慶應義塾大学試験問題用紙（日吉）

試験時間	**50** 分	分

平成 28 年 1 月 26 日 (火)　時限施行		学部　　学科　　年　　組		採　点　欄	※
担当者名	服部　哲弥　君	学籍番号			
科目名	経済数学 II	氏　名			

注意：答案用紙は裏を使わないこと．解答は答案用紙の表がわに収めよ．

問１．　$f(x,y)=(4-y)(2(x-2)^2+2(y-1)^2)$, $g_1(x,y)=-y$, $g_2(x,y)=-x$, $g_3(x,y)=x+y-4$, で平面 $\mathbb{R}^2$ 上の実数値関数たちを定義し，閉領域（境界を含む領域）$D\subset\mathbb{R}^2$ を $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid g_i(x,y)\leqq 0,\ i=1,2,3\}$ で定義する．D における f の極小値を Fritz–John 条件を援用して求めるための以下の小問に答えよ．答案用紙は答のみを書け．

i) D **の内部**（境界上を除く）で f の勾配ベクトルが 0 ベクトルになる点，すなわち $\overrightarrow{\nabla} f(x,y)=\overrightarrow{0}$ の解を求めよ．($f(x,y)$ の x 偏微分は設問の表記で因数分解できることに注意.)

ii) 点 $(1,1)\in D$ において，f の値が（微分法の意味で）もっとも速く増加する方向のベクトルを計算せよ．答が複数可能な場合は具体的な実数値を 1 組選んで答えよ．

iii) D の境界は D を定義する 3 つの不等式 $g_i(x,y)\leqq 0$, $i=1,2,3$, のうちいずれか 1 つが等式の場合に対応する．2 つが等式残り 1 つが不等式のとき，D の境界の端点となる．各 $i=1,2,3$ に対して，$g_i(x,y)<0$ かつ他の 2 つが等式となる点を Q_i とおく．Q_1, Q_2, Q_3 のうち，その点での勾配ベクトル $\overrightarrow{\nabla} f(x,y)$ と D の内部向きのどのベクトルも**鈍角をなさない**ものを選び，当てはまる点をその座標とともに $\underline{Q_0(9,9)}$ のように答えよ．

iv) Fritz–John 条件の解は，計算してみると，勾配ベクトルの 1 次従属性の条件において $\overrightarrow{\nabla} f(x,y)$ の係数が 0 のものはなく（したがって Kuhn–Tucker 条件の解だけを探せばよく），また，D の境界線上の解については，上の小問の Q_i たちを除くと $g_1(x,y)=0$ も $g_2(x,y)=0$ も満たさないこともわかる．Fritz–John 条件の D の境界上の解 (x,y) のうち，$g_3(x,y)=0$, $g_1(x,y)<0$, $g_2(x,y)<0$ を満たすものを求めよ．

v) （以上に基づいて,）f の D での最小値を取る点 (x,y) を答えよ．複数ある場合はすべて列挙せよ．

問２．　a と b を実数とし，3×2 行列を $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & a \\ 3 & b \end{pmatrix}$ とおいて，その転置行列 ${}^tA$ の像空間を $V=\{{}^tA\overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{u}\in\mathbb{R}^3\}$ とおく．V は 2 成分ベクトルの集合で線形空間である．2 成分ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と点 (x,y) を対応させることでベクトルの集合 V は平面の部分集合 $V\subset\mathbb{R}^2$ とみなせる．以下この対応で集合の記号を平面の部分集合とベクトルの集合の両方の意味に使う．平面内の第 3 象限の内部を $T_3=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x<0,\ y<0\}$ とおく．以下の小問に答えよ．答案用紙は答のみを書け．

i) V と T_3 は凸集合である．分離定理を適用すると，もし $V\cap T_3=\emptyset$（V と T_3 に共通部分がない）ならば,『$\overrightarrow{x}\in V$ ならば内積 $(\overrightarrow{p},\overrightarrow{x})\geqq c$，かつ，$\overrightarrow{x}\in T_3$ ならば $(\overrightarrow{p},\overrightarrow{x})\leqq c$』を満たす 0 ベクトルでない $\overrightarrow{p}=\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$ と実数 c がある．

この事実の前提部分である $V \cap T_3 = \emptyset$ が成り立つように a と b を定めよ．答案用紙は $a=0,\, b=0$ のように書け.

ii) $\overrightarrow{0} \in V$ なので，a と b を上の小問の答のとおり選ぶと，分離定理の結果 $c \leqq 0$ であり T_3 には $(0,0)$ にいくらでも近い点があることから $c \geqq 0$ なので $c=0$ と決まる．さらに，T_3 には $(-1,0)$ にいくらでも近い点があることから $p_1 \geqq 0$，$(0,-1)$ にいくらでも近い点があることから $p_2 \geqq 0$，がそれぞれ成り立つ．すなわち，全成分非負で $\overrightarrow{0}$ でないベクトル $\overrightarrow{p}$ があって,『$\overrightarrow{x} \in V$ ならば必ず $(\overrightarrow{p}, \overrightarrow{x}) \geqq 0$』が成り立つ．この結論（『』内）を満たす $\overrightarrow{p} \in \mathbb{R}^2$ の例 1 つを挙げよ．答案用紙は $\overrightarrow{p} = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \end{pmatrix}$ のように書け.

iii) 前小問までの結果は，A を列ごとに列ベクトルにわけて $A = (\overrightarrow{a_1}\ \overrightarrow{a_2})$ とおくとき，$\overrightarrow{a_1}$ と $\overrightarrow{a_2}$ が一次従属であることを意味する．前小問までの結果として得られる $p_1, p_2, \overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}$ の間の関係式をこれらの記号を用いて書け.

iv) 得られた集合 V の平面内の図形としての方程式を書け.

経済数学 II　期末試験　**略解**　　2016/01/26 服部哲弥

問 1 (60=10*4+20).

i) $\underline{(2,1)}$
【$\overrightarrow{\nabla} f(x,y) = (4(4-y)(x-2),\ -6y^2+24y-2x^2+8x-26)$ から $\overrightarrow{\nabla} f(x,y) = \overrightarrow{0}$ を実数の範囲で解くと $(x,y)=(2,1),(2,3)$ だが，$x+y<4$ を満たさない解は D の外部】

ii) $\underline{(-6,-1)}$　（ある $k>0$ に対して $(-6k,-k)$ に等しければ可）
【$\overrightarrow{\nabla} f(1,1) = (-12,-2)$】

iii) $\underline{Q_1(0,4)}$
【$Q_1(0,4)$, $\overrightarrow{\nabla} f(0,4)=(0,-26)$, $Q_2(4,0)$, $\overrightarrow{\nabla} f(4,0)=(32,-26)$, $Q_3(0,0)$, $\overrightarrow{\nabla} f(0,0)=(-32,-26)$】

iv) $\underline{(x,y) = (\frac{10-\sqrt{22}}{6},\ \frac{14+\sqrt{22}}{6})}$
【Fritz–John 条件と小問の条件から $\lambda_1=\lambda_2=0$ ゆえ，$\overrightarrow{\nabla} f(x,y)+\lambda_3\,(1\ 1)=(0\ 0)$, $g_3(x,y)=x+y=4$. λ_3 と y を消去すると $6x^2-20x+13=0$ で $x=\frac{1}{6}(10\pm\sqrt{22})$, $y=\frac{1}{6}(14\mp\sqrt{22})$. $g_1(x,y)=-y<0$ と $g_2(x,y)=-x<0$ は満たすが，$\lambda_3=\frac{1}{9}(-2\mp 8\sqrt{22})>0$ を満たすのは後者のみ】

v) $\underline{(2,1),\ (0,4)}$
【$f(2.1)=f(0,4)=0,\ f(\frac{10-\sqrt{22}}{6},\ \frac{14+\sqrt{22}}{6})=\frac{2}{27}(85+11\sqrt{22})$】

問 2 (40=10*4).

i) $\underline{a=6,\ b=-9}$
【$V\subset\mathbb{R}^2$ は線形部分空間だから，V の次元 $\dim V$ は 2 以下だが，2 次元ならば $V=\mathbb{R}^2$ なので，$V\cap T_3=\emptyset$ にならない．また A は零行列ではないので V は $\overrightarrow{0}$ 以外のベクトルを要素にもつから，$\dim V \geqq 1$ である．よって $\mathrm{rank}\,{}^tA=\dim V=1$ である．${}^tA=\begin{pmatrix}1&-2&3\\-3&a&b\end{pmatrix}$ だから rank が 1 になるには 2 行目が 1 行目のスカラー倍】

ii) $\underline{\overrightarrow{p}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}}$　（この正数倍は可）

【$\overrightarrow{x}\in V \iff \overrightarrow{x}={}^tA\overrightarrow{u}$ から，$(A\overrightarrow{p},\overrightarrow{u})=(\overrightarrow{p},\overrightarrow{x})\geqq 0$. $A=\begin{pmatrix}1&-3\\-2&6\\3&-9\end{pmatrix}$ から $A\overrightarrow{p}=(p_1-3p_2)\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$. $(A\overrightarrow{p},\overrightarrow{x})\geqq 0$ が恒等的に成り立つのは $p_1=3p_2$ のときのみ】

iii) $\underline{p_1\overrightarrow{a_1}+p_2\overrightarrow{a_2}=\overrightarrow{0}}$　（$3\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_2}=\overrightarrow{0}$）

iv) $\underline{3x+y=0}$
【V は原点を通り $\overrightarrow{p}$ を法線とする直線．すなわち，原点を通り傾き -3 の直線】