慶應義塾大学試験問題用紙（日吉）

			試験時間	**50** 分	
令和 01 年 08 月 01 日 (木) 2 時限施行		学部　　学科　　年　　組			
担当者名	服部　哲弥　君	学籍番号			
科目名	経済数学 I	氏　名			

注意：**答案用紙の裏は使ってはならない**（解答は答案用紙の表がわに収めよ）．また，**答案用紙表右上に登録した時限（３または４）**を必ず明記すること．

問１．　以下の問 i) – iv) に答えよ．

i) 2 変数関数 $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ が点 $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ で連続であるということの定義は「任意の正数 ε に対して，$\boxed{}$ を満たすどの $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ についても $|f(x,y) - f(a,b)| < \varepsilon$ が成り立つような正数 δ が存在する」と書ける．空欄の中に，$x, y, a, b, \delta, \varepsilon, f$ と四則演算とべき乗と不等号と数字だけを用いた適切な式を入れて定義を完成せよ．(記号はすべて使うとは限らない．また，指定以外の記号，特に，絶対値やノルムや根号も使わないこと．) 答案は空欄に入れるべき式だけを用紙のおもて面に書け．

ii) 2 変数単項式 $f(x,y) = x\,y$ について，点 $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ での平均値の定理を書け．答案は (x,y) が (a,b) の近傍の点のとき，$xy = ab + e^{a+\theta(y-c)}(x+a)$ と $a < \theta < b$ を満たす θ が存在する．のように，あらわな式で書いた答だけを用紙のおもて面に書け．

iii) 有理関数 $f(x,y) = \dfrac{(x^2+xy+y^2)^3}{3y^4+4x^3y+5x^4}$ に対して $x\,\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\,\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ を計算せよ．答案は有理式で書いた答だけを用紙のおもて面に書け．

iv) $f(x,y) = \dfrac{x^2-2x+y^2-4y+5}{x^2+x\,y+y^2+5}$ で定義される関数 $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ の極値を求めよ．複数ある場合は 1 つ選んで解答せよ．答案は (x,y) の値と極大か極小かの他に，その点が極値であることの理由を簡潔に書くこと．(微分を用いる必要はないが，適切な理由のない場合は採点しない．)

問２．　m を 2 以上の自然数，$I, p_1, \ldots, p_m$ を正の実数，各 i について $u_i\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ を C^2 級で狭義単調増加で狭義凹関数（特に各 i について導関数 u_i' と $-u_i''$ は各点で正の値をとる）とし，$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は C^1 級で狭義単調増加とする．以下の文章の空欄 (a)–(f) を，文章の前後が（直近の前後だけでなく文章全体が）正しくつながるように適切な数式で埋めよ．答案用紙は (a) … (b) … …のように解答のみを書け．

m 個の財 $i = 1, \ldots, m$ を購入する 1 人の（初級ミクロで習うような）消費者を考え,（以下，m 個の財に関する変数の組をまとめて書くときはベクトルの記号を用いて，例えば購入量の組を $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_m) \in {\mathbb{R}_+}^m$ などとすることにして,）合成関数 $U(\vec{x}) = f(u_1(x_1) + u_2(x_2) + \cdots + u_m(x_m))$ で定義される $U\colon {\mathbb{R}_+}^m \to \mathbb{R}$ を効用関数，I を予算，各 i について p_i を財 i の価格とする．すなわち，各 i について財 i の購入量 x_i が，予算制約 $\displaystyle\sum_{j=1}^{m} x_j p_j = I$ の下で $U(\vec{x})$ を最大化するように決まり，結果として，独立変数 $I, \vec{p}$ の関数 $x_i = x_i(I, \vec{p})\colon {\mathbb{R}_+}^{m+1} \to \mathbb{R}_+$ として定まるものとする．未定乗数法や合成関数の微分などの標準的な方法を用いて**未定乗数と関数 f を含まない（消去した）**形で書いた $\vec{x}(I, \vec{p})$ に対する方程式として，連立方程式

$$\frac{u_1'(x_1(I,\vec{p}))}{p_1} = \frac{u_2'(x_2(I,\vec{p}))}{p_2} = \cdots = \frac{u_m'(x_m(I,\vec{p}))}{p_m} = \boxed{\text{(a)}}$$

を得る．たとえば，a, b を正定数とし $m=2$ とするとき，$U(x_1, x_2) = a \log x_1 + b\sqrt{x_2}$ という効用関数の例では，以上の一般論で f, u_1, u_2 をそれぞれ $f(y) = y$ と $(u_1(x), u_2(x)) = \boxed{\text{(b)}}$ で定めればよく，上記の連立方程式を解くと，$x_1(I, p_1, p_2) = \boxed{\text{(c)}}$ などを得る．

得られた関数 $x_i(I, \overrightarrow{p})$ について i が下級財である，言い換えると条件 $\dfrac{\partial x_i}{\partial I}(I, \overrightarrow{p}) < 0$ が成り立つ，可能性を考える．上の連立方程式で空欄 (a) を $g(I, \overrightarrow{p})$ と置くことで $\dfrac{u_i'(x_i(I, \overrightarrow{p}))}{p_i} = g(I, \overrightarrow{p})$, $i = 1, \dots, m$, と書いて両辺を I で偏微分すると $\dfrac{\partial x_i}{\partial I}(I, \overrightarrow{p}) = \boxed{\text{(d)}}$ を得る．これを予算制約条件の両辺を I で偏微分した式 $\boxed{\text{(e)}}$ に代入することで $\dfrac{\partial g}{\partial I}(I, \overrightarrow{p}) = \left(\displaystyle\sum_{j=1}^{m} \frac{p_j^2}{u_j''(x_j(I, \overrightarrow{p}))} \right)^{-1}$ を得る．これを空欄 (d) の式に代入して g を消去すると $\dfrac{\partial x_i}{\partial I}(I, \overrightarrow{p}) = \boxed{\text{(f)}}$ となるが，問題冒頭の条件からこれは恒等的に正である．このことはこの問題の設定で許される効用関数では下級財が存在しない（下級財を説明するためにはより人工的な効用関数を必要とする）ことを意味する．所得が増えると購入量が減る財の存在は実体経済で珍しくないように思われるが，ミクロ初級の最初のほうで紹介される説明が人工的な効用関数を必要とすることは，初等的な説明が現実における本質を突き損ねていることを意味するかもしれない．

問 1 (40=10*4).

i) $\underline{(x-a)^2+(y-b)^2<\delta^2}$
【$-\delta<x-a<\delta,\ -\delta<y-b<\delta$ なども可】

ii) (x,y) が (a,b) の近傍の点のとき，
$xy=ab+(b+\theta(y-b))(x-a)+(a+\theta(x-a))(y-b)$ と $0<\theta<1$
を満たす θ が存在する．

【$f(x,y)=f(a,b)+\overrightarrow{\nabla}f(a+\theta(x-a),b+\theta(y-b))\begin{pmatrix}x-a\\y-b\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\nabla}f(x,y)=(y\ x)$

iii) $\underline{2\dfrac{(x^2+xy+y^2)^3}{3y^4+4x^3y+5x^4}}$
【$f(tx,ty)=t^2f(x,y)$（2 次同次式）なので $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2f(x,y)$】

iv) $(x,y)=(1,2)$，極小値．f の分母は $(x+\dfrac{1}{2}y)^2+\dfrac{3}{4}y^2+5$ だからすべての (x,y) で正，分子は $(x-1)^2+(y-2)^2$ だから $(x,y)=(1,2)$ で 0，それ以外の点で正なので，$(x,y)\neq(1,2)$ ならば $f(x,y)>0=f(1,2)$ となって定義から $(1,2)$ で f は極小値（最小値でもある）．
【理由付けで 1 階微分（勾配ベクトル $\overrightarrow{\nabla}f$）への言及だけでは不可．分母への言及が無く分子だけの計算も 0 点.】

問 2 (60=10*6).

(a) $\dfrac{1}{I}\displaystyle\sum_{j=1}^{m}x_j(I,\overrightarrow{p})\,u_j'(x_j(I,\overrightarrow{p}))$　(b) $(a\log x, b\sqrt{x})$　(c) $\dfrac{2a}{b^2p_1}\left(-p_2a+\sqrt{p_2^2a^2+p_2b^2I}\right)$

【$\dfrac{a}{x_1p_1}=\dfrac{b}{2\sqrt{x_2}p_2}=\dfrac{1}{I}\,(a+\dfrac{1}{2}b\sqrt{x_2})$, $x_2=\dfrac{1}{p_2^2b^2}\left(-p_2a+\sqrt{p_2^2a^2+p_2b^2I}\right)^2$】

(d) $\dfrac{p_i}{u_i''(x_i(I,\overrightarrow{p}))}\dfrac{\partial g}{\partial I}(I,\overrightarrow{p})$　(e) $\displaystyle\sum_{j=1}^{m}p_j\frac{\partial x_j}{\partial I}(I,\overrightarrow{p})=1$　(f) $\dfrac{p_i}{u_i''(x_i(I,\overrightarrow{p}))\displaystyle\sum_{j=1}^{m}\frac{p_j^2}{u_j''(x_j(I,\overrightarrow{p}))}}$

問 3 (-10).