慶應義塾大学試験問題用紙（日吉）

			試験時間	50分	分
平成27年7月28日(火) 4時限施行		学部　学科　年　組		採　点　欄	※
担当者名	服部　哲弥　君	学籍番号			
科目名	経済数学 I	氏　名			

注意：　解答は答案用紙の表がわに収めること．答案は答えだけでよい．

問１．　実3変数関数 $f:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ を
$f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xz - 3y$ で定める．以下の問い i) — iv) に答えよ．

i) f の勾配ベクトル $\vec{\nabla} f(x,y,z)$ の零点，すなわち，$\vec{\nabla} f(a,b,c) = (0,0,0)$ を満たす点 $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ をすべて求めよ．答案用紙は答えだけを書け．

ii) f のヘッセ行列

$$H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y,z) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y,z) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x,y,z) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x,y,z) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) \end{pmatrix}$$

を計算せよ．答案用紙は答えだけを書け．

iii) 点 $(x,y,z) = (0,1,0)$ での f のヘッセ行列 $H_f(0,1,0)$ の正の固有値の個数と負の固有値の個数をそれぞれ答え，この点 $(0,1,0)$ で f が {極大値を取る，極小値を取る，鞍点（峠点）である，鞍点でもなく極値も取らない，極値を取るか取らないかは f の2階偏導関数まででは結論が出ない} のいずれであるかを答えよ．
答案用紙は，点 $(0,1,0)$： 正固有値100個，負固有値0個，答えがわからない，などのように書け．

iv) 点 $(x,y,z) = (1,2,1)$ での f のヘッセ行列 $H_f(1,2,1)$ の正の固有値の個数と負の固有値の個数をそれぞれ答え，この点 $(1,2,1)$ で f が {極大値を取る，極小値を取る，鞍点（峠点）である，鞍点でもなく極値も取らない，極値を取るか取らないかは f の2階偏導関数まででは結論が出ない} のいずれであるかを答えよ．
答案用紙は，点 $(1,2,1)$： 正固有値100個，負固有値0個，答えがわからない，などのように書け．

問２．　$f(x,y,z) = x + y + z$, $g(x,y,z) = (x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2 - 25$, $h(x,y,z) = (x-1)^2 + y^2 + (z+4)^2 - 25$, によって定義された3つの3変数関数 $f:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $h:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ について，等式条件 $g(x,y,z) = h(x,y,z) = 0$ の下で $f(x,y,z)$ の最大値と最小値を求める問題を未定乗数法を用いて解く．以下の i)–iv) に答えよ．

i) 未定乗数法のように微分法を用いて最大（小）値を求める方法は（最大（小）値があるならば候補は…，という）必要条件の定理が多いので，最大（小）値があることを別途証明しないと，意味の無い候補を最大（小）値と誤認する．経済学への応用では最大（小）値があることが経済学的理由でわかる場合が多いが，テキストでは数学的枠組みとして最大値の原理で保証した．等式条件を満たす点の集合
$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid g(x,y,z) = h(x,y,z) = 0\}$
が閉集合ならば，最大値の原理（定理）により，連続関数 f は D 上で最大（小）値を持つ．つまり，$g = h = 0$ の下での f の最大（小）値は存在する．D が閉集合であることは

D^c が開集合であることで定義され，D^c は複号任意として $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \pm g(x,y,z)<0,\ \pm h(x,y,z)<0\}$ の4つの集合の和集合である．したがって，以下のことが成り立てば，D は閉集合である：

a) 任意の連続関数 p に対して $P=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid p(x,y,z)<0\}$ は開集合である．

b) P と Q が $\mathbb{R}^3$ の開集合ならば $P\cap Q$ も開集合である．

c) P と Q が $\mathbb{R}^3$ の開集合ならば $P\cup Q$ も開集合である．

a) は次のように証明される．$\overrightarrow{a}=(a,b,c)\in P$ に対して，$\epsilon=-p(\overrightarrow{a})$ とおくと $\overrightarrow{a}$ は P の点だから $\epsilon>0$ なので，p が連続という仮定から，$\delta>0$ をうまく取ると $\overrightarrow{a}$ の δ 近傍 $U_\delta(\overrightarrow{a})$ の点 $\overrightarrow{x}\in U_\delta(\overrightarrow{a})$ に対して必ず $|p(\overrightarrow{x})-p(\overrightarrow{a})|<\epsilon$ となるから，$p(\overrightarrow{x})\leqq$ $\boxed{\text{(a)}\qquad\qquad}$ と合わせると $p(\overrightarrow{x})<0$，すなわち，$U_\delta(\overrightarrow{a})\subset P$ となる．すなわち，P は開集合である．

b) は次のように証明される．$\overrightarrow{x}\in P\cap Q$ ならば，$\overrightarrow{x}\in P$ かつ $\overrightarrow{x}\in Q$ で，P と Q が開集合だから，正数 δ_1 と δ_2 が存在して，$U_{\delta_1}(\overrightarrow{x})\subset P$ かつ $U_{\delta_2}(\overrightarrow{x})\subset Q$．このとき $\delta=$ $\boxed{\text{(b)}\qquad\qquad}$ とおくと，中心が共通の球は半径が小さいものが大きいものの部分集合になるので，$U_\delta(\overrightarrow{x})\subset P\cap Q$ となる．すなわち $P\cap Q$ も開集合である．c) も同様に証明できるので，最初の D は閉集合である．

【問】．以上が説明文となるように空欄 (a) と (b) を埋める数式をそれぞれ答えよ．なお，(a) は $p(\overrightarrow{x})$ と $p(\overrightarrow{a})$ のみを文字として含み，三角不等式を意味する数式，(b) は記号でも良いし，δ_1 と δ_2 と日本語で記述しても良い．

ii) $g=h=0$ の下で f の極値を取る点はラグランジュの未定乗数法で求められる．その理由を次のように概観する．いま方程式 $g=h=0$ を解いて $y=r(x)$ と $z=s(x)$ を得たとする（厳密には陰関数定理による）．すなわち，$g(x,r(x),s(x))=h(x,r(x),s(x))=0$ が x の恒等式とする．以下，$\overrightarrow{x}=(x,r(x),s(x))$ とおく．今の2本の恒等式を x について微分して合成関数の微分法則を用いた上で導関数 $r'(x)$ と $s'(x)$ について解いた上で，$f(\overrightarrow{x})$ の微分が0という方程式（f が極値を取る条件）を合成関数の微分法則で変形して現れる $r'(x)$ と $s'(x)$ に代入すると，

$$(*)\quad \frac{\partial f}{\partial x}(\overrightarrow{x})+\boxed{\text{(c)}\qquad\qquad\qquad}\,J^{-1}(\overrightarrow{x})\begin{pmatrix}\dfrac{\partial g}{\partial x}(\overrightarrow{x})\\ \dfrac{\partial h}{\partial x}(\overrightarrow{x})\end{pmatrix}=0$$

を得る．ここで，$J^{-1}(\overrightarrow{x})$ はヤコビ行列 $J(\overrightarrow{x})$ の逆行列で，$J(\overrightarrow{x})=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial g}{\partial y}(\overrightarrow{x}) & \dfrac{\partial g}{\partial z}(\overrightarrow{x})\\ \dfrac{\partial h}{\partial y}(\overrightarrow{x}) & \dfrac{\partial h}{\partial z}(\overrightarrow{x})\end{pmatrix}$.

(*) において

$$(**)\quad (\mu\ \lambda)=\boxed{\text{(c)}\qquad\qquad\qquad}\,J^{-1}(\overrightarrow{x})$$

とおくと，未定乗数法のうち x 偏微分の方程式を得る．また，(**) の右から $J(\overrightarrow{x})$ をかけると，y 偏微分と z 偏微分の方程式になる．

【問】．以上が説明文となるように空欄 (c) を埋める数式を答えよ．

iii) 未定乗数法を用いて，$g=h=0$ の下で f が極値を取る点の候補 $\overrightarrow{a}$ をすべて求めよ．答案用紙は答えだけを書け．

iv) $g=h=0$ の下で f が最小値を取る点 $\overrightarrow{a}$ と最小値 $f(\overrightarrow{a})$ を計算せよ．答案用紙は答えだけを書け．

v) $g=h=0$ の下で f が最大値を取る点 $\overrightarrow{a}$ と最大値 $f(\overrightarrow{a})$ を計算せよ．答案用紙は答えだけを書け．

経済数学 I　期末試験　**略解**　　2015/07/28 服部哲弥

問 1 (40=10*4).

i) $\underline{(a,b,c) = (0,-1,0),\ (0,1,0),\ (1,-1,1),\ (1,1,1)}$

【　$\overrightarrow{\nabla} f(x,y,z) = (3x^2 - 3z,\, 3y^2 - 3,\, -3x + 3z^2)$　】

ii) $\underline{H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 6x & 0 & -3 \\ 0 & 6y & 0 \\ -3 & 0 & 6z \end{pmatrix}}$

iii) <u>点 $(0,1,0)$： 正固有値 2 個，負固有値 1 個，鞍点（峠点）である</u>

【　$H_f(0,1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 6 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，固有値 $6, 3, -3$，$\overrightarrow{\nabla} f(0,1,0) = (0,0,0)$　】

iv) <u>点 $(1,2,1)$： 正固有値 3 個，負固有値 0 個，鞍点でもなく極値も取らない</u>

【　$H_f(1,2,1) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -3 \\ 0 & 12 & 0 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$，固有値 $12, 9, 3$，$\overrightarrow{\nabla} f(1,2,1) = (0,9,0) \neq (0,0,0)$　】
【勾配ベクトルがゼロベクトルではないことに注意】

問 2 (60=10*6).

i) (a) $p(\overrightarrow{x}) \leqq \underline{p(\overrightarrow{a}) + |p(\overrightarrow{x}) - p(\overrightarrow{a})|}$
(b) $\delta = \underline{\min\{\delta_1, \delta_2\}}$　（または，<u>δ_1 と δ_2 のうち大きくないほう</u>）

ii) (c) $\underline{(-\dfrac{\partial f}{\partial y}(\overrightarrow{x})\ \ -\dfrac{\partial f}{\partial z}(\overrightarrow{x}))}$

iii) $\overrightarrow{a} = \underline{(2\sqrt{2}+1, 2\sqrt{2}, -1)}, \underline{(-2\sqrt{2}+1, -2\sqrt{2}, -1)}$

【　$L = f + \mu g + \lambda h$,
$\dfrac{\partial L}{\partial x} = 1 + 2\mu(x-1) + 2\lambda(x-1) = 0$,
$\dfrac{\partial L}{\partial y} = 1 + 2\mu y + 2\lambda y = 0$,
$\dfrac{\partial L}{\partial z} = 1 + 2\mu(z-2) + 2\lambda(z+4) = 0$,
$g(x,y,z) = (x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2 - 25 = 0$,
$h(x,y,z) = (x-1)^2 + y^2 + (z+4)^2 - 25 = 0$.　】

iv) $\overrightarrow{a} = \underline{(-2\sqrt{2}+1, -2\sqrt{2}, -1)}, f(\overrightarrow{a}) = \underline{-4\sqrt{2}}$

v) $\overrightarrow{a} = \underline{(2\sqrt{2}+1, 2\sqrt{2}, -1)}, f(\overrightarrow{a}) = \underline{4\sqrt{2}}$
【条件 $g = h = 0$ は条件 $z = -1$ と $(x-1)^2 + y^2 = 16$ と同値なので，$z = -1$ 平面内の円周上の最大最小問題になるから図示でも解ける.】