慶應義塾大学試験問題用紙（日吉）

				試験時間	50 分	
令和 02 年 01 月 28 日 (火) 6 時限施行		学部　学科　年　組				
担当者名	服部　哲弥　君	学籍番号				
科目名	経済数学 II	氏　名				

注意：**答案用紙の裏は使ってはならない**（解答は答案用紙の表がわに収めよ）．また，**答案用紙表右上に登録した時限（３または４）**を必ず明記すること．

問１．　単価が $p_1 > 0$ および $p_2 > 0$ の 2 つの財を予算 200 以下でそれぞれ x 個および y 個ずつ購入することで効用関数 $U(x, y) = 2\log x + 3\log y$ を最大にすることを目指す（初級ミクロ的）消費者を考える．個数は非負とする．購入個数を求めるために Fritz–John 条件を導出すべく，予算制約 $p_1x + p_2y \leqq 200$ および個数の非負条件たちに対応する m 個の連立不等式 $g_i(x, y) \leqq 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$，**の条件下で関数** $f(x, y)$ **の極小値を求める**問題で定式化する．不等式条件のための関数たちのうち $i = 1$ すなわち g_1 は予算制約条件に対応する関数とする．以下の小問に答えよ．

i) f, m, g_i, $i = 1, \ldots, m$, を**答案はおもて面**に $\underline{f(x, y) = x + \log y, \ldots}$ のように関数については x と y の明示的な関数を書き，m は自然数を答えよ.（なお，この小問で以下に関係する部分が符号が不鮮明な場合を含めて不正解の場合は，以下の小問を採点しない.）

ii) 上の小問に基づいて得られる Fritz–John 条件を解け．但し f を含む項の Fritz–John 条件の係数 μ_0 が 0 でなく，$i = 2, \ldots, m$ について g_i を含む項の係数 μ_i が 0 である場合だけに限って良い．つまり，0 でない可能性があるのは μ_i , $i = 1, \ldots, m$, の中では μ_1 だけとして良い．**答案はおもて面に** 5 **行以内**の簡潔な導出とともに得られた解の $\lambda = \dfrac{\mu_1}{\mu_0}$ と個数の組 (x, y) を $\underline{\lambda = \cdots}$, $\underline{x = \cdots}$, $\underline{y = \cdots}$ のように書け.（簡潔な導出が 1 行も無い場合は採点しない．また，**Fritz–John 条件**の一連の式**そのものは**採点対象にしないので，**答案用紙には書かないこと．**）

問２．　分離定理は次の定理である：『自然数 m に対して m 次元空間 $\mathbb{R}^m$ の部分集合 B と C が凸集合で $B \cap C = \emptyset$（共通部分が空集合）ならば $\overrightarrow{p} \neq \overrightarrow{0}$ なる m 次元ベクトル $\overrightarrow{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$ と実数 $c \in \mathbb{R}$ をうまく選んで，内積を $(\cdot, \cdot)$ と書くとき，$\overrightarrow{x} \in B \ \Rightarrow \ (\overrightarrow{p}, \overrightarrow{x}) \geqq c$，かつ，$\overrightarrow{x} \in C \ \Rightarrow \ (\overrightarrow{p}, \overrightarrow{x}) \leqq c$，とできる.』全成分負のベクトルの集合 $T = \{\overrightarrow{z} \in \mathbb{R}^m \mid z_i < 0,\ i = 1, \ldots, m\}$ や線形代数で学ぶ線形空間（部分空間）のベクトルを位置ベクトル（座標）と見たときの点の集合は凸集合である．

一方，Gordan の定理は次の定理である：『$n \times m$ 行列 A について次の**(1)** と**(2)** は同値である．
(1) $A\overrightarrow{p} = 0$ と $\overrightarrow{p} \geqq \overrightarrow{0}$ と $\overrightarrow{p} \neq \overrightarrow{0}$ を満たす m 次元ベクトル $\overrightarrow{p} \in \mathbb{R}^m$ がある．
(2) ${}^tA$ を A の転置行列として，$V = \{{}^tA\overrightarrow{y} \mid \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^n\}$ で定義される線形空間（$\mathbb{R}^m$ の部分空間）V と前段落で定義した T が $V \cap T = \emptyset$ を満たす.』（テキスト 5 章では Fritz–John 条件を証明するのに適した書き方になっているが，分離定理から Gordan の定理を証明するのに適した上記の書き換えも紹介済みである.）以上について以下の小問に答えよ．

i) （同値性の主張のうち分離定理を必要としない部分である）『**(1)** が成り立つとき **(2)** が成り立つ』ことの証明を次のように書き始めた．下記の続きを**答案用紙のおもて面に**3 行以内で

簡潔に答えて証明を完成せよ.『$A\overrightarrow{p}=0$の転置を考えると${}^t\overrightarrow{p}\,{}^tA\overrightarrow{y}=0$が任意の$\overrightarrow{y}\in\mathbb{R}^n$について成り立つから，$\overrightarrow{b}={}^tA\overrightarrow{y}$と置いてその成分を$b_i$たちで表すと$p_1b_1+\cdots+p_mb_m=0$. $\cdots$』

ii) 上の小問と逆の『**(2)** が成り立つとき **(1)** が成り立つ』ことの証明のために分離定理で$B=V$と$C=T$と置くと，今仮定した **(2)** から分離定理の仮定が成り立つので分離定理の結論から,『$\overrightarrow{x}\in V$ならば$(\overrightarrow{p},\overrightarrow{x})\geqq c$』と,『$\overrightarrow{x}\in T$ならば$(\overrightarrow{p},\overrightarrow{x})\leqq c$』と，$\overrightarrow{p}\neq\overrightarrow{0}$を満たす$\overrightarrow{p}\in\mathbb{R}^m$と$c\in\mathbb{R}$がある．$\overrightarrow{0}\in V$から$c\leqq 0$，$\overrightarrow{0}$にいくらでも近いベクトルが$T$の要素であることから$c\geqq 0$を得るので$c=0$と決まる．一方，Gordanの定理はさらに$\overrightarrow{p}\geqq\overrightarrow{0}$（全成分非負）が成り立つと言っている．$\overrightarrow{p}\geqq\overrightarrow{0}$はここまでの議論のどこから言えるか，この**問2**の二重カギ括弧『』の中の文言の中から理由となる部分を過不足無く抜き出して**答案用紙のおもて面に**書き写せ.

iii) 上の小問までで得た分離定理の直接の結論から **(1)** の証明を完成させる文章を次のように始めた．続きを**答案用紙のおもて面に**3行以内で簡潔に書いて **(1)** の結論である$A\overrightarrow{p}=\overrightarrow{0}$を導け.『内積の性質$(\overrightarrow{w},\overrightarrow{v})=(\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})={}^t\overrightarrow{v}\,\overrightarrow{w}$を用いることで，任意の$n$次元ベクトル$\overrightarrow{y}$に対して${}^t\overrightarrow{y}A\overrightarrow{p}=({}^tA\overrightarrow{y},\overrightarrow{p})=(\overrightarrow{p},{}^tA\overrightarrow{y})\geqq 0$によって${}^t\overrightarrow{y}A\overrightarrow{p}\geqq 0$を上の小問から得る．ここで$\cdots$』

経済数学 II　期末試験　**略解**　2020/01/28 服部哲弥

問 1 (50=20+30).

i) $\underline{f(x,y) = -2\log x - 3\log y}$,
$\underline{m=3}$, $\underline{g_1(x,y) = p_1 x + p_2 y - 200}$, $\underline{g_2(x,y) = -x}$, $\underline{g_3(x,y) = -y}$.
【効用は最大化，f は最小値を求める問題としたので $f=-U$，g_i たちの符号も厳格に採点，g_1 は問題文から予算制約に限るが，g_2 と g_3 は順不同】

ii) $\overrightarrow{\nabla} f(x,y) = (-\dfrac{2}{x}\,,\ -\dfrac{3}{y})$, $\overrightarrow{\nabla} g_1(x,y) = (p_1\,,\ p_2)$, だから，Fritz–John 条件で $\mu_2 = \mu_3 = 0$ と置き，$\mu_0 > 0$ に注意して $\lambda = \dfrac{\mu_1}{\mu_0}$ と置くと，
$-\dfrac{2}{x} + \lambda p_1 = -\dfrac{3}{y} + \lambda p_2 = 0$, $\lambda \geqq 0$, $\lambda(p_1 x + p_2 y - 200) = 0$.
最後の式以外から $\dfrac{1}{2} p_1 x = \dfrac{1}{3} p_2 y = \dfrac{1}{\lambda} > 0$ がすぐ分かり，最後の式に代入すると $\underline{\lambda = \dfrac{1}{40}}$ だから，$\underline{x = \dfrac{80}{p_1}}$, $\underline{y = \dfrac{120}{p_2}}$.

問 2 (50=20+10+20).

i) p_i たちは非負で 0 でない（正の）ものがあるから，b_i たちが全成分負だと左辺が負になって矛盾．よって $\overrightarrow{b} = {}^t A \overrightarrow{y} \notin T$．よって $V \subset T^c$．すなわち，$V \cap T = \emptyset$.

ii) $\underline{\overrightarrow{x} \in T \text{ ならば } (\overrightarrow{p}, \overrightarrow{x}) \leqq c}$.　【$\overrightarrow{x}$ の i 成分を $x_i = -1$ とし，他の成分を 0 に近づけることで $-p_i \leqq 0$ すなわち $p_i \geqq 0$ を得る.】

iii) $\overrightarrow{y}$ は任意なので $\overrightarrow{y}$ に $-\overrightarrow{y}$ を代入しても結論が成り立つから $-{}^t\overrightarrow{y} A \overrightarrow{p} \geqq 0$ すなわち，${}^t\overrightarrow{y} A \overrightarrow{p} \leqq 0$ も成り立つ．よって ${}^t\overrightarrow{y} A \overrightarrow{p} = 0$．$\overrightarrow{y}$ として第 i 成分だけ 1 他は 0 のベクトルを取ると $A\overrightarrow{p}$ の第 i 成分が 0 と決まる．i は任意だから $A\overrightarrow{p} = \overrightarrow{0}$.
【別解 1：$\overrightarrow{y} = \pm \overrightarrow{e}_i$, $i = 1, \ldots, m$ の $2m$ 個のベクトルを取る．
別解 2：$\overrightarrow{y} = -A\overrightarrow{p}$ と取る.（$\overrightarrow{y} = A\overrightarrow{p}$ は 0 点なので理屈を厳格に理解してない者には薦めない.）】