慶應義塾大学試験問題用紙（日吉）

			試験時間	50分
平成30年　月23日(火) 4時限施行		学部　　学科　　年　　組		
担当者名	服部　哲弥　君	学籍番号		
科目名	経済数学 II	氏　名		

注意：**答案用紙の裏は使ってはならない**（解答は答案用紙の表がわに収めよ）．また，**答案用紙表右上に登録した時限（３または４）**を必ず明記すること．

問１．　$f(x,y,z) = -3(x-2)^2-2(y-3)^2-(z-4)^2$, $g_1(x,y,z) = -x+1$, $g_2(x,y,z) = -2y+z$, $g_3(x,y,z) = -z+3$, で3次元空間 $\mathbb{R}^3$ 上の実数値関数たち f, g_i, $i = 1,2,3$, を定義し，閉領域（境界を含む領域）$D \subset \mathbb{R}^3$ を $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid g_i(x,y,z) \leqq 0,\ i = 1,2,3\}$ で定義する．D における f の極小値を Fritz–John 条件を援用して求める問題に関連する以下の小問に答えよ．なお，勾配ベクトルを $\overrightarrow{\nabla} f = (\dfrac{\partial f}{\partial x}\ \dfrac{\partial f}{\partial y}\ \dfrac{\partial f}{\partial z})$ のように 1×3 行列で表し，$\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^3$ に対して $\overrightarrow{\nabla} f(\overrightarrow{x})\overrightarrow{u}$ は $\overrightarrow{u}$ を 3×1 行列と見ての積（3成分ベクトルどうしの内積）とするが，積以外の文脈では習慣に従って $\overrightarrow{u} = (u,v,w)$ とも書く．

i) $g_1(\overrightarrow{a}) = g_2(\overrightarrow{a}) = g_3(\overrightarrow{a}) = 0$ を満たす点 $\overrightarrow{a} = (a,b,c)$ を求めよ．答案用紙はおもて面に $\underline{\overrightarrow{a} = (0,0,0)}$ のように答だけを書け．

ii) 前小問の $\overrightarrow{a}$ において，ある $t_0 > 0$ が存在して $0 < t < t_0$ を満たすすべての t について（つまり「小さい正数 t」に対して），かつ，すべての $i = 1,2,3$ について $g_i(\overrightarrow{a} + t\overrightarrow{u}) < g_i(\overrightarrow{a})$, が成り立つベクトル $\overrightarrow{u} = (u,v,w)$ のうちで $w = 2$ となるものの例を求めよ．答案用紙はおもて面に $\underline{\overrightarrow{u} = (0,0,2)}$ のように具体例1つだけを書け．

iii) 前小問の $\overrightarrow{a}$ において，4つの不等式 $\overrightarrow{\nabla} f(\overrightarrow{a})\overrightarrow{u} < 0$ と $\overrightarrow{\nabla} g_i(\overrightarrow{a})\overrightarrow{u} < 0$, $i = 1,2,3$, が同時に成り立つ $\overrightarrow{u}$ は $\boxed{}$．この意味（すなわち Fritz–John 条件の意味）で，点 $\overrightarrow{a}$ は D における f の極小値を与える可能性がある（極小値を与える候補の点である）．
以上の記述の議論の筋が通るように空欄を数式または語句またはそれらの組み合わせで埋めよ．答案用紙はおもて面に $\underline{\overrightarrow{u}\ \text{は}\cdots}$ のように答だけを書け．

iv) 一般的な取り扱いは Fritz-John 条件

$$(*)\qquad \begin{cases} \mu_0 \overrightarrow{\nabla} f(\overrightarrow{x}) + \displaystyle\sum_{i=1}^{3} \mu_i \overrightarrow{\nabla} g_i(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{0}, & (\mu_0,\mu_1,\mu_2,\mu_3) \neq (0,0,0,0), \\ \mu_i \geqq 0,\ \mu_i g_i(\overrightarrow{x}) = 0,\ i = 0,1,2,3, & \end{cases}$$

を $\mu_i \in \mathbb{R}$ たちと $\overrightarrow{x} \in D$ の方程式として解いて候補を探す．これについて以下に答えよ．

a. (*) を満たす点 $\overrightarrow{x} \in D$ のうち $g_1(\overrightarrow{x}) = 0$ かつ $g_2(\overrightarrow{x})\,g_3(\overrightarrow{x}) \neq 0$ を満たすものを求め，その点での f の値とともに，答案用紙のおもて面に $\underline{f(9,9,9) = 9}$ のように答だけを書け．

b. 1) (*) を満たす D の内点（すなわち $g_i(\overrightarrow{x}) \neq 0$, $i = 1,2,3$, を満たす点 $\overrightarrow{x} \in D$）を求め，その点での f の値とともに，答案用紙のおもて面に $\underline{f(9,9,9) = 9}$ のように答だけを書け．

2) 上の小問で得た (*) を満たす D の内点で，f は極大値を取るか極小値を取るかどちらでもないかを，記号や式も用いた1行以内の長さの理由とともに，答案用紙のおもて面に『…なので $\underline{\bigcirc\bigcirc}$』のように書け．(この問に限り，適切な理由がなければ採点しない．)

問２．　以下（**問１**と同様に）ベクトルは行列との積においては1列の行列（列ベクトル）とするが，積以外の文脈では習慣に従って $\overrightarrow{u} = (u,v,w)$ などとも書く．また，2つの同じ成分数のベクトルがあるとき，それらを $\overrightarrow{u}$ と $\overrightarrow{v}$ とおくと内積は $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ で表す．なお，行列 A に対して ${}^tA$ はその転置行列であり，$\emptyset$ は空集合を表す．以下の Gordan の定理に関連する文章中

の 4 つの空欄に，文章の意味が通るように適切な数式を入れよ．答案用紙には (a) $\underline{\overrightarrow{u} = 0}$，(b) $\underline{\cdots}$, ... のように答のみを書け．

Fritz–John 条件は Gordan の定理と平均値の定理を組み合わせることで証明される．Gordan の定理の証明は多くの部分が線形空間の理論に基づく．m を 2 以上の自然数，$V \subset \mathbb{R}^m$ を線形部分空間とする．空でない部分集合 $T \subset \mathbb{R}^m$ が $V \cap T = \emptyset$ を満たせば，$\overrightarrow{x} \in T$ を取ることができて，$\overrightarrow{x} \notin V$ だから，基底の議論から次元について $\dim V < m$ となり，直交補空間 $V^{\perp}$ が 1 次元以上となって，特に 0 ベクトルでない $\overrightarrow{p} \in V^{\perp}$ が存在する．直交補空間の定義から任意の $\overrightarrow{x} \in V$ に対して $\boxed{\text{(a)} \qquad\qquad}$ となる．

もしさらに $\dim V = m-1$（V が超平面）で T が連結（ひとつながりの）集合ならば，$T \cap V = \emptyset$ と内積（1 次関数）の連続性から $\overrightarrow{p}$ との内積は T 上定符号である．必要なら $\overrightarrow{p}$ を -1 倍することで $\overrightarrow{x} \in T$ に対して $(\overrightarrow{p}, \overrightarrow{x}) < 0$ が成り立つように選べる．$\dim V < m-1$ ならばこの議論は不十分だが，T が凸集合ならば分離定理を T と V に対して用いることで，$\overrightarrow{x} \in T$ に対して $(\overrightarrow{p}, \overrightarrow{x}) < 0$ が成り立つ $\overrightarrow{p}$ を選べる．

Gordan の定理では以上の V と T についての一般論において，T を全成分負のベクトルをすべて集めた集合（$m = 2$ ならば第 3 象限）に選び，m 列の行列 A に対して，V を ${}^{t}A\overrightarrow{y}$ の形のすべてのベクトルを集めた集合に選ぶ．$\overrightarrow{x} = {}^{t}A\overrightarrow{y}$ として空欄 (a) の等式を用いた後，内積と転置の関係を用いて得られる式が任意のベクトル $\overrightarrow{y}$ に対して成り立つことを用いると，A と $\overrightarrow{p}$ の行列としての積に関する（$\overrightarrow{y}$ を含まない）等式 $\boxed{\text{(b)} \qquad\qquad}$ を得る．また，先に得た $(\overrightarrow{p}, \overrightarrow{x}) < 0$, $\overrightarrow{x} \in T$, において，$\overrightarrow{x}$ として第 i 成分以外は 1 で第 i 成分は $-M$ なるものを選ぶと，$M > 0$ が大きくても $\overrightarrow{x} \in T$ だから $p_i \geqq 0$ を得る．すべての成分 i に対してこの議論が成り立つので $\overrightarrow{p}$ の全成分は非負と決まる．以上によって次の Gordan の定理を得る：行列 A に対して ${}^{t}A\overrightarrow{y}$ の全成分が負になるベクトル $\overrightarrow{y}$ がないならば，空欄 (b) の式を満たす全成分非負で 0 ベクトルでない $\overrightarrow{p} \in \mathbb{R}^m$ がある．

Gordan の定理の仮定を満たす具体例として，$m = 3$ として $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ とおくと，$\dim V = \operatorname{rank} {}^{t}A = 2 = m - 1$ なので，空欄 (b) の等式を同次連立 1 次方程式として $\overrightarrow{p}$ について解けば Gordan の定理で言う全成分非負の $\overrightarrow{p} \neq \overrightarrow{0}$ が求まる．自由変数を s とおくとこの連立方程式の一般解は $\overrightarrow{p} = s \times \boxed{\text{(c)} \qquad}$ と書けるので，たとえば $s = 1$ とすれば全成分非負の $\overrightarrow{p}$ を得る．

$m = 3$ で $\operatorname{rank} A < m - 1$ の場合の具体例として，$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ とおくと，空欄 (b) の同次連立 1 次方程式の一般解は，自由変数を s と t として，$\overrightarrow{p} = s \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \times \boxed{\text{(d)} \qquad}$ と書ける．結果から明らかに，すべての解が全成分非負とは限らないが（Gordan の定理が保証するとおり）s と t を適切に選べば全成分非負になる．

問 3．

経済数学 II　期末試験　**略解**　　2018/01/23 服部哲弥

問 1 (60=10*6).

i) $\underline{\overrightarrow{a} = (1, \frac{3}{2}, 3)}$

ii) $\underline{\overrightarrow{u} = (1,2,2)}$ など（$u > 0$ かつ $v > 1$ を満たす $(u, v, 2)$ はすべて可）

【$\overrightarrow{\nabla}\, g_1(x,y,z) = (-1,0,0)$, $\overrightarrow{\nabla}\, g_2(x,y,z) = (0,-2,1)$, $\overrightarrow{\nabla}\, g_3(x,y,z) = (0,0,-1)$,

$\overrightarrow{\nabla}\, g_i(\overrightarrow{a})\overrightarrow{u} < 0,\ i = 1,2,3\ \ \Leftrightarrow u > 0,\ w > 0,\ v > \frac{1}{2}w$ 】

iii) 存在しない

【$\overrightarrow{\nabla}\, f(x,y,z) = (-6x+12, -4y+12, -2z+8)$,

$\overrightarrow{\nabla}\, f(\overrightarrow{a}) = (6,6,2)$,

$\overrightarrow{\nabla}\, f(\overrightarrow{a})\overrightarrow{u} = 6u + 6(v - \frac{1}{2}w) + 5w > 0$】

iv) a. $\underline{f(1,3,4) = -3}$

b. 1) $\underline{f(2,3,4) = 0}$

2) $f(2,3,4) = 0$ だが $\overrightarrow{x} \neq (2,3,4)$ ならば $f(2,3,4) < 0$ なので，極大値（最大値）を取る．

【$\mu_0 \neq 0$ を得るので $\lambda_i = \frac{\mu_i}{\mu_0}$ とおくと，(*) の解はすべて D の点で，

$(x,y,z) = (2,3,4),\ \ (\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) = (0,0,0),\quad f(2,3,4) = 0,$

$(x,y,z) = (1,3,4),\ \ (\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) = (6,0,0),\quad f(1,3,4) = -3,$

$(x,y,z) = (2,\frac{7}{3},\frac{14}{3}),\quad (\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) = (0,\frac{4}{3},0),\quad f(2,\frac{7}{3},\frac{14}{3}) = -\frac{4}{3},$

$(x,y,z) = (1,\frac{7}{3},\frac{14}{3}),\quad (\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) = (6,\frac{4}{3},0),\quad f(1,\frac{7}{3},\frac{14}{3}) = -\frac{13}{3},$

$(x,y,z) = (2,3,3),\ \ (\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) = (0,0,2),\quad f(2,3,4) = -1,$

$(x,y,z) = (1,3,3),\ \ (\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) = (6,0,2),\quad f(1,3,4) = -4,$

$(x,y,z) = (2,\frac{3}{2},3),\ \ (\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) = (0,3,5),\quad f(2,\frac{3}{2},3) = -\frac{11}{2},$

$(x,y,z) = (1,\frac{3}{2},3),\ \ (\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) = (6,3,5),\quad f(1,\frac{3}{2},3) = -\frac{17}{2}.$ 】

問 2 (40=10*4).　(a) $\underline{(\overrightarrow{p}, \overrightarrow{x}) = 0}$,　(b) $\underline{A\overrightarrow{p} = 0}$,

(c) $\underline{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$ など（これの正定数倍はすべて可），

(d) $\underline{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$ または $\underline{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$ など（第 2 成分が 0 以外で 1, 3 成分の和に等しければ可）

問 3 (-10).　誤記，無記