慶應義塾大学試験問題用紙（日吉）

試験時間	**50** 分	

平成 29 年 08 月 01 日 (火) 3 時限施行		学部　　学科　　年　　組	
担当者名	服部　哲弥　君	学籍番号	
科目名	経済数学 I	氏　名	

注意：**答案用紙の裏は使ってはならない**（解答は答案用紙の表がわに収めよ）．また，**答案用紙表右上に登録した時限（３または４）**を必ず明記すること．

問１．　実 3 変数関数 $f:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ を
$f(x,y,z) = x + y - 2z - 3x^2 - 3y^2 - 3z^2 + x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$ で定める．
f は多項式なので $\mathbb{R}^3$ で C^1 級であることから，平均値の定理が成り立つ．特に原点を中心とするある正の半径の球の内部の各点 $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ に対して，$0 < \theta < 1$ と
$f(x,y,z) = f(0,0,0) + \vec{\nabla} f(\theta x, \theta y, \theta z)\vec{x}$ を満たす θ が存在する．ここで $\vec{\nabla} f(\theta x, \theta y, \theta z)$ は 1×3 行列（行ベクトル）で，右辺最後の項は行列としての積（2 つのベクトルとしては内積）であった．
以下の問 i) – vi) に答えよ．

i) 原点 $(0,0,0)$ での f の勾配ベクトル $(\vec{\nabla} f)(0,0,0)$ のノルム $r = \|(\vec{\nabla} f)(0,0,0)\|$ を計算せよ．答案用紙は答だけを $\underline{r = \cdots}$ のように書け．

ii) 問 i) で求めた 1×3 行列（行ベクトル）を $(a\ b\ c) = (\vec{\nabla} f)(0,0,0)$ とおくとき，$\displaystyle\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}(f(a\varepsilon, b\varepsilon, c\varepsilon) - f(0,0,0))$ を問 i) の答 r を用いて書け．答案用紙は答だけを $\underline{r-3}$ のように書け.（複数の書き方がある場合は，題意に沿ってもっとも整理された形で書け.）

iii) f の勾配ベクトル $\vec{\nabla} f$ の零点，すなわち，$\vec{\nabla} f(x,y,z) = (0\ \ 0\ \ 0)$ を満たす点 $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ をすべて求めよ．答案用紙は答だけを $\underline{(0,0,0)}, \underline{\cdots}, \ldots$ のように（複数あれば並べて）書け．

iv) f のヘッセ行列

$$H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y,z) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y,z) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x,y,z) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x,y,z) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) \end{pmatrix}$$

を計算せよ．答案用紙は答えだけを書け．

v) 問 iii) で求めた勾配ベクトルの零点のうち y 座標が負のものについて，問 iv) のヘッセ行列の固有値を求めよ．答案用紙には答だけを $\underline{\text{点}\,(0,0,0)\,\text{での固有値}\,0,0,0,0}$ のように（固有値について重複をこめて）並べて書け．

vi) 問 v) で調べた勾配ベクトルの零点について，その点で f が {極大値を取る，極小値を取る，鞍点（峠点）である，鞍点でもなく極値も取らない，極値を取るか取らないかは f の 2 階偏導関数まででは結論が出ない，極値は取らないが峠（鞍）点か否かは f の 2 階偏導関数まででは結論が出ない} のいずれであるかを答えよ．なお，この問は問 v) が正答の場合のみ配点する．

問２．　$U(x_1, x_2) = x_1 x_2$ とおき，n を 2 以上の整数とする．n 人による 2 財の純粋交換経済の競争均衡問題についての以下の文の空欄 (a)–(d) を適切に埋める式を答案に書け．なお，空

欄 (a)(b) に入れる文字は $p_1, p_2, w_{\alpha,1}, w_{\alpha,2}$ 以外は用いないこと．また，空欄 (c) に入れる文字は W_1, W_2 以外は用いないこと，さらに，空欄 (d) は行ベクトルの形で $(0,0,0)$ のように解答せよ．

$\alpha = 1,\ldots,n$ に対して，個人 α の効用関数 U_α は問の冒頭で与えた U に等しく，また，保有する財の組の初期値を $(w_{\alpha,1}, w_{\alpha,2})$ とおき，成分はすべて正とする.（$i=1,2$ に対して第 i 変数（成分）$w_{\alpha,i}$ が財 i を表す.）

i) $i=1,2$ に対して財 i の市場価格 $p_i > 0$ をまず固定すると，各個人 α の予算制約下の効用最大化問題は，等式条件

$$(1) \qquad p_1 x_{\alpha,1} + p_2 x_{\alpha,2} = p_1 w_{\alpha,1} + p_2 w_{\alpha,2}$$

の下で $U_\alpha(x_{\alpha,1}, x_{\alpha,2})$ の最大値を与える $(x_{\alpha,1}, x_{\alpha,2})$ を求めることになる．このとき，$(x_{\alpha,1}, x_{\alpha,2})$ が満たす方程式は，等式条件 (1) と $\dfrac{x_{\alpha,2}}{x_{\alpha,1}} = \boxed{\text{(a)}}$ であり，解くと，

$x_{\alpha,1} = \boxed{\text{(b)} \qquad\qquad\qquad}$，および，$x_{\alpha,2}$ は $x_{\alpha,1}$ の解の右辺で添字 1 と 2 をすべて入れ替えた式に等しいことがわかる．

ii) 等式条件付き最大値問題は以上で終わるが，せっかくなので均衡競争解（ワルラスの解）を次に考える．$i=1,2$ について，n 人の財 i の総和を $W_i = \sum_{\alpha=1}^{n} w_{\alpha,i}$ とおく．均衡競争解は，上で得た解が初期値から財の交換で達成できる価格のときの解を言う．すなわち，上記の解 $(x_{\alpha,1}, x_{\alpha,2})$, $\alpha = 1,\ldots,n$, について財の保存則

$$\sum_{\alpha=1}^{n} x_{\alpha,i} = \sum_{\alpha=1}^{n} w_{\alpha,i}\,, i = 1,2,$$

を満たす価格とそのときの配分が求めるものである．上で得た解を代入すると 2 財の価格比が $\dfrac{p_2}{p_1} = \boxed{\text{(c)}\quad}$ と決まり，これを上で得た解に代入すれば $x_{\alpha,i}$ たちは初期値 $w_{\alpha,i}$ たちだけで書けて，完全に解ける．このとき，市場での交換の前後での個人 α の効用の変化は

$$U_\alpha(x_{\alpha,1}, x_{\alpha,2}) - U_\alpha(w_{\alpha,1}, w_{\alpha,2}) = \frac{1}{4} W_1 W_2 \Big(\frac{w_{\alpha,1}}{W_1} - \frac{w_{\alpha,2}}{W_2} \Big)^2 \geqq 0$$

となって，すべての個人の効用が市場での交換の結果増大することがわかる．

たとえば，$n=3$ で $(w_{1,1}, w_{1,2}) = (9,1)$, $(w_{2,1}, w_{2,2}) = (3,1)$, $(w_{3,1}, w_{3,2}) = (3,3)$ のとき，均衡競争解についての効用は $(U_1(x_{1,1}, x_{1,2}), U_2(x_{2,1}, x_{2,2}), U_3(x_{3,1}, x_{3,2})) = \boxed{\text{(d)} \qquad\qquad}$ となって，すべての個人について，初期値の効用 $(U_1(w_{1,1}, w_{1,2}), U_2(w_{2,1}, w_{2,2}), U_3(w_{3,1}, w_{3,2})) = (9,3,9)$ 以上である．

問３． （未記入ならば）**答案用紙表右上余白に登録した時限（３または４）を大きく書け．**
また,（未記入ならば）答案用紙所定欄に学籍番号と氏名を明瞭に書け.

問 1 (60=10*6).

【　$\overrightarrow{\nabla} f(x,y,z) = (1-6x+3x^2-6xy+3y^2 \quad 1-6y-3x^2+6xy-3y^2 \quad -2-6z)$　】

i) $r = \underline{\sqrt{6}}$　【　$(a \ \ b \ \ c) = \overrightarrow{\nabla} f(0,0,0) = (1 \ \ 1 \ \ -2)$　】

ii) $\underline{r^2}$ 【　f が C^1 級（$\overrightarrow{\nabla} f$ が連続）なことから，平均値の定理によって求める量は

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \overrightarrow{\nabla} f(\theta a\varepsilon, \theta b\varepsilon, \theta c\varepsilon) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \overrightarrow{\nabla} f(0,0,0) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \|(a,b,c)\|^2$$ 】

iii) $\underline{(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{3})}$, $\underline{(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})}$

iv) $H_f(x,y,z) = \underline{\begin{pmatrix} 6x-6y-6 & -6x+6y & 0 \\ -6x+6y & 6x-6y-6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}}$

v) 点 $(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ での固有値 $6, -6, -6$

【　$H_f(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}) = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 0 \\ -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$

なお，$H_f(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{3}) = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$ で，点 $(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{3})$ での固有値は $-6, -6, -6$　】

vi) 点 $(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$：鞍点（峠点）である

【なお，点 $(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{3})$ では極大値を取る】

問 2 (40=10*4).　(a) $\frac{p_1}{p_2}$　(b) $\frac{1}{2} w_{\alpha,1} + \frac{1}{2}\frac{p_2}{p_1} w_{\alpha,2}$　(c) $\frac{W_1}{W_2}$　(d) $(12, 3, 12)$

【均衡競争解は $(x_{1,1}, x_{1,2}) = (6,2)$, $(x_{2,1}, x_{2,2}) = (3,1)$, $(x_{3,1}, x_{3,2}) = (6,2)$】