慶應義塾大学試験問題用紙（日吉）

		試験時間	50 分		分
平成 27 年 1 月 27 日 (火) 4 時限施行		学部　学科　年　組		採　点　欄	※
担当者名	服部　哲弥　君	学籍番号			
科目名	経済数学 II	氏　名			

注意：答案用紙は裏を使わないこと． 解答は答案用紙の表がわに収めよ．

問１． $f(x,y)=x^2+y^2$ と $g(x,y)=(2x+y-3)^2+(x-2y+4)^2-1$ で C^1 級 2 変数関数たち $f\colon\ \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ と $g\colon\ \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ を定義し，不等式条件 $g(x,y)\leqq 0$ の下での f の Fritz–John 条件を用いた極値問題を考える．以下の問に答えよ．

i) Fritz–John 条件を計算して（f や g やベクトルや微分の記号を使わず，$\overrightarrow{\nabla} f$ にかかる変数 μ_0, $\overrightarrow{\nabla} g$ にかかる変数 μ_1，および，x, y だけを変数に用いて）書け．答案用紙は答だけを書け．

ii) $\mu_0=0$ の場合に Fritz–John 条件のうち勾配ベクトルの 1 次従属性を示す条件だけを解いたときの (x,y) を求めよ．答案用紙は答だけを書け．

iii) 不等式条件 $g(x,y)\leqq 0$ の下での f の最小値を与える点 (x,y) と最小値 $f(x,y)$ を求めよ．答案用紙は答だけを書け．

iv) 不等式条件 $g(x,y)\leqq 0$ の下での f の最**大**値を与える点 (x,y) と最大値 $f(x,y)$ を求めよ．答案用紙は答だけを書け．

v) テキストでは，Fritz–John 条件を Gordan の定理：
(*)　「n 成分列ベクトルたち $\overrightarrow{a_i}\in\mathbb{R}^n$, $i=1,\ldots,m$, について，$(\overrightarrow{a_i},\overrightarrow{y})<0$, $i=1,\ldots,m$, を満たす $\overrightarrow{y}\in\mathbb{R}^n$ がなければ，
(*1)　$p_1\overrightarrow{a_1}+\cdots+p_m\overrightarrow{a_m}=\overrightarrow{0}$
を満たす全成分非負の $\overrightarrow{p}={}^t(p_1\ \cdots\ p_m)\neq\overrightarrow{0}$ がある．」
から導き，Gordan の定理は分離定理から導いた．$m=2$ ならば，次のように，分離定理を使わずに線形代数の例題として Gordan の定理を証明できる．『』内の空欄 (1) に数値，(2) に線形代数の用語，(3) に具体的な集合の式，(4) に数学用語を適切に入れて証明を完成せよ．答案は答のみを書け．
『$\overrightarrow{a_1}$ と $\overrightarrow{a_2}$ を横に並べた $n\times 2$ 行列を $A=(\overrightarrow{a_1}\ \overrightarrow{a_2})$ とおくと，(*) の仮定は，集合 $V=\{{}^tA\,\overrightarrow{y}\mid\overrightarrow{y}\in\mathbb{R}^n\}$ が全成分負のベクトルを要素に持たないことを意味する．線形代数によれば，${}^tA$ の rank が $\boxed{(1)\quad}$ ならば，$\overrightarrow{x}\in\mathbb{R}^2$ が何であっても，$\overrightarrow{y}$ についての方程式 ${}^tA\,\overrightarrow{y}=\overrightarrow{x}$ は解を持つから，$V=\mathbb{R}^2$ となり，要素に持たないベクトルがあることに矛盾する．よって $\mathrm{rank}\,{}^tA$ は空欄 (1) の数値未満だが，($\mathrm{rank}\,A=\mathrm{rank}\,{}^tA$ と合わせると）これは $\overrightarrow{a_1}$ と $\overrightarrow{a_2}$ が $\boxed{(2)\qquad\qquad}$ であることを意味するので，$m=2$ の場合に (*1) を満たす $\overrightarrow{p}\neq\overrightarrow{0}$ がある．(ただし，この段階では全成分非負に取れることは未証明.)
いっぽう $\dim V=\mathrm{rank}\,{}^tA$ から $\dim V=0$ または $\dim V=1$ でなければならないが，前者は $V=\boxed{(3)\qquad}$ を意味し，後者は，V の要素の 2 成分を平面上の点の座標に対応させると，V が原点を通る直線に対応することを意味する．前者の場合は A が零行列と決まるので，たとえば $\overrightarrow{p}={}^t(1\ \cdots\ 1)$ が求める性質を全て満たし，証明が終わる．以下後者の場合を考える．
さきほど存在を証明した (*1) を満たす $\overrightarrow{p}$ について，$\overrightarrow{p}$ の全成分が非負なら Gordan の定理の主張する結果を得たことになり，証明が終わる．全成分非正なら，$-\overrightarrow{p}$ が求めるもので

あることもわかる．正負が混在しないことを背理法で証明すれば良い．どちらの成分が正でも同様の証明なので，$p_1 > 0$ かつ $p_2 < 0$ とする．
V の定義と (*1) から，さきほど存在を証明した (*1) を満たす $\overrightarrow{p}$ について，任意の $\overrightarrow{x} = {}^t A \overrightarrow{y} \in V$ との内積が $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{p}) = {}^t\overrightarrow{y}\,(\overrightarrow{a_1}\ \overrightarrow{a_2})\,\overrightarrow{p} = 0$ となるので，$\overrightarrow{p}$ は V に対応する直線に垂直である．もし $p_1 > 0$ かつ $p_2 < 0$ ならば，$(x, y) = (p_2, -p_1)$ とおくと，$p_1 x + p_2 y = 0$ なので直線上の点であり，対応関係から $\begin{pmatrix} p_2 \\ -p_1 \end{pmatrix} \in V$ であり，他方で，2 成分とも $\boxed{(4)\quad}$ となる．これは,『』内の 2 行目に矛盾する．よって正負の成分が混在する $\overrightarrow{p}$ が $\dim V = 1$ の場合に (*1) を満たすことはない．以上ですべての場合を尽くしたので，$m = 2$ の場合の Gordan の定理が証明された.』

問 2． 分離定理は,『n 次元空間 $\mathbb{R}^n$ の中の 2 つの凸集合（A と B とおく）が共有点を持たない $(A \cap B = \emptyset)$ ならば，A と B が別々の半空間に入るような平らな仕切り（$n-1$ 次元超平面）がある』ことを保証する定理である．具体的に（数式で）表すと，$\overrightarrow{x} \in A$ ならば内積について $(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{c}, \overrightarrow{p}) \leqq 0$ が成り立ち，$\overrightarrow{y} \in B$ ならば $(\overrightarrow{y} - \overrightarrow{c}, \overrightarrow{p}) \geqq 0$ が成り立つような $\overrightarrow{c} \in \mathbb{R}^n$ と $\overrightarrow{p} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\overrightarrow{0}\}$ の組が存在する，というのが分離定理の結論である.（$\overrightarrow{c}$ が仕切りとなる $n-1$ 次元超平面上の 1 点，$\overrightarrow{p}$ が超平面の法線ベクトルを意味する.）以下の小問に答えよ．

i) 次の『』内が，平面内の領域（集合）$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geqq x^3\}$ が凸集合でないことの 1 つの証明になるように，空欄 (1)(2) を適切に埋めてそれぞれの式を完成せよ．答案は答だけを書くこと.『$(-1, -1) \in A$ かつ $(1, 1) \in A$ かつ $0 < \dfrac{2}{3} < 1$ だが
$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \boxed{(1)\quad}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
を計算すると $b - a^3$ $\boxed{(2)\quad}$ 0 となるので $(a, b) \notin A$ となるから A は凸集合ではない.』

ii) $A = \{\overrightarrow{0}\}$（原点だけを要素とする集合）の場合は，定理の内容は,『$C \subset \mathbb{R}^n$ が原点を含まない凸集合ならば C のどの点 $\overrightarrow{z} \in C$ に対しても $(\overrightarrow{z}, \overrightarrow{p}) \geqq 0$ となる $\overrightarrow{p} \in \mathbb{R}^n$ がある』という主張に書き換えられる．C が凸集合かつ閉集合の場合の証明は，$\overrightarrow{z} \in C$ に対して $f(\overrightarrow{z}) = \|\overrightarrow{z}\|$（原点からの距離）とおいて連続関数 $f\colon C \to \mathbb{R}$ を定義し，これに最大値の原理を適用すると，C が原点を含まない閉集合という仮定から最小値 d は正なので，$\overrightarrow{p} \in C$ が f の最小値を与える点 $(f(\overrightarrow{p}) = d)$ とすると，この $\overrightarrow{p}$ が求めるものである．
以上の証明で用いた $\overrightarrow{p}$ を $n = 2$, $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-3)^2 + (y+6)^2 = 5\}$ の場合に計算せよ．答案は答だけを書くこと．

iii) 一般の集合 A と B については，$C = \{\overrightarrow{y} - \overrightarrow{x} \mid \overrightarrow{x} \in A,\ \overrightarrow{y} \in B\}$ とおくと，$A \cap B = \emptyset$ ならば $\overrightarrow{0} \notin C$ であり,『A と B が凸集合ならば C も凸集合』なので，上の小問の結果を用い，さらに最大値の原理を $g(\overrightarrow{x}) = (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{p})$ に適用することで証明できる．
次の『』内の空欄 (1)(2) を埋めて上記の『』内の主張の証明を完成せよ.『$\overrightarrow{z_1}, \overrightarrow{z_2} \in C$ かつ $0 < \lambda < 1$ とする．$\overrightarrow{z_1} \in C$ ということは $\boxed{(1)\qquad\qquad}$ を満たす $\overrightarrow{x_1} \in A$ と $\overrightarrow{y_1} \in B$ があることを意味する．$\overrightarrow{z_2}$ についても同様の $\overrightarrow{x_2} \in A$ と $\overrightarrow{y_2} \in B$ がある．よって
$\lambda\overrightarrow{z_1} + (1-\lambda)\overrightarrow{z_2} = \boxed{(2)\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$
となるが，右辺の最初の中括弧内は B が凸集合なので B の要素であり，右辺の 2 つめの中括弧内は A が凸集合なので A の要素だから，右辺は C の要素である．よって C は凸集合である.』

経済数学 II　期末試験　**略解**　　2015/01/27 服部哲弥

問 1 (60=10*4+20).

i) $x\mu_0+(5x-2)\mu_1=0$　【$2x\mu_0+(4(2x+y-3)+2(x-2y+4))\mu_1=2x\mu_0+(10x-4)\mu_1$】,
$y\mu_0+(5y-11)\mu_1=0$　【$2y\mu_0+(2(2x+y-3)-4(x-2y+4))\mu_1=2y\mu_0+(10y-22)\mu_1$】,
$\mu_1(5x^2+5y^2-4x-22y+24)=0$　【$\mu_1\left((2x+y-3)^2+(x-2y+4)^2-1\right)=0$】,
$\mu_0\geqq 0$,
$\mu_1\geqq 0$,
$\mu_0^2+\mu_1^2\neq 0$　【$(\mu_0,\mu_1)\neq(0,0)$】.

ii) $(x,y)=(\frac{2}{5},\frac{11}{5})$　【ただし，この点は $\mu_0=0$ なので $\mu_1>0$ のはずだから $g(x,y)=0$ でなければならないが，$g(x,y)=-1$ となるので，Fritz–John 条件のすべては満たさない.】

iii) $(x,y)=(\frac{8}{25},\frac{44}{25})$, $f(\frac{8}{25},\frac{44}{25})=\frac{16}{5}$　【$\mu_0\neq 0$, $\mu_1\neq 0$ $(g(x,y)=0)$ の場合から唯一の候補を得る.】

iv) $(x,y)=(\frac{12}{25},\frac{66}{25})$, $f(\frac{12}{25},\frac{66}{25})=\frac{36}{5}$　【$-f(x,y)=-x^2-y^2$ を $f(x,y)$ としたときの最小値を与える点での f の値.】

v) (1) 2　(2) 1 次従属　(3) $\{\overrightarrow{0}\}$　(4) 負

問 2 (40=10*2+20).

i) (1) $\frac{1}{3}$　(2) $<$

ii) $\overrightarrow{p}=\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}$ 【点と円の最短距離は点と円の中心を結ぶ線分と円との交点で実現】

iii) (1) $\overrightarrow{z_1}=\overrightarrow{y_1}-\overrightarrow{x_1}$
(2) $\{\lambda\overrightarrow{y_1}+(1-\lambda)\overrightarrow{y_2}\}-\{\lambda\overrightarrow{x_1}+(1-\lambda)\overrightarrow{x_2}\}$