慶應義塾大学試験問題用紙（日吉）

平成 31 年 01 月 29 日 (火) 6 時限施行		学部　　学科　　年　　組	試験時間	50 分
担当者名	服部　哲弥　君	学籍番号		
科目名	経済数学 II	氏　名		

注意：**答案用紙の裏は使ってはならない**（解答は答案用紙の表がわに収めよ）．また，**答案用紙表右上に登録した時限（３または４）**を必ず明記すること．

問１．　　テキストでは Fritz–John 条件は次の定理をとおして紹介されている．

定理． n と m を自然数として，C^1 級関数たち $f:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ と $\overrightarrow{g}:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ について，f が点 $\overrightarrow{c}$ で条件 $\overrightarrow{g} \leqq \overrightarrow{0}$ の下での極小値を取るとき，次の Fritz–John 条件が成り立つ．

$$\mu_0 \overrightarrow{\nabla} f(\overrightarrow{c}) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i \overrightarrow{\nabla} g_i(\overrightarrow{c}) = \overrightarrow{0},$$
$$(\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_m) \neq (0, \ldots, 0),\ \mu_0 \geqq 0,\ \mu_i \geqq 0,\ \mu_i g_i(\overrightarrow{c}) = 0\ (i = 1, \ldots, m).$$

以下，この定理において $n = m = 2$ として，$f(x, y) = x^2 + y^2$, $g_1(x, y) = -x^2 + y + 1$, $g_2(x, y) = \dfrac{1}{2}x^2 + x - \dfrac{3}{2} - y$ で定まる f と $\overrightarrow{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}$ を固定して，小問に答えよ．なお，$\overrightarrow{\nabla} f = (\dfrac{\partial f}{\partial x}\ \dfrac{\partial f}{\partial y})$ は 1×2 行列で表した勾配ベクトルである．**答案用紙はおもて面だけ**に答だけを書け．

i) $\overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ に対して，それぞれ，上記 Fritz-John 条件（の等式・不等式の組）の解 (μ_0, μ_1, μ_2) を求めよ．答案は**おもて面に**
$\underline{f(0,0) = 0 \text{ について } (\mu_0, \mu_1, \mu_2) = (-1, 0, 1)}$, $\underline{f(1,0) = 1 \text{ について } (\mu_0, \mu_1, \mu_2) = (0, 0, 0)}$,
のように答だけを，解が複数ある場合はそれぞれ 1 組の数値を選んで，書け．

ii) $\mu_0 > 0$ かつ $\mu_1 > 0$ かつ $\mu_2 = 0$ を満たす Fritz–John 条件の解をすべて求めよ．答案は**おもて面に**
$\underline{\overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ のとき } (\mu_0, \mu_1, \mu_2) = (3, 4, 0)}$, $\underline{\overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ のとき } (\mu_0, \mu_1, \mu_2) = (7, 8, 0)}$, $\underline{\cdots}$,
のようにすべての答だけを，1 つの点 $\overrightarrow{c}$ に解が複数ある場合はそれぞれ 1 組の数値を選んで，書け．

iii) Fritz–John 条件の解は小問 i) で与えたものと小問 ii) で求めたもので尽きていることが（事前の検討で）わかっている．このとき条件 $\overrightarrow{g} \leqq \overrightarrow{0}$ の下での f の**最**小値【注：極小値の列挙ではなく，最小値】とその値を取る点（複数ある場合は全て），そしてその点における f の勾配ベクトルを g_1 の勾配ベクトルで表す線形の関係式を書け．答案は**おもて面に**
$\underline{f(-1, 0) = 2,\ \overrightarrow{\nabla} f(-1, 0) = \overrightarrow{\nabla} g_1(-1, 0)}$ のように答だけを書け．

問２．　　Gordan の定理はテキストでは次のように書かれている．

定理． $\mathbb{R}^n$ の m 個のベクトル $\overrightarrow{a}_1, \ldots, \overrightarrow{a}_m$ について，次の (1) と (2) は同値である．

(1) $p_1 \overrightarrow{a}_1 + \cdots + p_m \overrightarrow{a}_m = \overrightarrow{0}$, $p_i \geqq 0\ (i = 1, \ldots, m)$ を満たす $(p_1, \ldots, p_m) \neq (0, \ldots, 0)$ が存在する

(2) $(\overrightarrow{a}_i, \overrightarrow{y}) < 0$ $(i = 1, \ldots, m)$ を満たす $\overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^n$ は存在しない.

問 1 で引用した定理はこの Gordan の定理から証明されたので，両者の内容は対応する．問 1 で固定した，$f(x, y) = x^2 + y^2$, $g_1(x, y) = -x^2 + y + 1$, $g_2(x, y) = \dfrac{1}{2}x^2 + x - \dfrac{3}{2} - y$ で定まる f と $\overrightarrow{g}$ の，問 1-i) で言及した各点で成り立つ Fritz–John 条件におけるこの対応関係についての以下の小問に答えよ．**答案用紙はおもて面だけ**に答だけを書け.

i) 問 1-i) で指定した各点 $\overrightarrow{c}$ それぞれについて，そこで成り立つ Fritz–John 条件を導く Gordan の定理の (2) の記号（定数），$m, n, {}^t\overrightarrow{a}_1, \ldots, {}^t\overrightarrow{a}_m$, について，対応するように，$m$ と n の数値を答え，その他の変数については Fritz–John 条件に現れる変数たち f, g_1, g_2, μ_0, μ_1, μ_2 を用いて表せ.（$\overrightarrow{a}_i$ たちは転置して $1 \times n$ 行列で表した ${}^t\overrightarrow{a}_i$ で答えよ.）答案は**おもて面に** $\underline{\overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ のとき } m = 2,\ n = 2,\ {}^t\overrightarrow{a}_1 = (g_1(0,0) \quad f(0,0)),\ {}^t\overrightarrow{a}_2 = (\mu_0, \mu_1),}$ $\underline{\overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ のとき } m = 1,\ n = 3,\ \ldots,}$ のようにそれぞれの点ごとに答だけを書け.

ii) 小問 i) と同様に，問 1-i) で指定した各点 $\overrightarrow{c}$ それぞれについて，そこで成り立つ Fritz–John 条件の解の存在を保証する Gordan の定理の (1) の $p_1, \ldots, p_m$ の数値を各自の**問 1 の対応する解答と等しい値で**答えよ．答案は**おもて面に** $\underline{\overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ のとき } p_1 = 10,\ p_2 = -10,}$ $\underline{\overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ のとき } \ldots,}$ のようにそれぞれの点ごとに答だけを書け.

iii) 小問 i) の答で，点 $\overrightarrow{c}$ によって，添字の対応が異なる．特に対応から漏れている添字について，漏れている理由を極値問題の視点から答案用紙に 3 行以内で説明せよ.

経済数学 II　期末試験　**略解**　　2019/01/29 服部哲弥

問 1 (50=10+20+20).

i) $f(0,0)=0$ について $(\mu_0,\mu_1,\mu_2)=(1,0,0)$, $f(1,0)=1$ について $(\mu_0,\mu_1,\mu_2)=(0,1,1)$.
【それぞれ正値スカラー倍のみすべて可.
$\vec{\nabla} f(x,y)=(2x\ \ 2y)$, $\vec{\nabla} g_1(x,y)=(-2x\ \ 1)$, $\vec{\nabla} g_2(x,y)=(x+1\ \ -1)$】

ii) $\vec{c}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ のとき $(\mu_0,\mu_1,\mu_2)=(1,1,0)$, $\vec{c}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ のとき $(\mu_0,\mu_1,\mu_2)=(1,1,0)$,

$\vec{c}=\begin{pmatrix}0\\ -1\end{pmatrix}$ のとき $(\mu_0,\mu_1,\mu_2)=(1,2,0)$.【それぞれ正値スカラー倍のみすべて可】

iii) $f(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{2})=\frac{3}{4}$ （複号同順）, $\vec{\nabla} f(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{2})=-\vec{\nabla} g_1(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{2})$.
【点 $(0,0)$ は不等式条件の 1 つ $g_1 \leqq 0$ を満たさない. 勾配ベクトル間の線形関係式は Fritz–John の最初の等式条件に数値を代入したもの.】

問 2 (50=20+20+10).

i) $\vec{c}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$ のとき $m=1$, $n=2$, ${}^t\vec{a}_1=\vec{\nabla} f(0,0)$,

$\vec{c}=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$ のとき $m=3$, $n=2$, ${}^t\vec{a}_1=\vec{\nabla} f(1,0)$, ${}^t\vec{a}_2=\vec{\nabla} g_1(1,0)$, ${}^t\vec{a}_3=\vec{\nabla} g_2(1,0)$.
【$m=1+\sharp\{i\in\{1,2\}\mid \mu_i>0\}$】

ii) $\vec{c}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$ のとき $p_1=1$ 【問 1-i) の答案の $f(0,0)$ に対する μ_0 の値】,

$\vec{c}=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$ のとき $p_1=0$, $p_2=1$, $p_3=1$【問 1-i) の答案の $f(1,0)$ に対する μ_0,μ_1,μ_2 の値】,

iii) $g_i(\vec{c})<0$ （$g_i(\vec{c})=0$ で定まる曲線が $\vec{c}$ を通らない）ならば, 条件 $g_i(\vec{c})\leqq 0$ の有無が $\vec{c}$ の近傍に影響が無いので, 極値の必要条件に関係しない（対応する Gordan の定理にも反映しない）.

問 3 (-10).　誤記, 無記