慶應義塾大学試験問題用紙（日吉）

試験時間	**50** 分	分

平成 26 年 1 月 21 日 (火) 4 時限施行		学部　　学科　　年　　組	採　点　欄	※
担当者名	服部　哲弥　君	学籍番号		
科目名	経済数学 II	氏　名		

注意：答案用紙は裏を使わないこと． 解答は答案用紙の表がわに収めよ．

問１．　不等式条件 $x^2+y^2 \leqq 1,\ 0 \leqq z \leqq x+\frac{1}{2}$ の下で 3 変数実数値関数 $f(x,y,z) = (x+1)^2+y^2+(z+1)^2$ の最小値を，Fritz–John 条件または Kuhn–Tucker 条件を用いて求める．以下の問に答えよ．

i) 不等式条件を 3 変数実数値関数 g_i たちを用いて $g_i(x,y,z) \leqq 0,\ i=1,2,\ldots,$ の形に揃えるとき，$g_i(x,y,z)$ たちを求めよ．(ただし，同値であっても，与えられた条件を次数を上げるなど複雑にしてはならない．）答案は答だけを書くこと．

ii) 不等式条件を満たす点 (x,y,z) で f が最小値を取るとき成り立つ Fritz–John 条件を計算し，（ベクトルや微分の記号を使わないあらわな式を）答案に書け．

iii) 実は，f も g_i たちも凸関数であり，しかも $g_i(a,b,c)<0$ がすべての g_i たちで同時に成り立つ共通の点 (a,b,c) が存在するので，Slater の制約想定が常に成り立つ．
上記の性質を持つ点 (a,b,c) の具体的な値を 1 つ見つけよ．答案は答だけを書くこと．

iv) 前の小問の結果，不等式条件を満たす点 (x,y,z) で，f が最小値を取ることと（Fritz–John 条件から容易に得られる）Kuhn–Tucker 条件が成り立つことが同値である．したがって不等式条件と Kuhn–Tucker 条件をすべて満たす点を 1 つ見つければ，そこでの f の値が f の不等式条件下での最小値である．
最初の不等式条件のうち 1 次多項式の条件がすべて等号が成り立つとしてその場合に Kuhn–Tucker 条件が成り立つ点を見つけ，f の最小値を求めよ．答案は見つけた点と f の最小値だけを書くこと．

v) Fritz–John 条件の勾配ベクトルの間の等式は，Gordan の定理を用いて得られる．Gordan の定理は，いくつかのベクトルが与えられたとき，そのどれとの内積も負になるという性質を持つベクトルがなければ，与えられたベクトルの非負係数による自明でない（すなわち，全係数 0 を除く）線形結合であって零ベクトルに等しいものが存在することを主張する．
上の小問 iv) で求めた（f の最小値を与える）点を $\overrightarrow{a} \in \mathbb{R}^3$ とおくとき，点 $\overrightarrow{a}$ での Fritz–John 条件は f と g_i たちの勾配ベクトルたちのうちどの組み合わせに Gordan の定理を適用した結果であるかがわかるように，例にならって答案用紙に Gordan の定理で言う「$\overrightarrow{0}$ に等しい線形結合」を書け．なお，例のとおり，f の勾配ベクトルの係数は 1 とし，添字は小問 i) の解答の添字に合わせて鮮明に書くこと．

$$\text{例：}\quad \overrightarrow{\nabla} f(\overrightarrow{a}) + 2\,\overrightarrow{\nabla} h_5(\overrightarrow{a}) = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

問２．　分離定理についての以下の文章の，特に下線部に関して，その下の i)–iv) に答えよ．
　分離定理は，『n 次元空間 $\mathbb{R}^n$ の中の 2 つの凸集合（A と B とおく）が共有点を持たない ($A \cap B = \emptyset$) ならば，A と B が別々の半空間に入るような平らな仕切り（$n-1$ 次元超平面）がある』こ

とを保証する定理である．別々の半空間に入るということを具体的に（数式で）表すと，仕切りとなる $n-1$ 次元超平面上の 1 点 $\overrightarrow{c} \in \mathbb{R}^n$ と超平面の法線ベクトル $\overrightarrow{p} \in \mathbb{R}^n$ $(\overrightarrow{p} \neq \overrightarrow{0})$ であって，$\overrightarrow{x} \in A$ ならば内積について $(\overrightarrow{x}-\overrightarrow{c}, \overrightarrow{p}) \leqq 0$ が成り立ち，$\overrightarrow{y} \in B$ ならば $(\overrightarrow{y}-\overrightarrow{c}, \overrightarrow{p}) \geqq 0$ が成り立つことを言う．そのような $\overrightarrow{c}$ と $\overrightarrow{p}$ の組が存在するというのが分離定理である．

実際には，点 $\overrightarrow{c}$ の代わりに実数 $\alpha = (\overrightarrow{c}, \overrightarrow{p})$ の存在を証明し，また，定理を理論で応用する際も，その α 用いて $(\overrightarrow{y}, \overrightarrow{p}) \geqq \alpha \geqq (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{p})$, $\overrightarrow{x} \in A$, $\overrightarrow{y} \in B$, の形で利用することも多い．特に 1 点だけからなる集合も凸集合なので，$A = \{\overrightarrow{0}\}$（原点だけを要素とする集合）の場合は，定理の内容は，(*) 『$C \subset \mathbb{R}^n$ が原点を含まない凸集合ならば C のどの点 $\overrightarrow{z} \in C$ に対しても $(\overrightarrow{z}, \overrightarrow{p}) \geqq 0$ となる $\overrightarrow{p} \in \mathbb{R}^n$ がある』という主張に書き換えられる．分離定理の証明は，この特別な場合について行えば，一般の A と B に対しては $C = \{\overrightarrow{y}-\overrightarrow{x} \mid \overrightarrow{x} \in A,\ \overrightarrow{y} \in B\}$ とおいて (*) を利用し，さらに最大値の原理を $g(\overrightarrow{x}) = (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{p})$ に適用することで証明できる．

(*) の証明について，C が凸集合かつ閉集合の場合は $\overrightarrow{z} \in C$ に対して $f(\overrightarrow{z}) = \|\overrightarrow{z}\|$（原点からの距離）とおいて連続関数 $f\colon\ C \to \mathbb{R}$ を定義し，これに最小値の原理を適用すると，C が原点を含まない閉集合という仮定から最小値 d は正なので，$\overrightarrow{p} \in C$ が f の最小値を与える点 $(f(\overrightarrow{p}) = d)$ とすると，この $\overrightarrow{p}$ が (*) の結論である．しかも，$d > 0$ なので，これを一般の分離定理の証明に適用すると，等号付き不等号から等号を除いた（少し強い）定理，すなわち,『A と B がともに $\mathbb{R}^n$ の中の凸集合かつ閉集合で共有点がなければ，$(\overrightarrow{y}, \overrightarrow{p}) > \alpha > (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{p})$, $\overrightarrow{x} \in A$, $\overrightarrow{y} \in B$, が成り立つ $\overrightarrow{p}$ と α が存在する』ことが証明できる．等号がないことは「仕切り」の上には A の点も B の点もないことを意味する．

しかし，(*) の証明の一番本質的な（難しい）ところは，C が閉集合ではなく，かつ原点に接している場合であり，この場合『仕切りとなる $n-1$ 次元超平面』は C の接超平面（$n=2$ ならば接線）なので，分離定理の証明は接線や接平面を求める問題を含む．たとえば $n=2$（平面内の図形）で，$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0$ または $x = 0,\ y > 0\}$（右側半平面，ただし y 軸は正の側のみ含む）とおくと，この C は凸集合で原点 $(0,0)$ を含まないので (*) の結論が成り立つが，得られる $\overrightarrow{p}$ について等号 $(\overrightarrow{p}, \overrightarrow{z}) = 0$ が成り立つ $\overrightarrow{z} \in C$ が存在する．

問.

i) $A \subset \mathbb{R}^n$ が凸集合であるとは，$\overrightarrow{x} \in A$, $\overrightarrow{y} \in A$, $0 < \lambda < 1$ が成り立つどんな $\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{y}$, λ の組み合わせに対しても必ず $\boxed{}$ が成り立つことを言う．空欄に入る式を答えよ．答案は答だけを書くこと．

ii) 4 次元空間 $\mathbb{R}^4$ 内の原点 $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{0}$ を通り，ベクトル $\overrightarrow{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ を法線とする 3 次元超平面の方程式を書け.（4 次元空間に慣れていない場合は，平面内の直線の高校で習う方程式（$n=2$），空間内の平面の方程式（$n=3$），上記文章の説明などを手がかりに推測せよ.）答は超平面上の点の 4 つの座標成分（順に x_1, x_2, x_3, x_4 とする）についての 1 次方程式で，答案は答だけを書くこと．

iii) C が凸集合かつ閉集合の場合の (*) の証明について，文章の説明の状況を $n=2$（C が平面内の領域）の場合に図示せよ．図には，座標軸，図形 C の一例, 文章の説明で得られる $\overrightarrow{p}$ と d を書き込むこと．

iv) 文章の最後の平面内の C の例について (*) の結論の $\overrightarrow{p}$ を求めよ．答案は答だけを書くこと．

経済数学 II　期末試験　**略解**　　　2014/01/21 服部哲弥

問 1 (60=15+25+5+10+5).

i) $g_1(x,y,z) = x^2+y^2-1$, $g_2(x,y,z) = -z$, $g_3(x,y,z) = -x+z-\frac{1}{2}$.

ii) $2\mu_0(x+1)+2\mu_1 x-\mu_3=0$,
$2\mu_0 y+2\mu_1 y=0$,
$2\mu_0(z+1)-\mu_2+\mu_3=0$,
$\mu_0 \geqq 0$, $\mu_1 \geqq 0$, $\mu_2 \geqq 0$, $\mu_3 \geqq 0$, $(\mu_0,\mu_1,\mu_2,\mu_3) \neq (0,0,0,0)$,
$\mu_1(x^2+y^2-1)=0$, $\mu_2 z=0$, $\mu_3(-x+z-\frac{1}{2})=0$

iii) たとえば $(0,0,\frac{1}{4})$ や $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

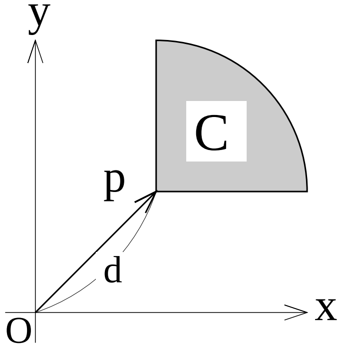
iv) $(-\frac{1}{2},0,0)$, $f(-\frac{1}{2},0,0)=\frac{5}{4}$

v) $\overrightarrow{\nabla} f(\overrightarrow{a}) + 3\ \overrightarrow{\nabla} g_2(\overrightarrow{a}) + 1\ \overrightarrow{\nabla} g_3(\overrightarrow{a}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

問 2 (40=10*4).

i) $\lambda\overrightarrow{x}+(1-\lambda)\overrightarrow{y} \in A$

ii) $x_1+2x_2+2x_3+x_4=0$

iii) 

（C の形や配置については，凸で原点から離れていれば可．但し，$\overrightarrow{p}$ や d が正しくなければ不可.）

iv) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$　（$\begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}$（ただし，$c>0$）はすべて正解）