慶應義塾大学試験問題用紙（日吉）

試験時間	**50** 分	

平成 30 年 07 月 31 日 (火) 3 時限施行		学部　　学科　　年　　組	
担当者名	服部　哲弥　君	学籍番号	
科目名	経済数学 I	氏　名	

注意：**答案用紙の裏は使ってはならない**（解答は答案用紙の表がわに収めよ）．また，**答案用紙表右上に登録した時限（３または４）**を必ず明記すること．

問１．　実 3 変数関数 $f:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ を $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - y^3 + z^2$ で定める．f は多項式なので $\mathbb{R}^3$ で C^2 級である（任意の n に対して C^n 級である）．以下の問 i) − vi) に答えよ．

i) 点 (x,y,z) における f の勾配ベクトルのノルムの 2 乗 $\|(\vec{\nabla} f)(x,y,z)\|^2$ を計算せよ．答案は $\underline{\|(\vec{\nabla} f)(x,y,z)\|^2 = \log(x+y+z)}$ のように答だけを用紙のおもて面に書け．

ii) i) で求めた勾配ベクトルのノルムの 2 乗の最小値を与える点 (x,y,z) を求めよ．複数ある場合はすべて列挙せよ．答案は $\underline{(x,y,z) = (1,2,3)}$ のように答だけを用紙のおもて面に書け．なお，この小問は i) が正答の場合のみ採点する．

iii) (x,y,z) が，連立方程式

(*) $\underline{\boxed{} = \boxed{} = \boxed{} = 0}$

を満たし，かつ点 (x,y,z) での f のヘッセ行列

$$H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y,z) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y,z) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x,y,z) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x,y,z) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) \end{pmatrix}$$

$= \underline{\boxed{}\ \text{の}\ \boxed{}\ \text{がすべて正}}$ のとき，f は点 (x,y,z) で極小値 $f(x,y,z)$ を取る．

以上の文が意味をなすように，最初の 4 つの空欄には問の冒頭に与えられた f について勾配ベクトルとヘッセ行列を具体的に計算した x,y,z の具体的な式を適切に入れ，残りの（最後の）空欄には単語（数学用語）を入れよ．答案は $\underline{\sin x = \cos y = \log z = 0}$, $\underline{\exp(xyz)\ \text{の係数がすべて正}}$ のように，（空欄の式や単語だけでなく）空欄を埋めた上でそれぞれの下線部全部を用紙のおもて面に書け．

iv) f が極値を取る点 (x,y,z) とその点での f の値（極値），および極大値か極小値かを答えよ．複数ある場合はすべて列挙せよ．答案は $\underline{f(1,2,3) = 4,\ \text{極大値},\ f(5,6,7) = 8,\ \text{極小値},\ \cdots}$ のように答だけを用紙のおもて面に書け．なお，この小問は iii) が正答の場合のみ採点する．

v) (x,y,z) が，iii) の連立方程式 (*) を満たし，かつ $H_f(x,y,z)$ の $\boxed{}$ とき，点 (x,y,z) は f の峠点（鞍点）である．

以上の文が iii) の文に対応する適切な説明となるように，空欄に，数式を含まない，日本語の表現を入れよ．答案は <u>係数が増大する</u> のように，空欄に埋めるべき表現だけを用紙のおもて面に書け．

vi) f の鞍点 (x,y,z) とそこでの f の値を求めよ．鞍点を持たない場合は「無い」と答え，複数

ある場合はすべて列挙せよ．答案は 無い または $f(1,2,3)=4,\ f(5,6,7)=8,\ \cdots$ のように答だけを用紙のおもて面に書け．なお，この小問は v) が正答の場合のみ採点する．

問２． 以下の文章の空欄 (a)–(d) を，文章の前後が（直近の前後だけでなく文章全体が）正しくつながるように埋めよ．ただし空欄 (b) は**文章中の**（空欄以外の）数式と日本語を含むある**部分**であり，(b) 以外の空欄は文章中にある記号や標準の数学記号を組み合わせた数式である．偏微分の記号は教科書の記号を用いず，以下の文章の記号を用いること．答案用紙は (a)..., (b)... のように解答のみを書け．

2 変数 C^1 級関数 f と g が点 $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ の近傍で定義されていて，$g(a,b)=0$ と $\dfrac{\partial g}{\partial y}(a,b)\neq 0$ が成り立っているとき，等式条件 $g=0$ の下で f が点 (a,b) で極値を持つならば，連立方程式

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)+\lambda\frac{\partial g}{\partial x}(a,b)=\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)+\lambda\frac{\partial g}{\partial y}(a,b)=0$$

が成り立つ定数 λ がある（未定乗数法）．未定乗数法は，陰関数定理を用いて証明される．実際，問の条件の下で，a を含む開区間とその上で定義された連続関数 ϕ で $\phi(a)=b$ を満たすものがただ 1 つ決まって，点 (a,b) のある近傍で $g(x,y)=0$ と $y=\phi(x)$ が同値になり，しかも ϕ は a で微分可能である（陰関数定理）．よって $g=0$ の条件下で f が (a,b) で極値を取れば，$h(x)=f(x,\phi(x))$ で定義される 1 変数関数 h が $x=a$ で極値を取る．したがって，(a) ．

また，(b) だから，(c) が $x=a$ を含むある開区間で恒等式であり，空欄 (c) に入る式の $x=a$ での微分と空欄 (a) に入る式から $\phi'(a)$ を消去して得られる式をヤコビ行列の行列式を用いて書くと (d) $=0$ となる．最初の未定乗数法の連立方程式のうち後の式で λ を定義したとき，前の式がこのヤコビ行列式から得られる．

経済数学Ⅰ　期末試験　**略解**　　2018/08/01 服部哲弥

問 1 (60=10*6).

i) $\underline{\|(\overrightarrow{\nabla} f)(x,y,z)\|^2 = 4x^2 + (2y-3y^2)^2 + 4z^2 = 4x^2 + 4y^2 - 12y^3 + 9y^4 + 4z^2}$
【$\overrightarrow{\nabla} f(x,y,z) = (2x \quad 2y-3y^2 \quad 2z)$】

ii) $\underline{(x,y,z) = (0,0,0),\ (0, \frac{2}{3}, 0)}$

iii) $\underline{2x = 2y-3y^2 = 2z = 0}$, $\underline{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2-6y & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\text{の固有値がすべて正}}$

【$\overrightarrow{\nabla} f(x,y,z) = 0$】

iv) $\underline{f(0,0,0) = 0,\ \text{極小値}}$

v) 固有値が正負混在する

vi) $\underline{f(0, \frac{2}{3}, 0) = \frac{4}{27}}$

問 2 (40=10*4).　(a) $\underline{\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\phi'(a) = 0}$

(b) 点 (a,b) のある近傍で $g(x,y)=0$ と $y=\phi(x)$ が同値

(c) $\underline{g(x,\phi(x)) = 0}$

(d) $\underline{\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) & \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(a,b) & \frac{\partial g}{\partial y}(a,b) \end{vmatrix}}$

問 3 (-10).