(x_2,y_2) = (0,9)$, $\lambda = 0.5$ を凸性の定義式に代入すれば満たさないことがわかる．また，f は凸なので，g_1 を（領域 S を変えない凸関数である）h_1 に置き換えれば，Kuhn–Tucker 条件は f が最小値を取る点の必要十分条件になるので，$(x_0,y_0) = (2,7)$ は KT 条件を解くことで直ちに得られる．**同じ不等式条件を記述するならば数学的に筋の良い式のほうが数学的には有利である．**
】

問 2 (30=10*3).　i) $x = 3$　【$\overrightarrow{x}_0 = (1,1,2)$, $\overrightarrow{y}_0 = (3,1,2)$, $\overrightarrow{p} = (-2,0,0)$】

ii) $3x+4y = 25$　【$3(x-3)+4(y-4) = 0$, $y = -\dfrac{3}{4}(x-3)+4$, $y = \dfrac{25}{4} - \dfrac{3}{4}x$ なども可．$\overrightarrow{y}_0 = (3,4)$, $\overrightarrow{p} = (-3,-4)$】

iii) $\overrightarrow{p} = \begin{pmatrix} \mu_0 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$　【$\overrightarrow{y} \in B$ ならば $(\overrightarrow{y}, \overrightarrow{p}) < 0$ から，**問 1** の FJ 条件の (3)(4) を得る．$\overrightarrow{x} \in A$ ならば $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{p}) \geqq 0$ からは不等号しか得られないように見えるが，v と w を個別に符号を反転させるとベクトル等式 (1) を得る．ただし，(1) は (2) と併せて $g_i = 0$ が成り立たない場合も込めた式である.】