慶應義塾大学試験問題用紙（日吉）

												試験時間	**50** 分	
令和 03 年 07 月 14 日水 4 時限施行		学部　　学科　　年　　組												
担当者名	服部　哲弥　君	学籍番号												
科目名	経済数学 I	氏　名												

注意：**答案用紙の裏は使ってはならない**（解答は答案用紙の表がわに収めよ）．また，**答案用紙表右上に登録した時限（３または４）**を必ず明記すること．

問１．　正の整数すべてを集めた集合を全体集合とし，A_1 , A_2 , ..., をその部分集合の列とするとき以下に答えよ．

i) 集合 $\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c\right)^c$ を補集合の記号を使わないで表せ．解答は等式 $\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c\right)^c = \cdots$ の形で答え，その等式を証明せよ．ここで集合 A に対して A^c は講義 pdf のとおり A の補集合である．解答は答案用紙のおもて面に 5 行分程度以内の分量で簡潔に書くこと．証明のない答案は採点しない．

ii) $n = 1, 2, \ldots$ に対して $A_n = \{2n\}$ のとき，$\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c\right)^c$ はどういう自然数の集合かを集合算を含まない集合の式を用いて $\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c\right)^c = \{\cdots\}$ の形で答え，どういう集合かを説明することで数式と日本語の両方で答えよ．解答は答だけを答案用紙のおもて面に書け．

問２．　b を $0 < b < 2$ を満たす実数として $f(x, y) = (x^2 + y^2 - 4)(b - x)$ で定義される 2 変数関数 f について以下に答えよ．

i) f は $b < x < 2$ を満たすある点 (x, y) で極大値を取ることを偏微分を用いずに証明せよ．解答は答案用紙のおもて面に 7 行程度以内の分量で要点を簡潔に書け．要点の中に $x = b$ と $x = 2$ が除外されていることを含めること．有界閉集合と連続関数について教科書と講義 pdf にある事項は証明せずに用いて良い．特に，次の既習の事実を「定理」として引用して用いてよい：「平面上の空でない有界閉集合上で連続な関数は最大値を持つ.」

ii) 前の小問の極大値を取る点 (x, y) を，勾配ベクトルを用いた普通の方法で求めよ．答だけでなく，必要条件から得られる複数の場合分けのうち除外するものは除外する理由を示すように導出の要点を簡潔に付け加えよ．答だけの答案は採点しない．解答は答案用紙のおもて面に 5 行程度以内の分量で簡潔に書け．

iii) $f(x, y)$ は，その具体形から，$x = b$ を満たす鞍点（峠点）(x, y) がある．その点を求め，鞍点である理由を偏微分を用いずに答案用紙のおもて面に簡潔に説明せよ．この小問は証明まで求めず，略図などを利用しても良い．

問３．　C^1 級 2 変数関数 1 つの等式条件 $g(x, y) = 0$ の下で $f(x, y)$ が点 (a, b) で極値を取るための教科書の論理を講義 pdf で次のように整理した．以下教科書の記号に従って，多変数関数の偏微分は関数記号に x 等の座標成分の添字を付けて表し，1 変数関数の微分は $'$ を用いる．

適切な条件の下で，陰関数定理により (a, b) の近くで $g(x, \varphi(x)) = 0$ が恒等式になる微分可能な 1 変数関数 φ がある．（あとで，これを「$g(x, y) = 0$ を陰関数定理で解いて $y = \varphi(x)$ を得る」と略述する.）特に $\varphi(a) = b$ である．このとき元の問題は $f(x, \varphi(x))$ で定まる 1 変

数関数の条件無し極値問題と同値なので，上記 g に関する恒等式条件と共に連立 1 次方程式
$\begin{cases} f_x(a,b) + f_y(a,b)\varphi'(a) = 0, \\ g_x(a,b) + g_y(a,b)\varphi'(a) = 0, \end{cases}$ を得る．これから $\varphi'(a)$ を消去すると

$f_x(a,b)g_y(a,b) = f_y(a,b)g_x(a,b)$ を得るが，λ を適切に選ぶとこれは未定乗数法の方程式
$\begin{cases} f_x(a,b) + \lambda g_x(a,b) = 0, \\ f_y(a,b) + \lambda g_y(a,b) = 0, \end{cases}$ の形に書ける．

以上は 3 変数関数 2 つの等式条件 $g(x,y,z) = h(x,y,z) = 0$ の下での $f(x,y,z)$ の極値を求める問題でも同様である．点 (a,b,c) の近くで連立等式条件を解いて $y = \varphi(x)$ と $z = \chi(x)$ を得る．特に $(\varphi(a), \chi(a)) = (b,c)$ である．このとき元の問題は 1 変数関数 $f(x, \varphi(x), \chi(x))$ の条件無し極値問題と同値なので，g と h の恒等式条件と共に連立 1 次方程式を得る．以下この問題では答案も含めて (a,b,c) を省略してここだけの約束で $f_x(a,b,c)$ を f_x などと書くことにすると，連立方程式は
$\begin{cases} f_x + f_y\,\varphi'(a) + f_z\,\chi'(a) = 0, \\ g_x + g_y\,\varphi'(a) + g_z\,\chi'(a) = 0, \\ h_x + h_y\,\varphi'(a) + h_z\,\chi'(a) = 0, \end{cases}$ である．適切な条件の下で下 2 行を $\varphi'(a)$ と $\chi'(a)$ について解いてそれを 1 行目に代入して f_x と g_x と h_x についての方程式と見ると，未定乗数法の方程式の 1 つ $f_x + \lambda_1 g_x + \lambda_2 h_x = 0$ を得る．

i) λ_1 と λ_2 を f, g, h の点 (a,b,c) での偏微分 g_y などで表せ．答案用紙はおもて面に $\underline{\lambda_1 = \cdots}$, $\underline{\lambda_2 = \ldots}$ のように答だけを書け．

ii) 上の小問の λ_1 と λ_2 によって，未定乗数法の残りの 2 つの方程式も成り立つことを示せ．答案用紙はおもて面に計算の要点と結果を 3 行程度以内の分量で簡潔に示せ．

iii) 上の 2 つの小問のように計算で導くと，最初の陰関数定理と極値問題に基づく連立方程式を書き直した結果，最後の連立方程式の未定乗数 λ_1 と λ_2 を 3 つの方程式で共通に取れるというのは偶然か奇跡のように見えかねないが，実は線形代数続論で学んだ正方行列の余因子行列 $\tilde{A}$ について成り立つ関係式 $A\tilde{A} = \tilde{A}A = |A|E$ から必然である．$A = \begin{pmatrix} f_x & f_y & f_z \\ g_x & g_y & g_z \\ h_x & h_y & h_z \end{pmatrix}$ と置いて最初の方程式の左辺を $A \begin{pmatrix} 1 \\ \varphi'(a) \\ \chi'(a) \end{pmatrix}$ と書くとき，行列式 $|A|$ の値を答案用紙 1 行の理由とともに答えよ．
さらにそのとき上の 2 つの小問で成り立つことを確認した未定乗数法の連立方程式が関係式 $A\tilde{A} = \tilde{A}A = |A|E$ のどの部分から得られる（はず）かを答案用紙 2 行程度の分量の数式と説明で答えよ（証明や理由は不要）．

経済数学 I　期末試験　**略解**　　2021/07/14 服部哲弥

問 1 (30=20+10).　【第 1 章，講義 pdf 3 の問 (c) ドモルガンの法則】

i) $\underline{\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c\right)^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.}$

証明．補集合の定義から $\overrightarrow{x} \in \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c\right)^c \ \Leftrightarrow\ \overrightarrow{x} \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c$

集合の交差の定義から $\overrightarrow{x} \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c \ \Leftrightarrow\ \exists n \in \mathbb{N};\ \overrightarrow{x} \notin A_n^c$

補集合の定義から $\exists n \in \mathbb{N};\ \overrightarrow{x} \notin A_n^c \ \Leftrightarrow\ \exists n \in \mathbb{N};\ \overrightarrow{x} \in A_n$

和集合の定義から $\exists n \in \mathbb{N};\ \overrightarrow{x} \in A_n \ \Leftrightarrow\ \overrightarrow{x} \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ だから等号を得る．

ii) $\underline{\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c\right)^c = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}}$，正の偶数の集合．　【$\{2, 4, 6, \ldots\}$ なども可．$\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c\right)^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{2n\}$】

問 2 (30=10*3).　【第 3 章 極値（勾配ベクトルの零点），第 1 章 最大値の原理】

i) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqq 4,\ x \geqq b\}$ と置くと $0 < b < 2$ のとき**直線と円で囲まれた**空でない有界閉集合で，f は多項式だから連続関数なので教科書第 1 章の定理 4（講義 pdf 5）の最大値の原理から $(p, q) \in S$ が存在して $f(p, q) \geqq f(x, y)$ がすべての $(x, y) \in S$ に対して成り立つ．S の**境界上では** $f(x, y) = 0$ で内部では $x^2 + y^2 - 4 < 0$ **かつ** $b - x < 0$ **なので** $f(x, y) > 0$ だから最大値は正なので，(p, q) は**境界上ではなく内部にある．**したがって特に $b < x < 2$ を満たす．

ii) 極値を取る必要条件 $\overrightarrow{\nabla} f(x, y) = (2x(b - x) - (x^2 + y^2 - 4), 2y(b - x)) = (0, 0)$ において，$x > b$ を満たす解だから $x = b$ は除外するので $y = 0$ と決まる．よって $3x^2 - 2bx - 4 = 0$ を得るので，$x = \frac{1}{3}(b \pm \sqrt{b^2 + 12})$．$0 < b < 2$ のとき $b < x < 2$ を満たすのは $x = \frac{1}{3}(b + \sqrt{b^2 + 12})$．前の小問から極大値を取る点があることは分かっていて，候補が 1 つだからこれが極大値を取る点．よって $\underline{(x, y) = (\frac{1}{3}(b + \sqrt{b^2 + 12}), 0).}$

iii) $x^2 + y^2 = 4$ と $x = b$ の交点 $(b, \pm\sqrt{4 - b^2})$ では $f(x, y) = 0$ である．$(b, \sqrt{4 - b^2})$ を交点として円と直線で仕切られた 4 つの部分について，右上と左下の部分は $f(x, y) < 0$，左上と右下は $f(x, y) > 0$ なので，右上と左下を結ぶ直線上では $(b, \pm\sqrt{4 - b^2})$ で極大であり，左上と左下を結ぶ直線上では $(b, \pm\sqrt{4 - b^2})$ で極小である．$(b, -\sqrt{4 - b^2})$ についても同様だから，この 2 点は鞍点である．

問 3 (40=10+10+20).　【第 4 章 ラグランジュの乗数法，復習 講義 pdf 2 の余因子行列】

i) $\underline{\lambda_1 = \frac{h_y f_z - h_z f_y}{g_y h_z - g_z h_y}},\qquad \underline{\lambda_2 = \frac{f_y g_z - f_z g_y}{g_y h_z - g_z h_y}}.$

ii) $(g_y h_z - g_z h_y)(f_y + \lambda_1 g_y + \lambda_2 h_y) = f_y g_y h_z - f_y g_z h_y + f_z g_y h_y - f_y g_y h_z + f_y g_z h_y - f_z g_y h_y = 0,$
$(g_y h_z - g_z h_y)(f_z + \lambda_1 g_z + \lambda_2 h_z) = f_z g_y h_z - f_z g_z h_y + f_z g_z h_y - f_y g_z h_z + f_y g_z h_z - f_z g_y h_z = 0.$

iii) 元の方程式が $A \begin{pmatrix} 1 \\ \varphi'(a) \\ \chi'(a) \end{pmatrix} = \overrightarrow{0}$ で，ベクトルの第 1 成分が 0 でないから，未知数と連立方程式の個数が等しい斉次 1 次方程式がゼロベクトルでない解を持つので，行列式 $\underline{|A| = 0}$ である．
よって $\tilde{A}A = O$ だが，その 1 行目は勾配ベクトルたち $\overrightarrow{\nabla} f$，$\overrightarrow{\nabla} g$，$\overrightarrow{\nabla} h$ の線形結合が 0 であるという式である．