慶應義塾大学試験問題用紙（日吉）

試験時間	**50** 分	分

				採　点　欄	※
平成 25 年 07 月 23 日 (火) 4 時限施行		学部　　学科　　年　　組			
担当者名	服部　哲弥　君	学籍番号			
科目名	経済数学 I	氏　名			

注意：　解答は答案用紙の表がわに収めること．答えだけでよい．

問１．　実 3 変数関数 $f:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ と $g:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ を

$$f(x,y,z) = \frac{5}{2}x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy - 2xz - 20x - 40y - 20z$$

および $g(x,y,z) = x + y + z$ で定める．以下の問い i) — vi) に答えよ．

i) 点 $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ における f の勾配ベクトル $\overrightarrow{\nabla} f(x,y,z)$ を計算せよ．答案用紙は計算結果だけでよい．

ii) $\overrightarrow{\nabla} f(x,y,z) = (0,0,0)$ を満たす点 $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ を求めよ．答案用紙は答えだけでよい．

iii) 上の小問で求めた点 (a,b,c) における f のヘッセ行列

$$H_f(a,b,c) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b,c) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b,c) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(a,b,c) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b,c) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b,c) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(a,b,c) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(a,b,c) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(a,b,c) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}(a,b,c) \end{pmatrix}$$

を計算せよ．答案用紙は計算結果だけでよい．

iv) 上の小問で求めた行列の固有値をすべて求め，さらに，点 (a,b,c) において，$f(x,y,z)$ は，{極大値をとる，極小値をとる，鞍点（峠点）である，ここまでの計算ではわからない}，のいずれであるかを調べよ．答案用紙は固有値たちと選択肢だけでよい．

v) f は凸関数なので，等式条件 $g(x,y,z) = 0$ の下で $f(x,y,z)$ の最小値を与える点がただ 1 つある．この点 $(x,y,z) = (p,q,r)$ を求めよ．答案用紙は解だけでよい．

vi) 冒頭で定義した f と g を用いて定義される 3 変数 2 成分関数 $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ の上の小問 v) で得た点 (p,q,r) におけるヤコビ行列 $\begin{pmatrix} \overrightarrow{\nabla} f \\ \overrightarrow{\nabla} g \end{pmatrix}(p,q,r)$ を計算し，その rank（階数）を求めよ．答案用紙は行列とその階数，いずれも答えだけでよい．

問２．　以下の問い i) と ii) に答えよ．答案は答えのみでよい．

i) $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x^2 + y^2 < 4$ または $(x-1)^2 + y^2 \leqq 1\}$ で表される平面内の点の集合に属する点 (x_0, y_0) のうち次の『』内の性質を持つものは無数にある：　『$\epsilon > 0$ が存在して，ϵ-近傍 $U_\epsilon(x_0,y_0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < \epsilon^2\}$ が S の部分集合 $(U_\epsilon(x_0,y_0) \subset S)$ になる．』　しかし『』内の性質を満たさない S の点が 1 つある．その点の座標を求めよ．さらにその点が『』内の性質を満たさない理由についての下記の文の空欄に適切な式を入れよ．

理由の概略：$\epsilon > 0$ をどうとっても，それに対応して，座標 $(\boxed{}, 0)$ で表される点は，解答した点の ϵ-近傍に属する点だが S には属さないので『』内の性質が成り立たない．

答案用紙は『』内の性質を満たさない S の点の座標と，空欄に入れる式だけでよい．

ii) $f(x,y) = x^3 + 9x^4y - \dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$ で定義される実 2 変数関数 $f:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ の微分に関連する以下の問いに答えよ．

(a) 勾配ベクトル $\vec{\nabla} f(x,y) = (\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y),\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y))$ を計算せよ．答案用紙は結果のみでよい．なお $36 \times 9 = 324$ である．

(b) （増減表を用いれば）x の方程式 $324x^6 + 3x = 1$ は $x > 0$ にただ 1 つ解がある．その値を $x = x_0$ とおくとき，第 1 象限（x も y も正または 0 の点 (x,y) たち）において $\vec{\nabla} f(x,y) = (0,0)$ となる点を全て求め，それぞれ具体的な実数値または必要ならば x_0 と四則とべき乗だけを用いて表せ．

(c) $\vec{\nabla} f(x,y) = (0,0)$ の解のうち第 1 象限の**内部**にある（$x > 0$ かつ $y > 0$ を満たす）点は，上の小問の解答のとおり x_0 を用いて表されるが，試験の都合上これを (a,b) と置くとき，$f(a+t,b) - f(a,b)$ （すなわち，(a,b) から x 方向に t だけ離れた点での f の値の増加）は，上の小問の x_0 を用いて
$f(a+t,b) - f(a,b) = (1 - \dfrac{3}{2}x_0)\,t^2 + (1 + 324x_0^5)\,t^3 + 81x_0^4\,t^4$
と書けることがわかっている．上の小問の増減表の議論から右辺の t^2 の係数は正であることがわかる．
同様に，(a,b) から y 方向に t だけ離れた点での f の値の増加 $f(a,b+t) - f(a,b)$ を計算して，具体的な（係数は具体的な数値のみで文字 $x_0,\ a,\ b$ などを含まない形で）t の多項式で表せ．
また，問題の点（ここで都合上 (a,b) と書いた点）は，$\{f$ の極大値を与える点か，極小値を与える点か，鞍点（峠点）か，本小問までの結果ではわからないか$\}$，いずれであるかを書け．答案用紙は結果（t の多項式と，選択肢のいずれか）だけでよい．

経済数学 I　期末試験　**略解**　　2013/07/24 服部哲弥

問 1 (60=10*6).　【第 2 章 偏微分（ヤコビ行列）】【第 3 章 極値（ヘッセ行列）】【第 4 章 ラグランジュの乗数法（等式条件）】

i) $\underline{\overrightarrow{\nabla} f(x,y,z) = (5x+2y-2z-20,\ 2x+4y-40,\ -2x+6z-20)}$

ii) $\underline{(a,b,c) = (2,9,4)}$

iii) $\underline{H_f(2,9,4) = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 6 \end{pmatrix}}$

iv) $\underline{2,5,8}$，極小値をとる

v) $\overrightarrow{\nabla}(f(x,y,z)+\lambda g(x,y,z)) = (5x+2y-2z-20+\lambda,\ 2x+4y-40+\lambda,\ -2x+6z-20+\lambda) = (0,0,0)$ を解くと，$(x,y,z) = \dfrac{1}{8}(16-2\lambda,\ 72-\lambda,\ 32-2\lambda)$．$x+y+z = g(x,y,z) = 0$ に代入すると $\lambda = 24$ となるので，$\underline{(x,y,z) = (p,q,r) = (-4,\ 6,\ -2)}$

vi) $\begin{pmatrix} \overrightarrow{\nabla} f(x,y,z) \\ \overrightarrow{\nabla} g(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x+2y-2z-20 & 2x+4y-40 & -2x+6z-20 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$(p,q,r) = (-4,6,-2)$ を代入すると，$\underline{\begin{pmatrix} \overrightarrow{\nabla} f(-4,6,-2) \\ \overrightarrow{\nabla} g(-4,6,-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 & -24 & -24 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$ なので，

rank は 1

問 2 (40=10*4).　【第 1 章 位相】【第 2 章 偏微分（勾配ベクトル）】【第 3 章 極値（勾配ベクトルの零点）】

i) S は原点中心半径 2 の円の内部とこの円の周上の 1 点 $(2,0)$ の和集合 $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 4\} \cup \{(2,0)\}$ に等しいので，内点でないのは，$\underline{(2,0)}$，その ϵ 近傍に入るが S に入らない点は，たとえば，$\underline{(2+\frac{1}{2}\epsilon, 0)}$　（後者は $\dfrac{1}{2}$ の代わりに 1 **未満**の正の数が書いてあれば可）

ii) (a) $\overrightarrow{\nabla} f(x,y) = \underline{(3x^2+36x^3y-x,\ 9x^4-y)}$

(b) $\underline{(0,0) \text{ と } (x_0, 9x_0^4)}$

(c) $(a,b) = (x_0, 9x_0^4)$ だから，$\underline{f(a,b+t)-f(a,b) = -\dfrac{1}{2}t^2}$

問題文の議論から x を変えると $f(x,y)$ は（問題の点の近傍で）増加し，本小問前半の解答から y を変えると $f(x,y)$ は減少するので，問題の点 $(a,b) = (x_0, 9x_0^4)$ は f の 鞍点