慶應義塾大学試験問題用紙（日吉）

			試験時間	**50** 分	分
平成 26 年 07 月 22 日 (火) 4 時限施行		学部　学科　年　組		採　点　欄	※
担当者名	服部　哲弥　君	学籍番号			
科目名	経済数学 I	氏　名			

注意：　解答は答案用紙の表がわに収めること．答案は答えだけでよい．

問１．　実 3 変数関数 $f\colon\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ を
$f(x,y,z) = x^3 + y^3 + 2\,(z-1)^3 - 3\,(z-1)\,(x+y)$ で定める．以下の問い i) — iii) に答えよ．

i) 点 $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ における f の勾配ベクトル $\vec{\nabla} f(x,y,z)$ が零ベクトルに等しい点，すなわち，$\vec{\nabla} f(a,b,c) = (0,0,0)$ を満たす点 $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ をすべて求めよ．(1 点だけではない.) 答案用紙は答えだけを書け.

ii) 上の小問で求めた点 (a,b,c) それぞれにおける f のヘッセ行列

$$H_f(a,b,c) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b,c) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b,c) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(a,b,c) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b,c) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b,c) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(a,b,c) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(a,b,c) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(a,b,c) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}(a,b,c) \end{pmatrix}$$

を計算せよ．答案用紙は，点 (a,b,c) ごとに計算結果（数値を成分とする 3 次正方行列）を

$$\underline{H_f(0,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}},\quad \underline{H_f(1,2,3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}},\quad \underline{H_f(1,1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}}$$

などのように書け.

iii) 小問 i) で求めたそれぞれの点 (a,b,c) において，小問 ii) で求めたヘッセ行列の固有値の符号を調べることで，関数 f はその点で, {極大値をとる，極小値をとる，鞍点（峠点）である，ここまでの計算ではわからない}，のいずれであるかを調べよ．答案用紙は，点 (a,b,c) ごとに
<u>点 $(0,0,0)$ ： 正固有値 100 個，負固有値 0 個，答えがわからない</u>,
などのように書け.

問２．　実 2 変数関数 $f\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ と $g\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を

$$f(x,y) = x^2 + y^2 \quad と \quad g(x,y) = x\,y + x + y - 15$$

で定める．条件 $g(x,y) = 0,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0$ の下での f の最大値と最小値を求めたい.

条件を満たす点の集合 $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x,y) = 0,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0\}$ は平面 $\mathbb{R}^2$ の有界閉集合であり，f は多項式だから S 上の連続関数である．よって最大値の定理から，f は S 上でどこかの点で最大値をとり，どこかの点で最小値をとる．その候補は条件下での f の極値または S の端点（$x=0$ または $y=0$）での値であり，前者を求めるのにラグランジュの乗数法が使える.

以下の問い i) — iv) に答えよ．答案用紙は結果のみでよい.

i) f と g を用いて定義される 2 変数 2 成分関数 $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ の点 (x,y) におけるヤコビ

行列 $J(x,y) = \begin{pmatrix} \vec{\nabla} f \\ \vec{\nabla} g \end{pmatrix}(x,y)$ を計算せよ．答案用紙は結果のみを書け．

ii) 条件 $g(x,y)=0,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0$ の下で f の**最大値**を与える点 (x,y) と最大値 $f(x,y)$ を答えよ．

iii) 条件 $g(x,y)=0,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0$ の下で f の**最小値**を与える点 (x,y) と最小値 $f(x,y)$ を答えよ．

iv) 以下の選択肢のうちで，S が実数 $\mathbb{R}$ の有界閉集合で，f がその上で連続関数であるものをすべて選んで，答案用紙に書き写せ．

選択肢：

・ $S=[1,2)=\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqq x < 2\}$)， $f(x)=x^2$

・ $S=(1,2)=\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2\}$)， $f(x)=|x|$

・ $S=[-2,2]=\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leqq 2\}$， $f(x)=\dfrac{1}{x+4}$

・ $S=(0,1)=\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$， $f(x)=\dfrac{1}{x}$

・ $S=[-1,1]\cup[2,3]=\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqq x \leqq 1$ または $2 \leqq x \leqq 3\}$， $f(x)=|x|$

・ $S=(-2,2)=\{x \in \mathbb{R} \mid |x| < 2\}$， $f(x)=x^2$

経済数学 I　期末試験　**略解**　　2014/07/23 服部哲弥

問 1 (60=10*2*3（但し余分な解は減点）).　【第 3 章 極値（勾配ベクトルの零点，ヘッセ行列)】

i) $(a,b,c) = \underline{(0,0,1)}, \underline{(1,1,2)}$

（$f(x,y,z) = x^3 + y^3 + 2\,(z-1)^3 - 3\,(z-1)\,(x+y)$
$\vec{\nabla} f(x,y,z) = (3(x^2 - z + 1), 3(y^2 - z + 1), 6(z-1)^2 - 3(x+y))$ ）

ii) $\underline{H_f(0,0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -3 \\ -3 & -3 & 0 \end{pmatrix}}$, $\underline{H_f(1,1,2) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -3 \\ 0 & 6 & -3 \\ -3 & -3 & 12 \end{pmatrix}}$

（$H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 6x & 0 & -3 \\ 0 & 6y & -3 \\ -3 & -3 & 12(z-1) \end{pmatrix}$ ）

iii) 点 $(0,0,1)$： 正固有値 1 個，負固有値 1 個，鞍点である，
点 $(1,1,2)$： 正固有値 3 個，負固有値 0 個，極小値をとる

（$|tE - H_f(0,0,1)| = t^3 - 18t = t(t - 3\sqrt{2})(t + 3\sqrt{2})$,
$|tE - H_f(1,1,2)| = (t-6)(t^2 - 18t + 54) = (t-6)(t - 9 + 3\sqrt{3})(t - 9 - 3\sqrt{3})$ ）

問 2 (40=10*4).　【第 1 章 位相】【第 2 章 偏微分（ヤコビ行列)】【第 4 章 ラグランジュの乗数法（等式条件)】

i) $J(x,y) = \begin{pmatrix} \vec{\nabla} f(x,y) \\ \vec{\nabla} g(x,y) \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 2x & 2y \\ y+1 & x+1 \end{pmatrix}}$

ii) 最大値は $f(15,0) = f(0,15) = 225$

（S の端点は $(x,y) = (15,0)$ と $(0,15)$ で，$f(15,0) = f(0,15) = 225$．ラグランジュの乗数法から $\vec{\nabla} g(x,y) = (y+1\ \ x+1) = (0\ \ 0)$ または $L = f + \lambda g$ に対して $0 = \vec{\nabla} L = (1\ \ \lambda)\,J(x,y)$ が極値の必要条件．前者は第 1 象限では生じない．後者が成り立つ λ が存在する必要条件として，$|J(x,y)| = 2x(x+1) - 2y(y+1) = 2(x-y)(x+y+1) = 0$．第 1 象限では $x = y$ を得る．$g(x,y) = 0$ と合わせると，$x^2 + 2x - 15 = (x-3)(x+5)$ を得て，$x \geqq 0$ だから $x = y = 3$．$f(3,3) = 18$ ）

iii) 最小値は $f(3,3) = 18$

iv) $S = [-2,2] = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leqq 2\}$，$f(x) = \dfrac{1}{x+4}$
$S = [-1,1] \cup [2,3] = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqq x \leqq 1$ または $2 \leqq x \leqq 3\}$，$f(x) = |x|$